

Uma nota sobre o modelo Vives-Ye de competição espacial: Implementando *Open Insurance*

João Victor de Andrade 

Escola Brasileira de Economia e Finanças, Fundação Getúlio Vargas, Brasil

Este trabalho tem como objetivo descrever o comportamento de firmas seguradoras em um ambiente de *open insurance*. Para tanto, há a construção de um modelo no qual as empresas seguradoras se localizam nos extremos de um segmento de reta e desconhecem o tipo de cada um dos clientes sobre a reta. As empresas investem em *expertise* e dados para obterem um sinal que revela imprecisamente o tipo do cliente. Comparam-se os cenários em que os dados obtidos por cada empresa são compartilhados ou não entre elas (implementação do *open insurance*). Os resultados são um aumento na quantidade total de informação disponível para cada empresa, uma diminuição no preço dos seguros aos clientes e um aumento dos lucros das empresas, configurando uma melhora na *welfare* total.

Palavras-chave. Assimetria de informação, Hotelling, Mercado de seguros, *Open insurance*.

Classificação JEL. D82, D83, G22, L13.

1. Introdução e revisão de literatura

Falhas de mercado, como assimetria informacional, são frequentemente apresentadas como justificativa para intervenção de governos sobre mercados. No entanto, ocorrem situações em que a presença de oligopólios acaba contrabalanceando as perdas decorrentes da assimetria de informações. Yannelis e Zhang (2023) propõem um cenário no qual as firmas podem realizar investimento em *screening* de uma população com clientes inadimplentes, sendo que o custo do investimento independe do número de clientes atendidos. Quando a competição se intensifica, o *market share* de cada firma se reduz, o que se traduz em um menor investimento em *screening*, uma piora na qualidade média dos clientes atendidos, e, por fim, em taxas de juros maiores nos mercados mais arriscados para as perdas. Eis um exemplo (validado empiricamente pelos autores) no qual o raciocínio comum de que mais competição implica menor preço não se aplica. Assim, é interessante avaliar se uma eventual intervenção nestes mercados poderia trazer prejuízos ou ineficiências. Nos últimos anos, tem havido uma tendência de automatização e personalização de serviços com base em algoritmos de dados sobre os consumidores. *Open insurance* é, a grosso modo, a implementação do compartilhamento dos dados de pessoas físicas entre empresas do ramo de seguros, similarmente

João Victor de Andrade : jvictor.andrade.1995@gmail.com

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

ao que já ocorre entre bancos (*open banking*). Neste último cenário, por exemplo, o histórico de movimentações e pagamentos efetuados pelo cliente pode sinalizar a uma nova instituição uma reputação de bom pagador, possibilitando empréstimos a taxas menores e de maior montante. A novidade é a expansão para o mercado de seguros, em que os produtos podem ser mais específicos.

No Brasil, a implementação do *open insurance* será compulsória para os grandes bancos; não raramente, observam-se resultados contrários aos inicialmente pretendidos ou prejuízos em áreas que não são o foco da política, mas são afetadas por ela. Por outro lado, a implementação do PIX, também compulsória para os bancos, foi bem recebida pela população, sem nenhuma resistência aparente das grandes instituições financeiras. Cabem ressalvas: o PIX é relativamente simples, consistindo em transferências bancárias e saques, diferentemente do mercado de seguros. Além disso, uma eventual dificuldade de adesão expõe dois potenciais problemas: primeiro, é possível que a adesão seja baixa, não compensando o grande investimento da implementação; segundo, como em diversos cenários de assimetria informacional, não sinalizar também funciona como um sinal. Indivíduos fora do sistema poderiam ser prejudicados? [Crocker e Zhu \(2021\)](#) demonstram que realizar testes de modo a informar a seguradora sobre seu tipo é uma estratégia dominante para qualquer cliente.

Um dos primeiros trabalhos de competição de seguradoras sob seleção adversa é [Rothschild e Stiglitz \(1978\)](#). [Broecker \(1990\)](#) introduz a possibilidade de bancos serem capazes de mitigar assimetria informacional com testes, rejeitando os clientes com sinal ruim no teste. Conforme os bancos têm mais informação, a probabilidade de clientes rejeitados terem tipo ruim aumenta, o que implica maior poder de mercado para o banco mais informado. Na mesma linha argumentativa, [Hauswald e Marquez \(2003\)](#) apresenta um modelo consistindo em dois bancos realizando empréstimos, sendo que um tem maior precisão informacional que o outro. Uma das conclusões é que, com a disseminação de mais informação, bancos menos informados podem praticar *free riding*, reduzindo o lucro dos bancos mais informados e, por consequência, o nível ótimo de investimento em *screening* e a qualidade média dos clientes que participam das transações. Assim, é natural que essa piora seja uma preocupação na implementação do *open insurance*. Um trabalho mais recente é proposto por [Chu e Wei \(2021\)](#), com um modelo circular e em que a precisão do sinal que identifica o tipo do cliente diminui com a distância cliente-firma. A escolha dos autores por tal modelo se justifica pela introdução, ali, de uma *fintech* no centro do círculo, obtendo um valor constante para a precisão do sinal. É interessante a interpretação da distância como a “afinidade” entre os bancos e segmentos do mercado.

Em [Vives e Ye \(2021\)](#), desenha-se uma competição entre firmas sobre uma reta, na qual as firmas devem escolher seus investimentos de modo a diminuir o seu custo de monitoramento dos clientes que tomam empréstimos, seja pelo canal de redução do efeito da distância cliente-banco, seja pelo custo de se monitorar um cliente qualquer. Os autores observam que uma redução nos custos tecnológicos leva a um aumento do *welfare*, sem acirramento da competição entre as empresas. Ainda, propõem que um outro canal de avanço seja a redução do efeito da distância sobre a dificuldade em se monitorar os clientes; essa redução tornaria o mercado mais competitivo, podendo

haver reduções no *welfare* total, uma vez que os bancos entrariam em um dilema dos prisioneiros. Diferentemente de outros artigos, os autores assumem que os clientes que recebem o sinal ruim são excluídos do mercado.

O modelo consiste em uma extensão do modelo de Vives e Ye (2021). Comparam-se cenários com e sem *open insurance*, isto é, em que as firmas são obrigadas ou não a compartilhar entre si os dados obtidos (custosamente) a respeito de seus clientes. Há um *trade-off* inerente nessa dinâmica: participar da partilha aumenta a informação da empresa, mas, ao mesmo tempo, diminui sua vantagem comparativa por obrigá-la a divulgar sua informação privada. Verifica-se, sob as hipóteses do modelo, que a implementação do *open insurance* se traduz em preços mais baixos e lucros maiores para as empresas. O principal canal de eficiência é a repartição dos custos (convexos) de obtenção de informação por parte das seguradoras. O trabalho consiste nesta introdução, na apresentação do modelo, em uma seção de resultados, em uma discussão de extensões do modelo e em uma conclusão, além de contar com um apêndice matemático.

2. Apresentação do Modelo

Utiliza-se um modelo de Hotelling com duas empresas seguradoras fixas nas posições $\{0,1\}$ de uma reta. Há clientes dos tipos bom e ruim, com as respectivas probabilidades de sofrerem uma perda unitária: (π_G) e (π_B) , com $1 > \pi_B > \pi_G > 0$. Os clientes se distribuem uniformemente no segmento de reta entre as empresas e, invariavelmente, demandam uma unidade de seguro. A proporção de clientes bons (com probabilidade baixa de acidentes), λ , é conhecida.

Cada empresa i tem acesso a um sinal que retorna o tipo correto do cliente com precisão ϕ_i . O sinal depende de três fatores: o quanto a empresa está próxima do cliente (z , no caso da primeira empresa), o investimento da empresa em dados (h_i) e o investimento da empresa em *expertise* (s_i). O produto sh será denominado simplesmente “informação”.

$$\phi_i = P(s_{iz} = G | \pi(z) = \pi_G) = P(s_{iz} = B | \pi(z) = \pi_B)$$

Para a modelagem do sinal das empresas (sem o *open insurance*), utiliza-se a seguinte função:

$$\phi_1(z) = \frac{z + s_1 h_1}{2z + s_1 h_1}, \quad \phi_2(z) = \frac{(1-z) + s_2 h_2}{2(1-z) + s_2 h_2}$$

O uso da função se justifica pelas suas propriedades condizentes com a proposta do problema. São elas (para a empresa 1):

- $1/2 < \phi_1(z, s_1, h_1) < 1 \quad \forall z, s_1, h_1 > 0$: O sinal é informativo mas não permite ter certeza sobre o cliente.
- $\phi_1(z, s_1, 0) = \phi_1(z, 0, h_1) = 1/2$: Sem dados do cliente ou *expertise* da seguradora, o sinal não é informativo para cliente algum.
- $\partial \phi_1 / \partial z \leq 0$: A precisão do sinal piora conforme o cliente está mais distante da empresa.

- $\partial\phi_1/\partial(s_1h_1) > 0$: Mais informação leva sempre a mais precisão do sinal.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \phi_1(z, s_1, h_1) = 1 \quad \forall s_1, h_1 > 0$: Com alguma informação, os clientes mais próximos de cada seguradora são quase que totalmente “decifráveis”.
- $\lim_{(s_1h_1) \rightarrow +\infty} \phi_1(z, s_1, h_1) = 1 \quad \forall z$: Com eventual informação infinita, a precisão do sinal seria perfeita.

Com a implementação do *open insurance*, os dados disponíveis às empresas tornam-se um recurso comum, sendo o somatório da quantidade de dados obtida por cada empresa separadamente. Neste caso, tem-se

$$\phi_1(z) = \frac{z + s_1h_0}{2z + s_1h_0}, \quad \phi_2(z) = \frac{(1-z) + s_2h_0}{2(1-z) + s_2h_0}$$

Com $h_0 = h_1 + h_2$

A partir do resultado do sinal, as seguradoras restringem sua ação somente aos clientes que receberam sinal alto: cada empresa tem, agora, uma proporção λ_i de clientes de tipo bom (probabilidade baixa, π_G) de sofrer acidentes.

$$P(\pi(z) = \pi_G | s_{iz} = G) = \lambda_i = \frac{\lambda \phi_i}{\lambda \phi_i + (1-\lambda)(1-\phi_i)}$$

Uma vez escolhidos os níveis de investimento em *expertise* e dados, as empresas praticam competição de Bertrand em cada ponto, de modo que a empresa menos informada incorre em lucro esperado zero. O problema das empresas consiste, então, em escolher as quantidades de s_i e h_i de modo a maximizar seu lucro esperado. Os custos dos investimentos para as seguradoras são quadráticos, da forma $c(s_i) = p_s s_i^2$ e $c(h_i) = p_h h_i^2$. A hipótese de custos quadráticos garante que o modelo terá solução interior.

3. Resolução e resultados

3.1 Caso sem *open insurance*

A taxa de *break-even* da empresa (i) menos informada, em um ponto z , é dada por

$$P(z) = \lambda_i(z)\pi_G + (1 - \lambda_i(z))\pi_B$$

Seja \hat{z} o ponto em que as empresas têm a mesma precisão no sinal.

$$\phi_1(\hat{z}) = \phi_2(\hat{z}) \rightarrow \hat{z}(s_1, h_1, s_2, h_2) = \frac{s_1 h_1}{s_1 h_1 + s_2 h_2}$$

Cada empresa escolhe as quantidades de s_i e h_i de modo a maximizar seu lucro esperado ao longo da reta. No caso da empresa 1 (simétrico para a empresa 2), tem-se o seguinte problema:

$$\max_{h_1, s_1} \int_0^{\hat{z}} [P(z) - \lambda_1(z)\pi_G - (1 - \lambda_1(z))\pi_B] dz - p_h h_1^2 - p_s s_1^2$$

Uma das equações que emergem como resposta é a seguinte:

$$f(s^*h^*) = \ln\left(1 + \frac{1}{2\lambda s^*h^*}\right) - \left(\frac{1}{2\lambda s^*h^* + 1}\right) = \frac{2\sqrt{p_s p_h}}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)}$$

Resultado 3.a: A quantidade total de informação de cada empresa diminui e os preços ao cliente aumentam com o aumento dos custos de obtenção:

$$\frac{\partial(sh)}{\partial p_s} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial(sh)}{\partial p_h} < 0 \quad \implies \quad \frac{\partial P}{\partial p_s} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial p_h} > 0.$$

A interpretação deste resultado é direta: um aumento nos custos de obtenção de informação diminui o nível ótimo de investimentos das seguradoras, uma vez que seu retorno marginal é decrescente. Os menores investimentos em informação se traduzem, por sua vez, em preços maiores para os clientes que compram o seguro. Ainda, a mudança no preço de um dos tipos de informação diminui o seu respectivo investimento e tem efeito ambíguo sobre o outro; os efeitos, quando combinados, reduzem o valor do produto sh .

Resultado 3.b: A quantidade de informação obtida por cada empresa aumenta com a diferença entre as probabilidades de acidente dos clientes de tipo ruim e dos clientes de tipo bom:

$$\frac{\partial(sh)}{\partial(\pi_B - \pi_G)} > 0.$$

A interpretação também é razoavelmente direta: quanto maior a diferença entre os clientes de tipos bom e ruim, maior é o incentivo à seguradora investir em informação para separar os clientes. No entanto, como o preço os clientes depende diretamente das suas próprias probabilidades de perda, o efeito sobre o preço final é ambíguo. Por exemplo, se as probabilidades de acidente diminuem igualmente, a quantidade de informação adquirida por cada empresa não muda, mas os preços ao cliente diminuem.

Resultado 3.c: A mudança na proporção de clientes do tipo bom tem efeito ambíguo sobre o investimento em informação por parte das seguradoras: $\partial(sh)/\partial\lambda$ não tem sinal definido.

O aumento de λ possui dois efeitos distintos: primeiramente, uma proporção de bons clientes na população já aumenta o retorno médio independentemente do sinal, o que diminui sua relevância. O segundo efeito se deve à incerteza: enquanto $\lambda < 0.5$, o aumento de λ representa um aumento da variância da distribuição, o que traz relevância ao sinal e faz aumentar os investimentos em informação da empresa. A partir de 0.5, o contrário acontece. Os dois efeitos podem ser observados, separadamente, em cada lado da última equação do item 3.1.

Por fim, para cada combinação de valores das demais variáveis exógenas, existe um *cutoff* $\tilde{\lambda}$ a partir do qual o efeito negativo de λ sobre sh prevalece. Ainda assim, o efeito no caso geral sobre os investimentos e sobre os preços é ambíguo.

3.2 Caso com open insurance

Nesta segunda abordagem, introduz-se o sistema de *open insurance*: as seguradoras são obrigadas a compartilhar entre si os dados obtidos a respeito de seus clientes, de modo que eles passam a constituir um recurso comum a elas. Matematicamente, isso se dá da seguinte forma:

$$\phi_1(z) = \frac{z + s_1 h_O}{2z + s_1 h_O}, \quad \phi_2(z) = \frac{(1-z) + s_2 h_O}{2(1-z) + s_2 h_O}$$

Com $h_O = h_1 + h_2$. Dadas essas modificações, o problema de maximização segue análogo.

$$f(s^{**}h_O) = \ln \left(1 + \frac{1}{2\lambda s^{**}h_O} \right) - \left(\frac{1}{2\lambda s^{**}h_O + 1} \right) = \frac{\sqrt{2p_s p_h}}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)}$$

Verifica-se que a forma funcional da resposta ao problema de maximização é praticamente idêntica ao do cenário sem *open insurance*, havendo mudança apenas nos parâmetros envolvidos. Assim, os resultados **3.a**, **3.b** e **3.c** também se aplicam ao caso com *open insurance*.

4. Estática comparativa

Parte-se agora para as discussões de estática comparativa. Visando primordialmente responder aos questionamentos postos no início do trabalho, a variável de interesse para a estática comparativa é sh . Comparam-se os cenários com e sem *open insurance*, assumindo-se fixas as variáveis exógenas. As demonstrações matemáticas são realizadas no apêndice, ao fim do trabalho.

Resultado 4.a: A quantidade de informação disponível para cada empresa aumenta com a implementação do sistema de *open insurance*: $s^*h^* < s^{**}h_O$.

Com a implementação do sistema, cada seguradora conta, agora, com os próprios dados e os da sua concorrente. Mesmo que se diminua o incentivo, isoladamente, dos investimentos em informação, o ganho com o compartilhamento mais que compensa as reduções nas quantidades de cada empresa. Assim, o sinal é mais forte, para cada empresa, em todos os pontos da reta.

Resultado 4.b: Os preços ao cliente são menores com a implementação do sistema de *open insurance*: $P(s^*h^*) > P(s^{**}h_O)$.

O preço praticado em cada ponto é o que entrega lucro esperado zero à empresa menos informada. Com a maior disponibilidade de informação para as empresas, fortalece-se o sinal e reduz-se a incerteza sobre o tipo do cliente (uma vez que os clientes selecionados com sinal bom têm, agora, maior probabilidade de, efetivamente, apresentarem tipo bom), o que permite que o preço se aproxime mais de π_G e, portanto, diminua.

Resultado 4.c: Os lucros das firmas aumentam com a implementação do sistema de *open insurance*: $\Pi_O(s^{**}h_O) > \Pi(s^*h^*)$.

Esta afirmação não decorre puramente da argumentação qualitativa. Existem dois efeitos contrários que afetam o lucro das firmas seguradoras quando se implementa o *open*

insurance: ao mesmo tempo em que suas receitas diminuem (uma vez que o preço ao cliente diminui), seus custos envolvidos na obtenção de informação também são reduzidos. A confirmação de que o saldo final é positivo para as firmas exige a análise da forma funcional do lucro, feita no apêndice matemático.

5. Resultados e discussões

No cenário proposto, a implantação do sistema de *open insurance* se traduz em uma redução de preço aos consumidores a partir do momento em que as firmas passam a compartilhar dados sobre seus clientes. O investimento em *expertise* se torna proporcionalmente mais vantajoso do que o investimento em dados, que passam a configurar um recurso comum para as firmas. O aumento dos preços dos insumos tecnológicos se traduz em aumento do preço aos clientes. Variáveis como o tipo dos clientes e a sua distribuição também afetam os preços finais, mas de maneira ambígua.

Uma característica peculiar do modelo é o uso de apenas duas firmas seguradoras competindo pelos clientes. Uma possível extensão para o modelo é ampliar o número de firmas envolvidas. Numa eventual análise com mais firmas, também pode-se considerar a possibilidade de *overlap* informacional, isto é, de que os dados obtidos por uma seguradora sejam, em parte, os mesmos que os obtidos pela outra, de modo que a quantidade de informação agregada seja menor do que o somatório dos dois conjuntos. Um exemplo para essa abordagem seria assumir que $h_O = (\sum_{i=1}^n h_i)^{1/n}$. Neste caso, conforme $n \rightarrow \infty$, $h_O \rightarrow \max\{h_i\}$ (o *overlap* é total), enquanto $n = 1$ não apresenta *overlap*. Notadamente, a matemática envolvida na resolução das maximizações se torna rapidamente um problema.

Além disso, pode-se relaxar as hipóteses de que as seguradoras são idênticas, adotando-se diferentes expressões para ϕ_i , ou de que elas possuem o mesmo poder de mercado, movendo-as de suas posições iniciais em 0 e 1. Tais alterações aumentariam o grau de complexidade do modelo, uma vez que as simetrias entre as empresas são parte importante da argumentação matemática.

Pode-se, também, discutir os tipos e o comportamento dos clientes, assumindo-se uma demanda responsiva ao preço dos seguros ou mais de dois tipos de cliente. Por fim, uma limitação do modelo é o seu caráter estático. Supondo que os investimentos das empresas em capital, seja humano, na capacitação dos seus empregados ou físico, em computadores ou tecnologias como softwares acabem configurando *sunken costs*, eles não podem ser vistos simplesmente como uma realocação entre os cenários com *open insurance* e sem *open insurance*. A comparação entre os equilíbrios nada diz sobre os eventuais custos da transição entre eles. Embora o cenário com *open insurance* se mostre benéfico para as empresas, restaria ver se, em um cenário sem a sua implantação compulsória, o *open insurance* não se configuraria como um dilema dos prisioneiros, em que os agentes não têm a garantia da cooperação do outro e que, portanto, o resultado eficiente não é alcançado.

Apêndice A: Resolução do problema da firma

Primeiramente,

$$\begin{aligned}\lambda_1(z) &= \frac{\lambda \phi_1}{\lambda \phi_1 + (1-\lambda)(1-\phi_1)} = \frac{\lambda \frac{z+s_1 h_1}{2z+s_1 h_1}}{\lambda \frac{z+s_1 h_1}{2z+s_1 h_1} + (1-\lambda) \frac{z}{2z+s_1 h_1}} \\ &= \frac{\lambda \frac{z+s_1 h_1}{2z+s_1 h_1}}{\lambda \frac{s_1 h_1}{2z+s_1 h_1} + \frac{z}{2z+s_1 h_1}} = \frac{\lambda z + \lambda s_1 h_1}{z + \lambda s_1 h_1}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\lambda_2(z) = \frac{\lambda(1-z) + \lambda s_2 h_2}{(1-z) + \lambda s_2 h_2}.$$

O problema da firma é:

$$\max_{h_1, s_1} \int_0^{\hat{z}} [P(z) - \lambda_1(z)\pi_G - (1-\lambda_1(z))\pi_B] dz - p_h h_1^2 - p_s s_1^2$$

$$\begin{aligned}& \int_0^{\hat{z}} [P(z) - \lambda_1(z)\pi_G - (1-\lambda_1(z))\pi_B] dz \\ &= \int_0^{\hat{z}} \{ \lambda_2(z)\pi_G + (1-\lambda_2(z))\pi_B - [\lambda_1(z)\pi_G + (1-\lambda_1(z))\pi_B] \} dz \\ &= (\pi_B - \pi_G) \int_0^{\hat{z}} [\lambda_1(z) - \lambda_2(z)] dz = (\pi_B - \pi_G) \left[\int_0^{\hat{z}} \frac{\lambda z + \lambda s_1 h_1}{z + \lambda s_1 h_1} dz - \int_0^{\hat{z}} \frac{\lambda(1-z) + \lambda s_2 h_2}{(1-z) + \lambda s_2 h_2} \right] \\ &= (\pi_B - \pi_G) \lambda (1-\lambda) \left[s_1 h_1 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda(s_1 h_1 + s_2 h_2)} \right) - s_2 h_2 \ln \left(\frac{1 + \lambda s_2 h_2}{1 - \frac{s_1 h_1}{s_1 h_1 + s_2 h_2} + \lambda s_2 h_2} \right) \right] \\ &= (\pi_B - \pi_G) \lambda (1-\lambda) F(s_1, h_1, s_2, h_2).\end{aligned}$$

Chamemos o termo dentro dos colchetes de $F(s_1, h_1, s_2, h_2)$. Sejam $s_1 h_1 = x_1$ e $s_2 h_2 = x_2$. Definem-se F_α e F_β da seguinte forma:

$$F_\alpha = x_1 [\ln(\lambda x_1 + \lambda x_2 + 1) - \ln(\lambda x_1 + \lambda x_2)] \quad \text{e} \quad F_\beta = -x_2 \ln \left(\frac{1 + \lambda x_2}{1 - \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \lambda x_2} \right).$$

Tomando-se uma das CPOs do problema, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{2h_1 p_h}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)} &= \frac{\partial F}{\partial h_1} = \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial F_\beta}{\partial x_1} \right) \frac{dx_1}{dh_1} \\ \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_1} &= \frac{\partial x_1 [\ln(\lambda x_1 + \lambda x_2 + 1) - \ln(\lambda x_1 + \lambda x_2)]}{\partial x_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda(s_1 h_1 + s_2 h_2)} \right) + x_1 \left(\frac{\lambda}{\lambda x_1 + \lambda x_2 + 1} - \frac{\lambda}{\lambda x_1 + \lambda x_2} \right) \\
 &\quad \partial \left[-x_2 \ln \left(\frac{1 + \lambda x_2}{1 - \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \lambda x_2} \right) \right] \\
 \frac{\partial F_\beta}{\partial x_1} &= \frac{\partial \ln \left(\frac{1}{x_1 + x_2} + \lambda \right)}{\partial x_1} = x_2 \left(\frac{\lambda}{\lambda x_1 + \lambda x_2 + 1} - \frac{\lambda}{\lambda x_1 + \lambda x_2} \right) \\
 \frac{dx_1}{dh_1} &= s_1 \\
 \frac{\partial F}{\partial h_1} &= s_1 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{\lambda(s_1 h_1 + s_2 h_2)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (s_1 h_1 + s_2 h_2) \left(\frac{\lambda}{\lambda s_1 h_1 + \lambda s_2 h_2 + 1} - \frac{\lambda}{\lambda s_1 h_1 + \lambda s_2 h_2} \right) \right] \\
 &= \frac{2h_1 p_h}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)}
 \end{aligned}$$

Por simetria, nas CPOs, $h_1 = h_2 = h^*$ e $s_1 = s_2 = s^*$. Assim,

$$s^* \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2\lambda s^* h^*} \right) - \left(\frac{1}{2\lambda s^* h^* + 1} \right) \right] = \frac{2h^* p_h}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)}$$

Analogamente,

$$h^* \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2\lambda s^* h^*} \right) - \left(\frac{1}{2\lambda s^* h^* + 1} \right) \right] = \frac{2s^* p_s}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)}$$

Dividindo-se uma equação pela outra, tem-se:

$$\sqrt{p_s s^*} = \sqrt{p_h h^*}$$

Substituindo-se essa relação em uma das CPOs, tem-se:

$$\ln \left(1 + \frac{1}{2\lambda s^* h^*} \right) - \left(\frac{1}{2\lambda s^* h^* + 1} \right) = \frac{2\sqrt{p_s p_h}}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)}$$

No caso de *open insurance*, tem-se

$$\int_0^{\hat{z}} (\lambda_1 - \lambda_2) = \int_0^{\hat{z}} \frac{\lambda z + \lambda s_1 h_0}{z + \lambda s_1 h_0} dz - \int_0^{\hat{z}} \frac{\lambda(1-z) + \lambda s_2 h_0}{(1-z) + \lambda s_2 h_0} dz = \lambda(1-\lambda)F_0$$

$$\text{Com } F_0 = s_1 h_0 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda(s_1 h_0 + s_2 h_0)} \right) - s_2 h_0 \ln \left(\frac{1 + \lambda s_2 h_0}{1 - \frac{s_1 h_0}{s_1 h_0 + s_2 h_0} + \lambda s_2 h_0} \right)$$

Comparando com o caso anterior:

$$F = \left[s_1 h_1 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda (s_1 h_1 + s_2 h_2)} \right) - s_2 h_2 \ln \left(\frac{1 + \lambda s_2 h_2}{1 - \frac{s_1 h_1}{s_1 h_1 + s_2 h_2} + \lambda s_2 h_2} \right) \right]$$

A forte semelhança entre as equações facilita o trabalho: para derivar em relação a s , basta substituir h_1 e h_2 por h_O na expressão final. Para derivar em relação a h_O , basta substituir s_1 por $(s_1 + s_2)$ e s_2 por 0. As novas CPOs são:

$$s_1 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{\lambda (s_1 + s_2) h_O} \right) - \frac{1}{\lambda (s_1 + s_2) h_O + 1} \right] = \frac{2h_1 p_h}{\lambda (1 - \lambda) (\pi_B - \pi_G)}$$

$$h_O \left[\ln \left(1 + \frac{1}{\lambda (s_1 + s_2) h_O} \right) - \frac{1}{\lambda (s_1 + s_2) h_O + 1} \right] = \frac{2s_1 p_s}{\lambda (1 - \lambda) (\pi_B - \pi_G)}$$

Agora, $h_1 = h_2 = h^{**} = h_O/2$ e $s_1 = s_2 = s^{**}$:

$$s^{**} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{4\lambda s^{**} h^{**}} \right) + \left(\frac{-1}{4\lambda s^{**} h^{**} + 1} \right) \right] = \frac{2h^{**} p_h}{\lambda (1 - \lambda) (\pi_B - \pi_G)}$$

$$2h^{**} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{4\lambda s^{**} h^{**}} \right) + \left(\frac{-1}{4\lambda s^{**} h^{**} + 1} \right) \right] = \frac{2s^{**} p_s}{\lambda (1 - \lambda) (\pi_B - \pi_G)}$$

Novamente, dividem-se as equações e são feitas as substituições nas CPOs:

Rearranjando, tem-se:

$$\sqrt{p_s s^{**}} = \sqrt{2p_h h^{**}}$$

Uma das equações que emergem como resposta é a seguinte (em que $2h^{**} = h_O$):

$$\ln \left(1 + \frac{1}{2\lambda s^{**} h_O} \right) - \left(\frac{1}{2\lambda s^{**} h_O + 1} \right) = \frac{\sqrt{2p_s p_h}}{\lambda (1 - \lambda) (\pi_B - \pi_G)}$$

Apêndice B: Cálculos de estática comparativa

Tome-se uma função $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{ax} \right) - \left(\frac{1}{ax + 1} \right)$$

Primeiramente, ela é contínua em $x \in (0, +\infty)$. Em segundo lugar,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Logo, garante-se solução para $f(x) = k \quad \forall k > 0$. Além disso, a função é estritamente decrescente neste intervalo, logo

$$f(s^{**} h_O) < f(s^* h^*) \Rightarrow s^* h^* < s^{**} h_O$$

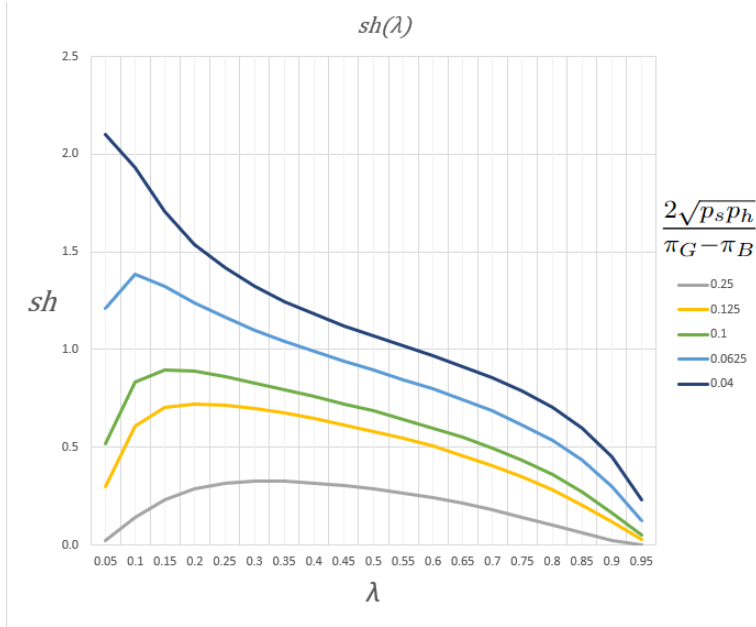


Figura B.1.

Por raciocínio análogo, aumentos em a enquanto se mantém k fixo (e vice-versa) resultam na diminuição de x . Esta argumentação é a base para os resultados da seção 3.

Especificamente sobre λ , a solução analítica da derivada parcial não adiciona informações. Assim, foram feitos cálculos computacionais para comprovar matematicamente a argumentação econômica do Resultado 3.c. O gráfico abaixo ilustra $s^*h^*(\lambda)$, para alguns valores da fração $2\sqrt{p_s p_h}(\pi_G - \pi_B)$.

Sobre a seção 4: o argumento do resultado 4.a, do qual decorrem os demais, já foi demonstrado anteriormente ($s^*h^* < s^{**}h_O$). O argumento do resultado 4.b decorre da seguinte relação:

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_1} < 0, \frac{\partial \lambda_1}{\partial \phi_1} > 0 \text{ e } \frac{\partial \phi_1}{\partial (sh)} > 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial (sh)} < 0$$

$$s^*h^* < s^{**}h_O \Rightarrow P(s^*h^*) > P(s^{**}h_O)$$

Agora, a demonstração do resultado 4.c. No cenário sem *open insurance*, os lucros (idênticos) das empresas são dados por:

$$\begin{aligned} \Pi(s^*h^*) &= \int_0^z [\lambda_2(z)\pi_G + (1 - \lambda_2(z))\pi_B - \lambda_1(z)\pi_G + (1 - \lambda_1(z))\pi_B] dz - p_h h_1^2 - p_s s_1^2 \\ &= \lambda(1 - \lambda)(\pi_B - \pi_G)s^*h^* \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2\lambda s^*h^*} \right) - \ln \left(\frac{1 + \lambda s^*h^*}{0.5 + \lambda s^*h^*} \right) \right] - p_h h^{*2} - p_s s^{*2} \end{aligned}$$

Utilizando-se $\sqrt{p_s s^*} = \sqrt{p_h h^*}$ e a última equação do item 3.2, tem-se:

$$\Pi(s^*h^*) = -2\sqrt{p_h p_s} s^*h^*$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)s^*h^* \left[\frac{2\sqrt{p_h p_s}}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)} + \frac{1}{2\lambda s^* h^* + 1} - \ln \left(1 + \frac{1}{1 + 2\lambda s^* h^*} \right) \right] \\
\Pi(s^*h^*) & = \lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)s^*h^* \left[\frac{1}{1 + 2\lambda s^* h^*} - \ln \left(1 + \frac{1}{1 + 2\lambda s^* h^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

No cenário com *open insurance*, analogamente:

$$\begin{aligned}
\Pi_O(s^{**}h_O) & = -(p_h h^{**2} + p_s s^{**2}) \\
& + \lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)s^{**}h_O \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2\lambda s^{**}h_O} \right) - \ln \left(\frac{1 + \lambda s^{**}h_O}{0.5 + \lambda s^{**}h_O} \right) \right] \\
\Pi_O(s^{**}h_O) & = -\frac{3}{4}\sqrt{2p_h p_s} s^{**}h_O \\
& + \lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)s^{**}h_O \left[\frac{\sqrt{2p_h p_s}}{\lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)} + \frac{1}{2\lambda s^{**}h_O + 1} - \ln \left(1 + \frac{1}{1 + 2\lambda s^{**}h_O} \right) \right] \\
\Pi_O(s^{**}h_O) & = \frac{\sqrt{2p_s p_h} s^{**}h_O}{4} \\
& + \lambda(1-\lambda)(\pi_B - \pi_G)s^{**}h_O \left[\frac{1}{1 + 2\lambda s^{**}h_O} - \ln \left(1 + \frac{1}{1 + 2\lambda s^{**}h_O} \right) \right]
\end{aligned}$$

Comparando-se as funções e utilizando-se o resultado **4.a**, verifica-se:

$$\Pi_O(s^{**}h_O) > \Pi(s^*h^*)$$

Ou seja, os lucros das empresas aumentam sob o sistema de *open insurance*.

Referências Bibliográficas

- Broecker, Thorsten (1990): “[Credit-worthiness tests and interbank competition](#),” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 429–452. [2]
- Chu, Yinxiao e Jianxing Wei (2021): “[Fintech entry and credit market competition](#),” *Available at SSRN 3827598*. [2]
- Crocker, Keith J e Nan Zhu (2021): “[The efficiency of voluntary risk classification in insurance markets](#),” *Journal of Risk and Insurance*, 88 (2), 325–350. [2]
- Hauswald, Robert e Robert Marquez (2003): “[Information technology and financial services competition](#),” *The Review of Financial Studies*, 16 (28), 921–948. [2]
- Rothschild, Michael e Joseph Stiglitz (1978): “Equilibrium in competitive insurance markets: An essay on the economics of imperfect information,” in *Uncertainty in Economics*, Elsevier, 257–280. [2]
- Vives, Xavier e Zhiqiang Ye (2021): “[Information technology and bank competition](#),” Working Paper 3863988, IESE Business School. [2, 3]
- Yannelis, Constantine e Anthony Lee Zhang (2023): “[Competition and selection in credit markets](#),” 150 (2). [1]