

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO FRACTAL PARA A ESTIMATIVA DA CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA DE SOLOS NÃO SATURADOS⁽¹⁾

Carlos Fuentes⁽²⁾, Antonio Celso Dantas Antonino⁽³⁾, André Maciel Netto⁽³⁾, Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira⁽³⁾ & Jaime Joaquim da Silva Pereira Cabral⁽⁴⁾

RESUMO

Baseado nos conceitos da geometria fractal e nas leis de Laplace e de Poiseuille, foi criado um modelo geral para estimar a condutividade hidráulica de solos não saturados, utilizando a curva de retenção da água no solo, conforme representada por um modelo em potência. Considerando o fato de que este novo modelo da condutividade hidráulica introduz um parâmetro de interpolação ainda desconhecido, e que, por sua vez, depende das propriedades dos solos, a validação do modelo foi realizada, utilizando dois valores-limite fisicamente representativos. Para a aplicação do modelo, os parâmetros de forma da curva de retenção da água no solo foram escolhidos de maneira a se obter o modelo de van Genuchten. Com a finalidade de obter fórmulas algébricas da condutividade hidráulica, foram impostas relações entre seus parâmetros de forma. A comparação dos resultados obtidos com o modelo da condutividade e a curva experimental da condutividade dos dois solos, Latossolo Vermelho-Amarelo e Argissolo Amarelo, permitiu concluir que o modelo proposto é simples em sua utilização e é capaz de prever satisfatoriamente a condutividade hidráulica dos solos não saturados.

Termos de indexação: condutividade hidráulica, curva de retenção da água no solo, modelo fractal.

⁽¹⁾ Recebido para publicação em janeiro de 2003 e aprovado em dezembro de 2004.

⁽²⁾ Pesquisador do Instituto Mexicano de Tecnología del Agua – IMTA. Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Col. Progreso. 62550 Jiutepec, Morelos. México. E-mail: cfuentes@tlaloc.imta.mx

⁽³⁾ Professor do Departamento de Energia Nuclear. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. Av. Prof. Luís Freire 1000. CEP 50740-540 Recife (PE). E-mail: acda@ufpe.br.

⁽⁴⁾ Professor do Departamento de Engenharia Civil, UFPE. E-mail: jcabral@ufpe.br

SUMMARY: A FRACTAL MODEL TO ESTIMATE THE UNSATURATED HYDRAULIC CONDUCTIVITY OF SOILS

From a conceptual model based on fractal geometry and Laplace's and Poiseuille's laws, a versatile and general fractal model for the hydraulic conductivity to be used in the soils was developed. The soil-moisture retention curve is derived from a power model. Due to the fact that the proposed model of hydraulic conductivity introduces a still unknown interpolation parameter, which in turn is a function of soil properties, its limiting values were considered for the analysis. To apply the model in the soil, the form parameters of the soil-moisture retention curve were chosen so as to reproduce van Genuchten's equation. In order to obtain a closed-form equation for the hydraulic conductivity, relationships between the form parameters were imposed. The comparison between the predicted and experimental hydraulic conductivity from two soils, Oxisol and Yellow Ultisol, demonstrated that the proposed model is flexible and that it can be used to predict the unsaturated hydraulic conductivity of soils with good accuracy.

Index terms: hydraulic conductivity, soil-moisture retention curve, fractal model.

INTRODUÇÃO

A lei de Darcy é largamente utilizada no estudo do movimento da água no solo em várias situações de interesse, tais como: a irrigação e a drenagem (Braud et al., 1995; Falleiros et al., 1998; Netto et al., 2000). A aplicação desta lei requer, entretanto, o conhecimento das características hidrodinâmicas do solo, ou seja: (a) a relação entre o potencial matricial (ψ) e a umidade volumétrica do solo, $\theta(\psi)$, conhecida como curva característica da umidade do solo ou curva de retenção da água no solo, e (b) a relação entre a condutividade hidráulica e a umidade volumétrica, $K(\theta)$.

Para avaliar as características hidrodinâmicas do solo, têm sido propostos diferentes métodos, tanto de laboratório (Klute & Dirksen, 1986; van Dam et al., 1994) como de campo (Hillel et al., 1972; Libardi et al., 1980; Angulo-Jaramillo et al., 2000). A curva de retenção pode ser determinada por meio de métodos indiretos, utilizando algumas propriedades do solo, como a textura, a porosidade e a matéria orgânica (Gupta & Larson, 1979; Rawls & Brakensiek, 1981; Haverkamp & Parlange, 1986; Saxton et al., 1986). A condutividade hidráulica é, em geral, estimada a partir de modelos da curva de retenção da água no solo (Burdine, 1953; Mualem, 1976; Zhang & van Genuchten, 1994). Nestes métodos, a curva de retenção é descrita por fórmulas algébricas, as quais são introduzidas nos modelos de predição da condutividade hidráulica (Brooks & Corey, 1964; van Genuchten, 1980).

Os modelos de predição de $K(\theta)$ estão baseados nas leis de Laplace e de Poiseuille, as quais relacionam, respectivamente, a pressão e a velocidade média da água nos poros com o tamanho do poro. Fazendo algumas considerações teóricas, o fluxo de Darcy é obtido pela integração dos fluxos de água em todos os poros. Os modelos são validados

e, ou, corrigidos mediante a comparação dos resultados teóricos com as curvas experimentais em solos selecionados (Childs & Collis-George, 1950; Burdine, 1953; Mualem, 1976; Fuentes, 1992).

Recentemente, Fuentes et al. (2001) utilizaram alguns conceitos da geometria fractal, no intuito de justificar as correções empíricas empregadas nos modelos clássicos da condutividade hidráulica, e propuseram esta abordagem fractal para a unificação dos modelos. Este modelo geral tem permitido obter novos modelos particulares da condutividade, quando são introduzidas hipóteses adequadas de definição do tamanho de poro.

O objetivo do presente trabalho foi deduzir um modelo fractal de predição da condutividade hidráulica dos solos não saturados, utilizando uma nova formulação para a distribuição bidimensional dos tamanhos de poro e demonstrar sua validade, aplicando este modelo a dois tipos distintos de solos.

MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção, serão apresentados os principais conceitos, definições e hipóteses que possibilitaram a obtenção do modelo. Em analogia direta com o termo porosidade, que se refere à parte porosa do meio, o termo solidosidade será introduzido para descrever a fração sólida deste meio. O termo areal será utilizado para descrever grandezas relativas à área do mesmo modo que a palavra volumétrica refere-se a volume. As várias passagens que requerem maior desenvolvimento matemático estão detalhadas no apêndice.

O modelo da condutividade hidráulica, proposto por Fuentes et al. (2001), fundamenta-se na lei de Poiseuille, quando o fenômeno é observado na escala dos poros. Utilizando a distribuição bidimensional

dos tamanhos de poro, R_s , a integração desta lei sobre o domínio dos poros que contêm água, em uma seção do solo perpendicular à direção do movimento, permite obter a vazão por unidade de superfície ou fluxo de Darcy, fornecendo o seguinte resultado:

$$K = C_f \frac{\rho_w g}{\eta} \int_{\Omega} R_s^2 d\omega \quad (1)$$

sendo ρ_w a massa específica da água, η o coeficiente de viscosidade dinâmica da água, g a aceleração gravitacional, C_f o coeficiente de Koseny (Bear, 1972) que para um poro circular vale $C_f = 1/8$, $\tilde{\Omega}$ o domínio areal dos poros cheios com água, $d\omega = dA/A_T$ é uma fração da área (A) destes poros, relativa à área total da seção do solo (A_T), e K é a condutividade hidráulica.

A definição da distribuição de R_s requer a introdução do conceito de tortuosidade das trajetórias de fluxo no meio poroso. A tortuosidade T é definida como (Figura 1):

$$T = \frac{dz_f}{dz} \geq 1 \quad (2)$$

sendo z a coordenada que descreve a trajetória do movimento na direção macroscópica e z_f representa a trajetória "real" que segue a água no meio poroso (Dullien, 1979).

As velocidades sobre a trajetória retilínea e sobre a trajetória tortuosa estão representadas, respectivamente, por $v = dz/dt$ e $v_f = dz_f/dt$. De acordo com o que está apresentado na figura 1, infere-se que:

$$T = \frac{v_f}{v} = \frac{R}{R_s} \quad (3)$$

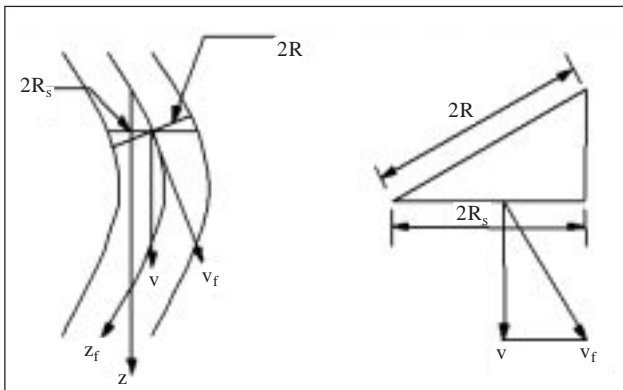


Figura 1. A tortuosidade e os triângulos semelhantes formados pelos raios e as velocidades. A velocidade v é referenciada à trajetória z do movimento e a velocidade v_f é referenciada à trajetória "tortuosa" do movimento.

O raio capilar (R) está relacionado com o potencial matricial da água no solo (ψ), de acordo com a lei de Laplace:

$$R = - \frac{2\sigma \cos(\alpha_c)}{\rho_w g \psi} \quad (4)$$

sendo σ a tensão superficial na interface água-ar e α_c o ângulo de contato formado por esta interface com as partículas do solo.

É importante observar que a variável ω , conforme utilizada na equação 1, é uma medida da área perpendicular à direção macroscópica exposta pelos poros, ou seja, ω está relacionada com R_s , enquanto a medida do volume dos poros (V) relativa ao volume total de solos (V_T), denotada por ε e definida de maneira que $d\varepsilon = dV/V_T$, está relacionada com o raio perpendicular à trajetória tortuosa (R). A área total dos poros expostos, relativa à área total do corte perpendicular do solo, ou porosidade areal total (μ), pode ser obtida por:

$$\int_{\tilde{\Omega}_T} d\omega = \mu \quad (5)$$

na qual $\tilde{\Omega}_T$ representa o domínio areal total dos poros. O volume total dos poros relativo ao volume total do solo considerado, ou porosidade volumétrica total (ϕ), pode ser obtido com a seguinte integração:

$$\int_{\Omega_T} d\varepsilon = \phi \quad (6)$$

na qual Ω_T representa o domínio volumétrico total dos poros. Quando o meio poroso está totalmente preenchido com água, a porosidade volumétrica é igual à unidade volumétrica (θ).

É de interesse fundamental conhecer a dependência entre a condutividade hidráulica (K) e a unidade volumétrica (θ), a partir da relação $\theta(\psi)$. Para estabelecer a relação entre ambas as curvas, é necessário primeiramente determinar a relação entre os raios R e R_s , ou seja, deve-se encontrar a tortuosidade de cada capilar e a relação entre as porosidades ε e ω . Fuentes et al. (2001) basearam-se na idéia probabilística introduzida por Childs & Collis-George (1950) para encontrar esta relação, conforme descrito abaixo.

Fazendo um corte perpendicular à trajetória macroscópica do fluxo, obtêm-se dois planos, os quais incluem as seções S' e S'' (Figura 2). Os raios dos poros na seção S' são denotados por $\{r, r_s\}$ e os da face na seção S'' por $\{\xi, \xi_s\}$. Uma partícula de água situada em um poro do plano S' pode continuar sua trajetória pelo mesmo poro capilar ou trocar por outro poro de diferente tamanho. A modelagem destas possibilidades de troca pode ser feita com a introdução da probabilidade do encontro dos planos em uma seção intermediária virtual S^* .

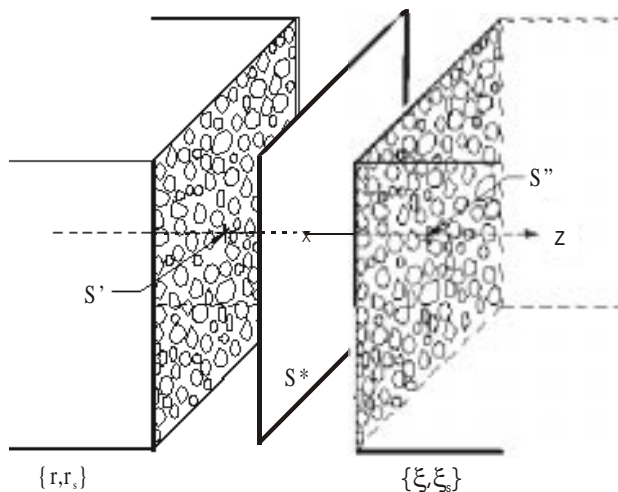


Figura 2. Um corte no solo perpendicular à direção macroscópica do fluxo. Os raios dos poros são caracterizados em cada face por $\{r, r_s\}$ e $\{\xi, \xi_s\}$.

Childs & Collis-George (1950) não fizeram distinção entre os raios R e R_s e consideraram que a função densidade da porosidade volumétrica $f(r)$ é a mesma nas duas seções e iguais à função densidade do fluxo areal em cada seção. A probabilidade do intervalo que contém r é precisamente igual à função de densidade do fluxo areal em cada seção. A probabilidade do intervalo que contém r sobre a outra seção é igual a $d\varepsilon(\xi) = f(\xi)d\xi$. A probabilidade de que os poros representados por estes intervalos encontrem-se de uma maneira completamente aleatória em uma seção S^* intermediária entre S' e S'' é o produto das duas probabilidades. O produto das áreas elementares $d\varepsilon(r)$ e $d\varepsilon(\xi)$ representa a área comum do fluxo: $d\omega(r, \xi) = d\varepsilon(r) d\varepsilon(\xi) = f(r)drf(\xi)d\xi$. A integração desta equação sobre toda a classe de raios de poros leva a: $\mu = \phi\phi = \phi^2$.

No modelo de Purcell (1949), o sistema está representado por capilares paralelos em que o fator de tortuosidade é independente do raio de poro e a partícula de água continua pelo mesmo poro, ou seja, trata-se de evento totalmente correlacionado. Neste caso, é fácil deduzir que a porosidade areal é igual a porosidade volumétrica: $d\omega(r) = d\varepsilon(r) = f(r)dr$ e em tal situação $\mu = \phi$.

Em termos probabilísticos, o modelo de Purcell representa uma correlação completa entre as duas seções, ao passo que o modelo de Childs & Collis-George representa uma decorrelação completa. Mualem & Dagan (1978) assinalaram que o modelo de Purcell para a estimativa da condutividade hidráulica pode ser formalmente deduzido do modelo de Childs & Collis-George, se a área comum do fluxo for redefinida como: $d\omega(r, \xi) = f(r)dr \delta(\xi - r)d\xi$, na qual δ é o delta de Dirac. É de se esperar que o comportamento real da água no solo possa ser descrito por um modelo intermediário entre aquele de Purcell e o de Childs & Collis-George, pois,

geralmente, o fluxo de água no solo não ocorre como em um sistema de capilares paralelos, tampouco é completamente aleatório, já que aparentemente existe uma estrutura hierarquizada no solo.

No presente trabalho, admite-se a hipótese de que o solo possa ser considerado um objeto fractal (Mandelbrot, 1983; Rieu & Sposito, 1991a,b; Oleschko et al., 1997; Fuentes et al., 1998, 2001), e demonstra-se então que este comportamento intermediário, e possivelmente mais realista, pode ser obtido. O fundamento básico para esta dedução é a relação entre a área e o volume de Mandelbrot.

Na geometria de Euclides, como a dimensão do volume (V) de um objeto é L^3 e de sua área é L^2 , tem-se que $V^{1/3}$ é proporcional a $A^{1/2}$. De acordo com Mandelbrot, na geometria fractal, $V^{1/3}$ é proporcional a $A^{1/D}$, sendo D a dimensão fractal do objeto. Esta proporção entre superfície e volume pode ser generalizada da seguinte maneira: $\text{sup}_E(F) \propto [\text{vol}_E(F)]^{D/E}$, na qual F é um objeto imerso em um espaço de dimensão euclidiana igual a E , e, para os solos como objetos reais, tem-se que $E = 3$.

Se $\phi_s = 1 - \phi$ representa o volume dos sólidos relativo ao volume total do solo, ou “solidosidade volumétrica”, então a área dos sólidos relativa à área total do solo, ou “solidosidade areal”, μ_s será igual a ϕ_s^s , com $s = D/E$. Segundo a idéia probabilística, sobre cada plano a fração da área poral será ϕ^s . A probabilidade total do encontro das seções em um ponto intermediário representa a fração da área disponível para o fluxo: $\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}$.

Posto que $\phi_s + \phi = 1$ e $\mu_s + \mu = 1$, estabelece-se a relação fundamental seguinte:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (7)$$

É importante observar que, para o desenvolvimento seguinte, a solidosidade areal e a porosidade areal são, respectivamente:

$$\mu_s = 1 - \mu = (1 - \phi)^s = \phi_s^s \quad (8)$$

$$\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s} \quad (9)$$

Quando os poros não se encontram totalmente cheios com água, a relação entre as porosidades (areal e volumétrica), definida pela equação 9, deve ser generalizada às porosidades parciais, a saber:

$$\omega = \varepsilon^{2s} \text{ com } 0 \leq \omega \leq \mu \text{ e } 0 \leq \varepsilon \leq \phi \quad (10)$$

No trabalho de Brooks & Corey (1964), argumenta-se experimentalmente que a curva de retenção da água no solo é bem representada pela função de potência $\theta(\psi) \propto 1/|\psi|^\lambda$, quando $|\psi| \gg 0$, na qual $\lambda > 0$ é uma potência chamada de “índice de poros”. Considerando a lei de Laplace, definida pela equação 4, deduz-se que $\varepsilon(R) \propto R^\lambda$ quando $R \rightarrow 0$. Definindo um tamanho de poro crítico (R_c) associado a uma pressão crítica no sentido de Brooks & Corey e à porosidade volumétrica total, pode-se escrever a

porosidade volumétrica parcial em função de R como $\varepsilon(R) = (R/R_0)^\lambda \phi$. Visto que R é o raio perpendicular à trajetória tortuosa e R_s é o raio perpendicular à trajetória retilínea em determinado ponto, é razoável supor que a contribuição relativa à porosidade volumétrica do primeiro seja a mesma contribuição relativa à porosidade areal do segundo. Em outras palavras, pode-se escrever $\omega(R_s) = (R_s/R_{s0})^\lambda \mu$, na qual o raio R_{s0} corresponde ao raio R_0 . Tendo em conta o anterior e as equações 9 e 10, obtém-se a relação seguinte entre R_s e R:

$$\frac{R_s}{R_{s0}} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2s} \quad (11)$$

A tortuosidade em função de cada raio de poro (R) resulta da comparação das equações 3 e 11:

$$T(R) = T_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^\delta \quad \text{com } 0 < \delta = 2s - 1 < 1 \quad (12)$$

sendo $T_0 = R_0/R_{s0}$.

Na abordagem fractal, a área elementar comum ao fluxo é expressa por:

$$d\omega(r_s, \xi_s) = d\varepsilon^s(r) d\varepsilon^s(\xi) \quad (13)$$

A equação 1, que define a condutividade hidráulica, toma então a seguinte forma:

$$\frac{K}{K_s} = \frac{\int [R_s(r_s, \xi_s)]^2 d\varepsilon^s(r) d\varepsilon^s(\xi)}{\int [R_s(r_s, \xi_s)]^2 d\varepsilon^s(r) d\varepsilon^s(\xi)} \quad (14)$$

na qual K_s é a condutividade hidráulica em meio saturado e o processo é suposto isotérmico (η e ρ_w constantes).

A maneira de calcular a distribuição bidimensional dos tamanhos de poro, R_s , a partir dos raios r_s e ξ_s , permite obter diversos modelos da condutividade hidráulica (Fuentes et al., 2001). O modelo aqui desenvolvido foi baseado na hipótese seguinte:

$$R_s = r_s^\alpha \xi_s^{1-\alpha} \quad (15)$$

sendo α um parâmetro de interpolação dependente das propriedades do solo. Em virtude da natureza simétrica de R_s em relação a r_s e ξ_s proporcionada por este modelo, é suficiente tomar o intervalo $1/2 \leq \alpha \leq 1$, verificando que $\alpha = 1/2$ corresponde ao modelo da média geométrica, e $\alpha = 1$ corresponde a um modelo de "poro neutro", ou seja, $R_s = r_s$.

Introduzindo a lei de Laplace (equação 4) e as equações 11 e 15 na equação 14, o modelo da condutividade hidráulica relativa correspondente é o seguinte:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \frac{\int_0^\theta \frac{\varepsilon^{s-1}}{|\psi|^{4s\alpha}} d\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{s-1}} \frac{\varepsilon^{s-1}}{|\psi|^{4s(1-\alpha)}} d\varepsilon}{\int_0^\theta \frac{\varepsilon^{s-1}}{|\psi|^{4s\alpha}} d\varepsilon \int_0^{\varepsilon^{s-1}} \frac{\varepsilon^{s-1}}{|\psi|^{4s(1-\alpha)}} d\varepsilon} \quad (16)$$

nele podendo ser incorporada a umidade volumétrica de água residual (θ_r), definida por Brooks & Corey (1964), de maneira que $K(\theta_r) = 0$, trocando θ por $\theta_{ef} = \theta - \theta_r$ e ϕ pela porosidade volumétrica efetiva $\phi_{ef} = \theta - \theta_r$. Em condições naturais de campo, a saturação completa raramente será alcançada, pois certa quantidade de ar restará presa nos poros do solo.

Um dos grupos mais abrangentes de modelos encontrados na literatura para o potencial (ψ) é o modelo em função de potência seguinte (Braddock et al., 2001):

$$\psi = \psi_d S_e^{-1/\lambda} \left(1 - S_e^{1/m} \right)^{1/n} \quad (17)$$

sendo S_e , o grau de saturação efetiva, definido por:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (18)$$

(ψ_d) é um valor característico da pressão; $m > 0$, $n > 0$ e $\lambda > 0$ são três parâmetros de forma e (θ_s) é a umidade volumétrica sob saturação natural.

Combinando as equações 16 e 17, adotando $\lambda = mn$, para reproduzir o modelo de van Genuchten, e perfazendo as integrações (Apêndice), chega-se ao modelo da Média Geométrica ($\alpha = 1/2$):

$$K(S_e) = K_s \left[1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right)^{1-2s/n} \right]^2, \quad n = \frac{2s}{1-sm} \quad (19)$$

e ao modelo do Poro Neutro ($\alpha = 1$):

$$K(S_e) = K_s S_e^s \left[1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right)^{1-4s/n} \right], \quad n = \frac{4s}{1-sm} \quad (20)$$

com a imposição de que $0 < sm < 1$ em ambos os modelos.

Para avaliar o desempenho dos modelos da Média Geométrica e do Poro Neutro, foram utilizados três critérios estatísticos diferentes: (a) a razão de desvios, RD; (b) a eficiência da modelagem, EM, e (c) o coeficiente de massa residual, CMR, calculados, respectivamente, por Willmott et al. (1985):

$$RD = \frac{\sum_{i=1}^N (M_i - \bar{M})^2}{\sum_{i=1}^N (P_i - \bar{M})^2} \quad (21)$$

$$EM = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (M_i - \bar{M})^2 - \sum_{i=1}^N (P_i - M_i)^2}{\sum_{i=1}^N (M_i - \bar{M})^2} \right] \quad (22)$$

$$CMR = \left[\frac{\sum_{i=1}^N M_i - \sum_{i=1}^N P_i}{\sum_{i=1}^N M_i} \right] \quad (23)$$

sendo P_i os valores das condutividades hidráulicas preditas pelos modelos; M_i e \bar{M} os valores experimentais e média dos valores das condutividades hidráulicas, respectivamente, e N o número de determinações.

A RD descreve a razão entre o espalhamento das determinações experimentais e o espalhamento dos valores calculados pelo modelo. A EM indica se o modelo fornece uma estimativa melhor das determinações experimentais do que o valor médio dessas determinações. Para RD e EM, o valor esperado tende a 1 (um), quando os valores experimentais e aqueles preditos pelo modelo são consistentes. O CMR indica se o modelo tende a superestimar (CMR < 0) ou a subestimar (CMR > 0) os valores determinados experimentalmente. Na ausência de desvios sistemáticos entre os valores preditos e experimentais, o valor esperado de CMR tende a zero.

VALIDAÇÃO DO MODELO

O modelo foi aplicado a dois solos: um Latossolo Vermelho-Amarelo e um Argissolo Amarelo. As características físico-hídricas destes solos foram obtidas em trabalhos anteriores, para o Latossolo Vermelho-Amarelo (Reichardt, 1988) e para o Argissolo Amarelo (Netto et al., 2000). No quadro 1, estão apresentados os valores de θ_s e K_s , e os valores de s , obtidos com a equação 7 assumindo $\phi = \theta_s$, para os dois solos.

Quadro 1. Valores de θ_s , K_s e s para o Latossolo Vermelho-Amarelo e para o Argissolo Amarelo

Solo	θ_s	K_s	s
	$m^3 \cdot m^{-3}$	$m \cdot s^{-1}$	
Latossolo Vermelho-Amarelo	0,385	$1,83 \cdot 10^{-5}$	0,6704
Argissolo Amarelo	0,240	$8,06 \cdot 10^{-5}$	0,6398

Quadro 2. Valores dos parâmetros θ_r , $|\psi_d|$ e m da curva de retenção para as diferentes relações entre m e n nas fórmulas algébricas da condutividade hidráulica e o coeficiente de determinação

Solo	θ_r	$ \psi_d $	m	R^2
	$m^3 \cdot m^{-3}$	m^{-1}		
		Modelo Média Geométrica ($\alpha = 1/2$)		
Latossolo Vermelho-Amarelo	0,0513	0,3405	0,2112	0,9984
Argissolo Amarelo	0,0000	0,10937	0,2521	0,9702
		Modelo Poro Neutro ($\alpha = 1$)		
Latossolo Vermelho-Amarelo	0,0438	0,2194	0,0910	0,9965
Argissolo Amarelo	0,0000	0,0800	0,1209	0,9836

Embora não se conheça a dependência do parâmetro (α) com respeito às propriedades dos solos, neste trabalho, será ilustrada a aplicação aos dois casos-limite ($\alpha = 1/2$ e $\alpha = 1$) que englobam, portanto, todos os valores deste parâmetro que apresentam significado físico. Em particular, utilizam-se a curva de retenção da água no solo, dada pela equação 17 com $\lambda = mn$, e as curvas de condutividade hidráulica, dadas pelas equações 19 e 20.

No quadro 2, estão mostrados os valores de θ_r , $|\psi_d|$ e m obtidos do ajuste da equação 17 aos dados experimentais, considerando as relações apropriadas entre m e n , conforme estabelecidas nas equações 19 e 20. Também mostra, por meio do coeficiente de determinação R^2 , a correlação entre os dados experimentais e a explicação proporcionada pelo modelo.

Na figura 3, estão apresentadas as curvas de retenção da água no solo observadas e ajustadas (equação 17) com a relação entre m e n obtida a partir dos modelos da Média Geométrica ($\alpha = 1/2$) (equação 19) e do Poro Neutro ($\alpha = 1$) (equação 20) para: (a) Latossolo Vermelho-Amarelo e (b) Argissolo Amarelo. Na figura 3, também estão apresentadas as comparações entre as curvas da condutividade hidráulica preditas pelos modelos e aquelas observadas para os dois solos.

Segundo Netto et al. (2000), os valores finais de $K(\theta)$ experimentais são afetados pelos erros inerentes à determinação das densidades de fluxos e dos gradientes de potencial. Conforme o método empregado para a determinação da condutividade hidráulica (Método do Perfil Instantâneo), Netto et al. (2000) destacaram que um erro de $\pm 50\%$ sobre o gradiente de potencial provoca um valor de condutividade hidráulica final multiplicado ou dividido por dois. Uma vez que o modelo versátil da condutividade hidráulica é baseado na geometria fractal e nas leis de Laplace e Poiseuille, a diferença encontrada nas curvas de condutividade hidráulica experimental e predita pelo modelo, principalmente para altos valores de umidade, ocorre provavelmente por erros inerentes na determinação experimental da condutividade hidráulica supradiscutidos.

A análise estatística entre os valores das condutividades hidráulicas, preditas pelos modelos da Média Geométrica e do Poro Neutro, e os valores experimentais estão apresentados no quadro 3. Observa-se que, para os dois modelos e em ambos os

solos, os valores de RD e EM estão próximos de um e os de CMR são positivos de baixo módulo, indicando que os modelos tendem a subestimar ligeiramente os valores experimentais. Globalmente, como mostra o resultado da análise estatística, não

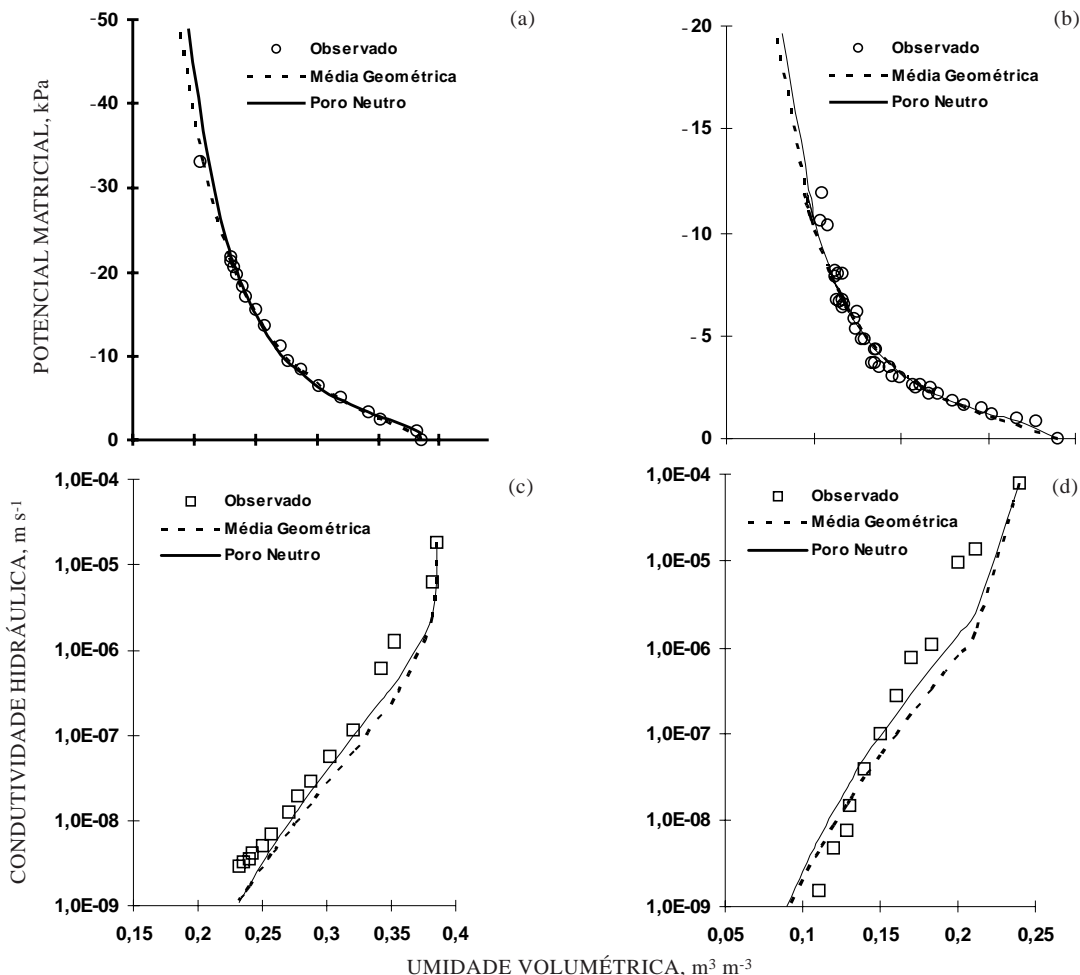


Figura 3. Curvas de retenção da água no solo observadas e ajustadas (equação 17) com a relação entre m e n obtida a partir dos modelos da Média Geométrica (equação 19) e do Poro Neutro (equação 20) para: (a) Latossolo Vermelho-Amarelo; (b) Argissolo Amarelo e curvas da condutividade hidráulica preditas pelos modelos para: (c) Latossolo Vermelho-Amarelo e (d) Argissolo Amarelo.

Quadro 3. Resultado da análise estatística entre os valores das condutividades hidráulicas preditas pelos modelos da Média Geométrica e do Poro Neutro e os valores experimentais para o Latossolo Vermelho-Amarelo e o Argissolo Amarelo

Modelo	RD	EM	CMR
Latossolo Vermelho-Amarelo			
Média Geométrica	1,055	0,949	0,205
Poro Neutro	1,057	0,952	0,193
Argissolo Amarelo			
Média Geométrica	0,985	0,963	0,210
Poro Neutro	0,989	0,968	0,191

RD: razão de desvios; EM: eficiência da modelagem e CMR: coeficiente de massa residual.

existem diferenças significativas na capacidade de descrever os dados experimentais, quando se usam as curvas de retenção da água no solo correspondentes às diferentes relações entre m e n introduzidas pelos modelos da Média Geométrica e do Poro Neutro.

CONCLUSÕES

1. A partir de um modelo conceitual baseado na geometria fractal e nas leis fundamentais de Laplace e Poiseuille, foi criado um modelo versátil para estimar a condutividade hidráulica em solos.

2. Embora este novo modelo tenha introduzido o parâmetro (α) a ser determinado, sua estreita faixa de valores (0,5 a 1) demonstrou ser possível a análise de uma ampla categoria de solos com boa representatividade. Evidentemente, o conhecimento preciso de (α) contribuirá para que as previsões sejam ainda mais confiáveis.

3. Comparando os resultados obtidos do modelo da condutividade e os da curva experimental da condutividade de dois solos: um Latossolo Vermelho-Amarelo e um Argissolo Amarelo, verificou-se que o modelo proposto mostrou-se simples em sua utilização, sendo capaz de prever satisfatoriamente a condutividade hidráulica dos solos não saturados.

LITERATURA CITADA

- ANGULO-JARAMILLO, R.; VANDERVAERE, J.P.; ROULIER, S.; THONY, J.L.; GAUDET, J.P. & VAUCLIN, M. Field measurement of soil surface hydraulic properties by disc and ring infiltrometers: a review and recent developments. *Soil Till. Res.*, 55:1-29, 2000.
- BEAR, J. Dynamics of fluids in porous media. New York, Dover Publications, 1972. 764p.
- BRADDOCK, R.D.; PARLANGE, J.-Y. & LEE, H. Application of a soil water hysteresis model to simple water retention curves. *Transp. Porous Media*, 44:407-420, 2001.
- BRAUD, I.; ANTONINO, A.C.D.; VAUCLIN, M.; THONY, L. & RUELLE, P. A simple soil plant atmosphere transport model (SISPAT) development and field verification. *J. Hydrol.*, 166:213-250, 1995.
- BROOKS, R.H. & COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Fort Collins, Colo. State University*, 1964. 27p.
- BURDINE, N.T. Relative permeability calculation from size distribution data. *Trans. AIME*, 198:71-78, 1953.
- CHILDS, E.C. & COLLIS-GEORGE, N. The permeability of porous materials. *Proc. Roy. Soc., Ser. A* 201:392-405, 1950.
- DULLIEN, F.A.L. Porous Media: Fluid transport and pore structure. New York, Academic Press, 1979. 306p.
- FALLEIROS, M.C.; PORTEZAN, O.; OLIVEIRA, J.C.M.; BACCHI, O.O.S. & REICHARDT, K. Spatial and temporal variability of soil hydraulic conductivity in relation to soil water distribution, using an exponential model. *Soil Till. Res.*, 45:279-285, 1998.
- FUENTES C. Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés. Université Joseph Fourier de Grenoble, France, 1992. 267p. (Tese de Doutorado)
- FUENTES, C.; VAUCLIN, M.; PARLANGE, J.-Y. & HAVERKAMP, R. Soil-water conductivity of a fractal soil. *En Fractals in Soil Science*, Boca Raton, CRC press, 1998. p.333-340.
- FUENTES, C.; BRAMBILA, F.; VAUCLIN, M.; PARLANGE, J.-Y. & HAVERKAMP, R. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ing. Hidráulica México*, 16:119-137, 2001.
- GUPTA, S.C. & LARSON, W.E. Estimating soil water retention characteristics from particle-size distribution, organic matter percent and bulk density. *Water Res. Res.*, 15:1633-1635, 1979.
- HAVERKAMP, R. & PARLANGE, J.-Y. Predicting the water-retention curve from particle-size distribution: I. Sandy soils without organic matter. *Soil Sci.*, 142:325-339, 1986.
- HILLEL, D.; KRENTOS, V.D. & STYLLIANOU, Y. Procedure and test of an internal drainage method for measuring hydraulic characteristics "in situ". *Soil Sci.*, 144:395-400, 1972.
- KLUTE, A. & DIRKSEN, C. Hydraulic conductivity and diffusivity: Laboratory methods. In: KLUTE A., ed., "Methods of soil analysis. Part 1: Physical and Mineralogical Methods." Madison, American Society of Agronomy, 1986.
- LIBARDI, P.L.; REICHARDT, K.; NILSEN, D.R. & BIGGAR, J.W. Simple field methods for estimating soil hydraulic conductivity. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44:3-7, 1980.
- MANDELBROT, B.B. The fractal geometry of nature. San Francisco. Freeman, 1983.
- MUALEM, Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Res. Res.*, 12:513-522, 1976.
- MUALEM, Y. & DAGAN, G. Hydraulic conductivity of soils: unified approach to the statistical models. *Soil Soil Sci. Soc. Am. J.*, 42:392-395, 1978.
- NETTO, A.M.; ANTONINO, A.C.D.; AUDRY, P.; CARNEIRO, C.J.G. & DALL'OLIO, A. Condutividade hidráulica não saturada de um Podzólico Amarelo da zona da mata Norte de Pernambuco. *Pesq. Agropec. Bras.*, 35:1221-1228, 2000.
- OLESCHKO, K.; FUENTES, C.; BRAMBILA, F. & ALVAREZ, R. Linear fractal analysis of three mexican soils in different management systems. *Soil Technol.*, 10:207-223, 1997.
- PURCELL, W.R. Capillary pressures – Their measurement using mercury and the calculation of permeability. *Trans. AIME*, 186:39, 1949.
- RAWLS, W.J. & BRAKENSIEK, D.L. Estimating soil water retention from soil properties. *Am. Soc. Civ. Eng.*, 108:167-171, 1981.

REICHARDT, K. Capacidade de campo. R. Bras. Ci. Solo, 12:211-216, 1988.

RIEU, M. & SPOSITO G. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory. Soil Sci. Soc. Am. J., 55:1231-1238, 1991a.

RIEU, M. & SPOSITO G. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: II. Applications. Soil Sci. Soc. Am. J., 55:1239-1244, 1991b.

SAXTON, K.E.; RAWLS, W.J.; ROMBERGER, J.S. & PAPENDICK, R.I. Estimating generalized soil water characteristics from texture. Soil Sci. Soc. Am. J., 50:1032-1036, 1986.

van GENUCHTEN, M.Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., 44:892-898, 1980.

van DAM, J.C.; STRICKER, J.N.M. & DROOGERS, P. Inverse method to determine soil hydraulic functions from multistep outflow experiments. Soil Sci. Soc. Am. J., 58:647-652, 1994.

WILLMOTT, C.J.; ACKLESON, S.G.; DAVIS, R.E.; FEDEMA, J.J.; KLINK, K.M.; LEGATES, D.R; O'CONNELL, J. & ROWE, C.M. Statistics for the evaluation and comparison of models. J. Geophys. Res., 90:8995-9005, 1985.

ZHANG, R. & van GENUCHTEN, M.Th. New models for unsaturated soil hydraulic properties. Soil Sci., 158:77-85, 1994.

$$\frac{(\theta_s)^s m}{|\psi_d|^{4su}} \int_0^z x^{sm+4su/n-1} (1-x)^{-4su/n} dx ; z = \left(\frac{\theta}{\theta_s} \right)^{1/m} = S_e^{1/m}$$

e para aquelas do denominador

$$\frac{(\theta_s)^s m}{|\psi_d|^{4su}} \int_0^1 x^{sm+4su/n-1} (1-x)^{-4su/n} dx$$

Reconhecem-se imediatamente estas integrais como a função beta incompleta:

$$\beta_I(z, p, q) = \int_0^z x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

e a função beta completa

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

na qual $\Gamma(\cdot)$ é a função gama de Euler. Estas funções convergem sempre que $p > 0$ e $q > 0$.

A equação 16 torna-se finalmente:

$$\frac{K(S_e)}{K_s} = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p'+q')}{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(p')\Gamma(q')} \beta_I(S_e^{1/m}, p, q) \beta_I(S_e^{1/m}, p', q')$$

com o seguinte conjunto de valores:

$$p = sm + \frac{4sa}{n}, \quad q = 1 - \frac{4sa}{n}, \quad p' = sm + \frac{4s(1-\alpha)}{n} \quad e \quad q' = 1 - \frac{4s(1-\alpha)}{n}$$

Daí, podem-se obter os dois casos limites:

a) Média Geométrica ($\alpha = 1/2$): $p = p' = sm + \frac{2s}{n}$ e $q = q' = 1 - \frac{2s}{n}$

b) Poro Neutro ($\alpha = 1$): $p = sm + \frac{4s}{n}$, $p' = sm$, $q = 1 - \frac{4s}{n}$ e $q' = 1$

Neste ponto, é necessário verificar as condições de convergência das soluções. Para um problema fisicamente bem posto (aquele em que $\mu \leq \phi$), é possível mostrar que o índice fractal s dado pela equação 7 apresenta solução única no intervalo $1/2 < s < 1$. Como os parâmetros de forma estão limitados a $m > 0$ e $n > 0$, segue-se então que:

a) Média Geométrica: $p > 0$, $p' > 0$, e, para se ter $q > 0$ e $q' > 0$, basta que $n > 2s$.

b) Poro Neutro: $p > 0$, $p' > 0$, $q' = 1 > 0$, e, para se ter $q > 0$, basta que $n > 4s$.

Nestas condições, a convergência estará assegurada. É interessante investigar as soluções para as quais a função beta apresenta uma forma analítica, sendo as mais simples aquelas para as quais $p = 1$.

a) Média Geométrica:

$$\frac{K(S_e)}{K_s} = \left[\frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1)\Gamma(q)} \beta_I(S_e^{1/m}, 1, q) \right]^2$$

APÊNDICE

As integrais na equação 16 são todas do tipo: $\int \frac{\varepsilon^{s-1} d\varepsilon}{|\psi|^{4su}}$, nas quais $u = \alpha$ ou $u = 1 - \alpha$. Os limites das integrais no numerador correspondem a $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon = \theta$. No denominador, o limite inferior é $\varepsilon = 0$ e o limite superior corresponde à porosidade total ϕ . Desprezando a pequena fração de ar presa nos poros, tem-se que $\varepsilon = \phi = \theta_s$.

Usando a relação entre a porosidade (ε) e o grau de saturação (S), $\varepsilon = \theta_s S$, e sem perda de generalidade (no texto estão indicadas as modificações para introduzir no modelo a umidade residual e obter os valores efetivos), resulta:

$$\frac{1}{|\psi_d|^{4su}} \int \frac{\varepsilon^{s-1} d\varepsilon}{\left(\frac{\varepsilon}{\theta_s} \right)^{-4su/mn} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\theta_s} \right)^{1/m} \right]^{4su/n}}$$

Fazendo a substituição: $\varepsilon = \theta_s x^m$ a integral simplifica-se em:

$$\frac{(\theta_s)^s m}{|\psi_d|^{4su}} \int x^{sm+4su/n-1} (1-x)^{-4su/n} dx$$

Logo obtêm-se, para as integrais do numerador:

$$\frac{K(S_e)}{K_s} = \left\{ \frac{q\Gamma(q)}{\Gamma(1)\Gamma(q)} \frac{1}{q} [1 - (1 - S_e^{1/m})]^q \right\}^2$$

$$K(S_e) = K_s \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^{1-2s/n} \right]^2 \quad \text{com } n = \frac{2s}{1-sm}$$

b) Poro Neutro:

$$\frac{K(S_e)}{K_s} = \frac{\Gamma(1+q)\Gamma(p'+1)}{\Gamma(1)\Gamma(q)\Gamma(p')\Gamma(1)} \beta_1(S_e^{1/m, 1, q}) \beta_1(S_e^{1/m, p', 1})$$

$$\frac{K(S_e)}{K_s} = \frac{q\Gamma(q)p'\Gamma(p')}{\Gamma(1)\Gamma(q)\Gamma(p')\Gamma(1)} \frac{1}{q} \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^q \right] \frac{1}{p'} \left(S_e^{1/m} \right)^{p'}$$

$$K(S_e) = K_s (S_e)^s \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^{1-4s/n} \right] \quad \text{com } n = \frac{4s}{1-sm}$$

Por outro lado, o fato de que $n > 0$, exige que $sm < 1$ em ambos os modelos, ou de forma equivalente, e já incorporando as outras restrições acima sobre n , chega-se a $0 < sm < 1$.