

Uma representação do fluxo sanguíneo pulsátil em artérias ou veias usando *lattice* Boltzmann

(A representation of pulsatile blood flow in arteries or veins using lattice Boltzmann)

Marina Vargas¹, Marco André Argenta

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Departamento de Construção Civil,
Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Recebido em 24/4/2015; Aceito em 10/6/2015; Publicado em 12/12/2015

O método *lattice* Boltzmann (LBM) foi proposto na década de 1980, fundamentado num modelo de *lattice gas* com a discretização da equação de transporte de Boltzmann. Esse método tem sido utilizado para retratar o fluxo sanguíneo pela possibilidade de simular computacionalmente a dinâmica de fluidos regida pelas equações de Navier-Stokes, conseguindo representar desde geometrias complexas até fluxos turbulentos e multifásicos. Com a necessidade de criar bons modelos físicos e matemáticos para representar o sistema cardiovascular humano (HCVS) é preciso utilizar teorias que analisem as leis físicas que regem o fluxo sanguíneo através de veias ou artérias do corpo humano. O objetivo deste trabalho é apresentar todo o processo de construção de um modelo idealizado para representar o fluxo sanguíneo em artérias, considerando um fluido newtoniano, viscoso, em regime laminar e pulsátil. A pulsação é definida conforme disposto por Womersley em seu artigo publicado em 1955 e posteriormente reproduzido com a utilização de diversos métodos numéricos por outros autores. Uma aplicação representativa de um trecho da artéria femoral ilustra o procedimento e os resultados são comparados com a literatura médica. Julgou-se que o modelo proposto para o fluxo pulsátil de um escoamento sanguíneo idealizado gerou resultados satisfatórios sob o ponto de vista qualitativo.

Palavras-chave: método de *lattice* Boltzmann, fluxo pulsátil, womersley, sangue, artérias.

The *lattice* Boltzmann method (LBM) was proposed in the 1980s, on the basis of a *lattice gas* and the discretization of the Boltzmann transport equation. It has been used to represent the blood flow due to its ability to simulate computational fluid dynamics governed by the Navier-Stokes equations and to represent complex geometries and multiphase turbulent flows. With the need to create good physical and mathematical models to represent the human cardiovascular system (HCVS), one must know the physical laws governing the flow of blood through the veins or arteries of the human body. The objective of this paper is to present the entire process of building an idealized model to represent the blood flow in arteries, considering a Newtonian, viscous, laminar and pulsatile fluid. The pulse is defined as suggested by Womersley in his article of 1955 and subsequently reproduced using various numerical methods by other authors. A representative application to a portion of the femoral artery illustrates the procedure, and the results are compared with the medical literature. The proposed model for the idealized pulsatile blood flow generated satisfactory results from a qualitative point of view.

Keywords: *lattice* Boltzmann method, pulsatile flow, blood, arteries.

1. Introdução

Há alguns anos estuda-se o escoamento de fluidos incompressíveis, newtonianos e viscosos para a aplicação direta na modelagem do fluxo sanguíneo em artérias do corpo humano [1–3]. Em um escoamento incompressível a ação da compressão pode ser desprezada, ou seja, a densidade do fluido é considerada constante com o passar do tempo. A variação na pressão sanguínea não produz deformação por compressão no fluido, mas

provoca uma deformação da artéria [4]. Dessa forma, em condições normais, a variação da densidade do sangue, que pode acontecer devido a uma variação de pressão, pode ser desprezada e o sangue pode ser modelado como um fluido incompressível. Já, um fluido newtoniano é aquele onde a relação entre a tensão cisalhante e a taxa de deformação do fluido apresenta-se de forma linear. Segundo Feijóo [4], uma característica do sangue é a de se deformar de maneira contínua quando submetido à ação de uma tensão cisalhante. A consi-

¹E-mail: marina.vargas@gmail.com.

deração da viscosidade é feita para avaliar a resistência ao cisalhamento desse fluido e, dessa forma, definir se o escoamento é:

- laminar: escoamentos nos quais as partículas fluidas movem-se em camadas, ou lâminas;
- turbulento: as partículas fluidas rapidamente se misturam enquanto se movimentam, ao longo do escoamento devido às flutuações aleatórias no campo tridimensional de velocidades.

Ainda segundo Feijóo, a viscosidade do sangue depende diretamente da concentração dos elementos que o compõem. Essas três características físicas do sangue são simplificações e serão mais detalhadas na seção 4 deste artigo.

Diferentes abordagens tanto com soluções analíticas a partir de modelos simplificados [5–7], como através de modelagens numéricas através do Método de *lattice* Boltzmann, Método dos elementos finitos [4, 8, 9], método dos volumes finitos [10, 11], dentre outras, tem sido utilizadas para simular o fluxo sanguíneo. Essas abordagens aproximadas apresentam resultados importantes e a necessidade de melhores modelos ou aperfeiçoamento dos modelos já existentes, tornou-se uma tendência no meio acadêmico com consequentes aplicações médicas.

O método *lattice*-Boltzmann (LBM), criado na década de 1980 e fundamentado a partir da equação de transporte de Boltzmann, tem sido utilizado para modelar o fluxo sanguíneo, por simular computacionalmente a dinâmica de fluidos regida pelas equações de Navier-Stokes e conseguir representar desde geometrias complexas, como as apresentadas em fluxos sanguíneos (condições de contorno irregulares) até fluxos turbulentos e multifásicos [3, 12–15]. Outra vantagem com a utilização do LBM é a possibilidade de implementá-lo utilizando processos de paralelização [16, 17], que agilizam a obtenção de resultados. Além disso, é um método que pode ser facilmente acoplado a outros métodos numéricos dependendo da necessidade apresentada no problema físico [15, 18, 19] e, dessa forma, possibilita-se a obtenção de resultados mais precisos do que se obteria com a utilização de apenas uma abordagem numérica. Tais acoplamentos também são vantajosos quando a referência é a hemodinâmica, justamente por se saber que o sangue é composto por diversas partículas estruturalmente diferentes [6], além da necessidade de se modelar as paredes dos vasos por onde o fluxo sanguíneo percorre e a musculatura ao redor desses vasos.

A proposta deste artigo é apresentar todo o processo de construção de um modelo idealizado para representar o fluxo sanguíneo pulsátil em artérias ou veias do corpo humano utilizando o método de *lattice* Boltzmann. Ao final, uma aplicação representativa desses conceitos utilizando uma geometria extraída da artéria femoral será apresentada.

2. Equação de Boltzmann

A equação de Boltzmann é uma equação da física estatística, integro-diferencial, para um sistema com função distribuição de partículas, a qual é descrita por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{K}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = Q(f, f), \quad (1)$$

onde $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ é a função de distribuição das partículas no espaço de fase contínuo (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , \mathbf{x} indica a posição espacial, \mathbf{v} representa a velocidade das partículas, m representa a massa, \mathbf{K} indica uma força de corpo e $Q(f, f)$ é um termo integral de colisão sobre o domínio espaço-velocidade.

Ela baseia-se nas seguintes premissas [20]:

1. Somente colisões de duas partículas são consideradas (colisões binárias);
2. As velocidades de duas partículas não são correlacionadas antes da colisão (hipótese do caos molecular);
3. Forças externas não influenciam a dinâmica da colisão local.

Um fluido incompressível, por exemplo, pode ser representado desprezando-se a força \mathbf{K} e, dessa forma, obtém-se a equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = Q(f, f). \quad (2)$$

A partir da expansão de Chapman-Enskog [21], demonstra-se que a equação de Boltzmann, Eq. (1), pode ser derivada para a equação de Navier-Stokes.

Para se representar corretamente a física do fluxo desse fluido é preciso avaliar se o termo de colisão satisfaz as equações de conservação de massa, momento e energia na colisão binária entre duas moléculas 1 e 2, com velocidades pré-colisionais \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . Dessa forma existe a probabilidade da mudança das velocidades \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 para as velocidades \mathbf{v}'_1 e \mathbf{v}'_2 , pós-colisionais.

A conservação global de uma quantidade macroscópica é expressa localmente por um invariante colisional.

Um invariante colisional é uma função qualquer $\psi(\mathbf{v})$, que obedece as seguintes relações

- $\psi(\mathbf{v}_1) + \psi(\mathbf{v}_2) = \psi(\mathbf{v}'_1) + \psi(\mathbf{v}'_2)$,
- $\psi(\mathbf{v}_1^2) + \psi(\mathbf{v}_2^2) = \psi(\mathbf{v}_1'^2) + \psi(\mathbf{v}_2'^2)$,

e dessa forma, a integração do operador de colisão multiplicado por $\psi(\mathbf{v})$ no espaço de velocidades \mathbf{v} deve ser, sempre, igual a zero. Portanto, os invariantes colisionais elementares devem respeitar as equações de conservação de massa, movimento e energia.

Segundo Cercignani [22] a integral de colisão possui exatamente cinco invariantes colisionais elementares, denominadas $\psi_k(\mathbf{v})$ ($k = 0, \dots, 4$), ou seja

- Conservação de massa: $\int Q(f, f)\psi_k(\mathbf{v})d\mathbf{v} = 0$, para $k = 0$, com $\psi_0 = 1$
- Conservação de quantidade de movimento: $\int Q(f, f)\psi_k(\mathbf{v})d\mathbf{v} = 0$, para $k = 1, 2, 3$, com $\psi_{1-3} = \mathbf{v}$.
- Conservação de energia: $\int Q(f, f)\psi_k(\mathbf{v})d\mathbf{v} = 0$, para $k = 4$, com $\psi_4 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

A combinação linear dos invariantes colisionais elementares é escrita como

$$\psi(\mathbf{v}) = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + c\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad (3)$$

onde a e c são constantes escalares e \mathbf{b} é um vetor constante.

Também existem funções positivas f que anulam o termo de colisão integral, ou seja

$$\int Q(f, f)d\mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

sendo que todas essas funções são da forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = e^{a+\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}+c\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}, \quad (5)$$

onde c deve ser negativo [23].

Cercignani [22] defende a ideia de que a grande quantidade de detalhes da interação de dois corpos não influencia significativamente os valores de várias quantidades medidas experimentalmente. Com essa ideia, é possível realizar simplificações no operador de colisão sem que haja perda nos resultados. Tais simplificações são baseadas no Teorema-H de Boltzmann, o qual faz previsões razoáveis sobre o comportamento futuro de um sistema que está num estado não completamente especificado.

Teorema 1 (Teorema-H de Boltzmann) *Dada a quantidade*

$$H(t) = \int \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \ln[f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)]d\mathbf{x}d\mathbf{v}, \quad (6)$$

onde f é qualquer função que satisfaça a equação de Boltzmann, Eq. (2), a mesma satisfaz a seguinte desigualdade

$$\frac{dH}{dt} \leq 0. \quad (7)$$

A situação particular em que $\frac{dH}{dt} = 0$ se aplica ao caso em que $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ é uma distribuição de Maxwell-Boltzmann dada por

$$f^M = f = \frac{\rho}{(\frac{2\pi}{3})^{D/2}} \exp\left[-\frac{3}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})\right]. \quad (8)$$

A distribuição de Maxwell-Boltzmann escrita dessa forma é um caso particular, onde D é a dimensão do

espaço, ρ e \mathbf{u} representam os valores macroscópicos da massa específica e da velocidade do fluido, respectivamente.

Essas variáveis macroscópicas do fluido são calculadas através dos momentos da distribuição f conforme

$$\rho = \int f\mathbf{v}, \quad (9)$$

e

$$\rho\mathbf{u} = \int \mathbf{v}f d\mathbf{v}. \quad (10)$$

Expressões mais simples tem sido propostas. De todos os modelos existentes, o modelo mais conhecido é o BGK [24] proposto por Bhatnagar e cols. [25].

Tal operador, denotado por $J(f)$, que substitui o operador $Q(f, f)$, respeita as seguintes restrições

- $J(f)$ deve preservar os invariantes colisionais ψ_k do operador $Q(f, f)$, ou seja

$$\int \psi_k J(f)d\mathbf{v} = 0, \quad k = 0, \dots, 4; \quad (11)$$

- o termo de colisão deve expressar uma tendência para uma distribuição Maxwelliana (Teorema-H).

2.1. Equilíbrio de Maxwell-Boltzmann

O equilíbrio de Maxwell-Boltzmann se baseia na ideia simples de que cada colisão modifica a distribuição $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ em um valor proporcional à distância dessa para uma distribuição Maxwelliana denominada $f^M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, ou seja,

$$J(f) = \varpi[f^M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)], \quad (12)$$

onde, o coeficiente ϖ é chamado frequência de colisão e, assim, o Teorema-H é respeitado [26].

Dessa forma, obtém-se a equação de Boltzmann com aproximação BGK dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \varpi(f^M - f), \quad (13)$$

onde, f^M é a função de distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann.

2.2. Discretização da equação de Boltzmann

A método de *lattice* Boltzmann, historicamente deriva do método de *Lattice-Gas* [27], contudo, assumindo que o número de Mach, dado por

$$M = \frac{|\mathbf{u}_{\max}|}{c_s}, \quad (14)$$

onde \mathbf{u}_{\max} é a máxima velocidade do fluido e c_s é a velocidade média do som no *lattice*, é pequeno, é possível obter a equação de *lattice* Boltzmann, aproximando a equação que descreve a distribuição de equilíbrio

de Maxwell-Boltzmann até a ordem de $\mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)$ da forma [28]

$$f^{eq} = \frac{\rho}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{D/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{c_s^2}\right] \left[1 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{c_s^2}\right]. \quad (15)$$

onde ρ e \mathbf{u} são a densidade e a velocidade resultantes em um ponto do domínio e D é a dimensão espacial [26].

Com esse cálculo é possível substituir a Eq. (8) por uma polinomial dada pela Eq. (15) que está diretamente relacionada com a dimensão do *lattice* que será utilizado para discretizar a equação de Boltzmann e obter a equação de *lattice* Boltzmann [29].

Para os modelos de *lattice* utilizados neste trabalho, a velocidade do som é calculada da forma $c_s = |\mathbf{v}|/\sqrt{3}$ [30,31].

Após essa simplificação ainda são necessárias três discretizações: no espaço de velocidades, no domínio espacial e temporal. Assim, sendo a equação de Boltzmann com simplificação BGK dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \varpi(f^{eq} - f), \quad (16)$$

primeiramente resolve-se o problema da discretização do espaço de velocidades. Para isso, transforma-se esse, que é de dimensão infinita, em um espaço de dimensão l , cujos elementos serão denominados $v\mathbf{e}_i$, para $i = 1, \dots, l$. Dessa forma, obtém-se

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (v \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \nabla f_i = \varpi(f_i^{eq} - f_i), \quad i = 1, \dots, l, \quad (17)$$

com

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[1 + 3 \frac{(v\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})}{v^2} + \frac{9}{2} \frac{(v\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2}{v^4} - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{v^2}\right], \quad (18)$$

onde,

$$\omega_i = W_i (2\pi/3)^{D/2} \exp\left[-\frac{3}{2} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i)\right], \quad (19)$$

e W_i são os pesos para uma aproximação adequada das integrais (9) e (10) [32].

Para discretizar a equação de Boltzmann nas variáveis \mathbf{x} e t (espaço e tempo) utiliza-se um esquema de diferenças finitas do tipo Euler explícito na Eq. (17) para aproximar a variável temporal e um esquema de diferenças finitas *upwind* de primeira ordem para a variável espacial (termo convectivo $v\mathbf{e}_i \cdot \nabla f_i$) [26, 33]. Assim, obtém-se a equação para f_i

$$\frac{f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} + v\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \frac{[f_i(\mathbf{x} + \Delta x \mathbf{e}_i, t + \Delta t)]}{\Delta x} = \varpi [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)], \quad i = 1, \dots, l, \quad (20)$$

onde Δt e Δx são o passo no tempo e o espaçamento do *lattice*, respectivamente. Fazendo a velocidade das partículas como $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, pela Eq. (20) tem-se

$$f_i(\mathbf{x} + \Delta x \mathbf{e}_i, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)] \quad i = 1, \dots, l, \quad (21)$$

onde $\tau = \frac{1}{\Delta t \varpi}$ é denominado termo de relaxamento. A Eq. (21) é então chamada de equação de *lattice* Boltzmann com aproximação BGK.

A Eq. (21) também pode ser encontrada na forma

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta x, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) \quad i = 1, \dots, l, \quad (22)$$

onde $\Omega_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))$ é denominado termo de colisão.

3. Método de *lattice*-Boltzmann

A diferença do LBM para métodos de discretização normais é que, através dele, é possível obter as equações macroscópicas de Navier-Stokes por meio de processos microscópicos de interação entre partículas. Ou seja, a principal ideia do LBM é construir um modelo cinético onde os processos microscópicos ou mesoscópicos possam ser utilizados, a fim de representar a média das propriedades macroscópicas analisadas de uma determinada equação [16].

O operador de colisão da equação cinética de Boltzmann é o grande complicador na obtenção de uma solução analítica. Ao simplificar tal operador além de se evitar a resolução de equações cinéticas complexas, também descarta-se a necessidade de ter que seguir cada partícula como em simulações de dinâmica molecular [34]. Como apresentado na seção 2.2, a simplificação mais utilizada é a aproximação BGK (Bhatnagar e cols. [22, 25]).

No modelo chamado de LBGK (Método de *lattice* Boltzmann com aproximação BGK) a equação de *lattice* Boltzmann é dada pela Eq. (21), sendo que o parâmetro de relaxamento tem ligação direta com a viscosidade cinemática, ν , do fluido, podendo ser escrito como [35]

$$\nu = \frac{(2\tau - 1)\Delta x^2}{6\Delta t}. \quad (23)$$

A distribuição de equilíbrio f_i^{eq} [28] é utilizada para minimizar a compressibilidade do método [36]. Essa deve conservar a massa e os momentos de primeira, segunda e terceira ordem do *lattice*, ou seja, deve satisfazer os seguintes produtos tensoriais [37]

$$\begin{aligned}
 \sum_i f_i^{eq} &= \rho \\
 \sum_i f_i^{eq} \mathbf{e}_i v &= \rho \mathbf{u} \\
 \sum_i f_i^{eq} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i v^2 &= P \mathbf{I} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \\
 \left[\sum_i f_i^{eq} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i v^3 \right]_{\alpha\beta\gamma} &= P (\delta_{\alpha\beta} u_\gamma + \\
 &\quad + \delta_{\gamma\alpha} u_\beta + \delta_{\beta\gamma} u_\alpha). \quad (24)
 \end{aligned}$$

onde δ é a função delta de Dirac, ρ e \mathbf{u} são a densidade e velocidade macroscópicas do fluido, respectivamente, calculadas por

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^l f_i(\mathbf{x}, t), \quad (25)$$

e

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^l v \mathbf{e}_i f_i(\mathbf{x}, t). \quad (26)$$

O modelo mais utilizado é dado por [38]

$$\begin{aligned}
 f_i^{eq} &= \omega_i \rho \left[1 + 3 \frac{(v \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})}{v^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{9}{2} \frac{(v \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2}{v^4} - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{v^2} \right] \quad i = 1, \dots, l, \quad (27)
 \end{aligned}$$

onde ω_i são pesos dependentes do tamanho do *lattice* e unicamente definidos pelas Eq. (27). A pressão P é calculada em função da densidade: $P = c_s^2 \rho$.

A Eq. (21) descreve a colisão e propagação de distribuições contínuas de partículas, onde o termo do lado direito da equação é chamado de operador de colisão. A etapa de colisão, para $i = 1, \dots, l$, é representada pela equação

$$\tilde{f}_i(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)], \quad (28)$$

enquanto a etapa de propagação é representada por

$$f_i(\mathbf{x} + \Delta x \mathbf{e}_i, t + \Delta t) = \tilde{f}_i(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, l, \quad (29)$$

onde f_i e \tilde{f}_i denotam a função distribuição pré e pós-colisão, respectivamente.

O deslocamento do conjunto de partículas é feito de maneira iterativa, com tempo, t , discreto. A representação das partículas usa um *lattice* (reticulado), de forma que cada um dos pontos esteja localizado nos vértices desse *lattice*, com a possibilidade de haver uma partícula no centro. Desta forma, o deslocamento das partículas só pode ocorrer segundo o modelo de *lattice* adotado (direções de deslocamento considerados).

As regras que governam as colisões são projetadas de maneira que o tempo médio do movimento das

partículas seja equivalente ao obtido pela equação de Navier-Stokes [39].

A simulação será realizada para um modelo de *lattice* bidimensional de oito direções não nulas de movimento e a possibilidade da partícula ficar parada, como pode ser observado na Fig. (1). Tal atribuição para o *lattice* é conhecido por D2Q9 [30] e essa escolha se dá por ser uma representação que tem exibido bons resultados no campo da hemodinâmica computacional [40–42].

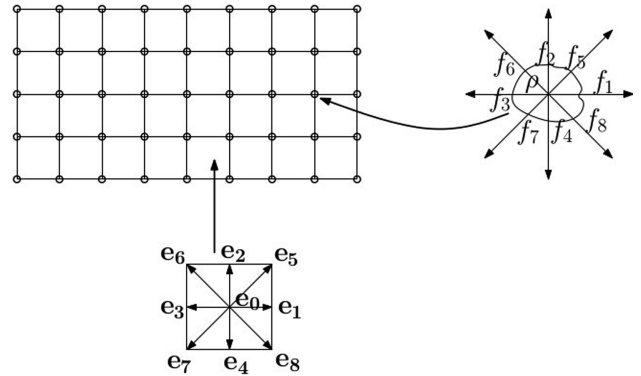


Figura 1 - Direções de velocidade da partícula no esquema D2Q9.

As direções características da estrutura bidimensional do modelo D2Q9 são (ver Fig. (1)): $\mathbf{e}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (-1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (0, -1)$, $\mathbf{e}_5 = (1, 1)$, $\mathbf{e}_6 = (-1, 1)$, $\mathbf{e}_7 = (-1, -1)$, $\mathbf{e}_8 = (1, -1)$.

Os pesos ω_i para o equilíbrio da distribuição (ver Eq. (27)) são dados por: $\omega_0 = \frac{4}{9}$, $\omega_{1-4} = \frac{1}{9}$ e $\omega_{5-8} = \frac{1}{36}$. Ainda é possível dizer que existem velocidades “lentas” nas direções horizontal e vertical (\mathbf{e}_{1-4}), dadas por v e velocidades “rápidas” nas diagonais (\mathbf{e}_{5-8}) com módulo $\sqrt{2}v$.

Para que não ocorra instabilidades numéricas é necessário que o valor de $\tau > 0.5$, pois $\tau = 0.5$ indica viscosidade do fluido identicamente nula e $\tau < 0.5$ trata viscosidades negativas [26].

Em geral as condições de contorno adotadas são imposições de variáveis macroscópicas de velocidade ou de pressão. As condições de contorno clássicas conhecidas para o LBM são: tipo periódica, tipo *bounce-back*, tipo colisão na célula e tipo interpolação sobre uma linha curva. Neste trabalho adota-se a condição de contorno de velocidade tipo *bounce-back* [35, 43] que é um modelo simples de ser implementado, mas eficaz para a reprodução do chamado *no-slip condition*, ou seja, as paredes dos vasos sanguíneos podem ser representadas como não escorregadias. As paredes não escorregadias em artérias ou veias são resultado da rugosidade existente nessas e, conseqüentemente, verifica-se que essa gera uma aderência que influencia diretamente na velocidade do fluido nessa região. No *no-slip condition* é considerada velocidade zero próximo as paredes.

4. Idealização do sangue

Quando a referência é o sistema cardiovascular humano (HCVS) existe a necessidade de se analisar tanto os aspectos estruturais do HCVS quanto as leis físicas que regem o fluxo sanguíneo através de veias ou artérias.

4.1. Aspectos estruturais

O HCVS é responsável por conduzir elementos essenciais para todos os tecidos do corpo. O coração, os vasos sanguíneos e o sangue são os componentes biológicos desse sistema. Os vasos condutores do sangue para fora do coração são as artérias, objeto de estudo deste trabalho, cujo objetivo é levar o sangue rico em oxigênio para todo o corpo. Essas ramificam-se tornando-se progressivamente de menor diâmetro terminando em diminutos vasos denominados arteríolas, passando então aos capilares que são responsáveis pelas trocas gasosas com os tecidos do corpo [44].

As artérias são organizadas em uma sofisticada rede que cobre todo o organismo, designada de árvore arterial. Essa árvore é caracterizada por:

- Propriedades geométricas dos vasos: diâmetro e comprimento;
- Propriedades estruturais: espessura e comportamento do material da parede do vaso, quando submetido ao carregamento hemodinâmico.

Em relação as propriedades geométricas, vários trabalhos que as descrevem, por exemplo Westerhof e cols. [45], apresentam dados para um homem padrão. Esses dados também podem ser encontrados nos trabalhos de Stergiopulos e cols. [46], Anliker e cols. [47], Stettler e cols. [48], McDonald [1], Li [49], Schaaf [50]. Geralmente, as dimensões apresentadas nos documentos acima variam significativamente de pessoa a pessoa. Isso reflete as grandes variações achadas em humanos de até 50% dos valores médios.

Em todos esses casos é possível utilizar as equações de Navier-Stokes para modelar o fluxo sanguíneo, pois essas são equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos e permitem determinar os campos de velocidade e de pressão num escoamento. Assim, a utilização do LBM para simular computacionalmente a hemodinâmica regida pelas equações de Navier-Stokes torna-se uma ferramenta vantajosa pela capacidade de poder representar geometrias muito complexas, como as encontradas no HCVS.

4.2. Aspectos físicos

Alguns princípios básicos governam a movimentação sanguínea no sistema cardiovascular: fluxo, pressão e resistência. O fluxo sanguíneo significa a quantidade de sangue que passa por uma seção transversal de um vaso, por unidade de tempo. A pressão de um líquido é

definida pela física clássica como sendo a força exercida pelo líquido, sobre qualquer unidade de área da parede do recipiente que o contém. No caso do sangue, a parede do recipiente nada mais é que a parede do vaso sanguíneo. O coração exerce uma força propulsora que influencia diretamente na variação de pressão entre a entrada e a saída de um vaso sanguíneo. A Resistência para a passagem do fluxo sanguíneo por um vaso é medida a partir da relação da diferença de pressão no vaso pela vazão do fluido.

O fluxo sanguíneo é composto de células vermelhas que estão diretamente ligadas a coagulação sanguínea e conseqüentemente a sua viscosidade. A viscosidade sanguínea pode não ser constante durante o escoamento, o que faz com que esse tipo de fluido precise ser avaliado através de propriedades reológicas ao invés de ser analisado por conceitos de viscosidade clássica [51]. As propriedades reológicas relacionam a tensão aplicada nesse fluido e a taxa de deformação sob diferentes condições de escoamento.

Diz-se que o fluxo sanguíneo possui comportamento não newtoniano [52,53]. Mais especificamente, observa-se que o comportamento do sangue pode ter um caráter de pseudoplasticidade ou viscoelasticidade dependendo do agregamento, alinhamento e deformação das células vermelhas [52]. Dessa forma, a viscosidade aparente no sangue diminui conforme tem-se um aumento da tensão, o que o define uma região sanguínea pseudoplástica [54] ou a viscosidade aparente é constante independente da tensão cisalhante, o que define uma região sanguínea viscoelástica.

Em tubos onde o diâmetro interno é grande em comparação as células vermelhas, o fluxo sanguíneo pode ser representado, de forma aproximada, por um fluido newtoniano viscoso [1]. Quando o comportamento do fluido possui essa característica, a viscosidade cinemática é constante em todo o comprimento do tubo, independente da taxa de cisalhamento.

A viscosidade é determinada por uma relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento, sendo que a tensão de cisalhamento gera forças resultantes tangenciais à parede do vaso, produzidas pelo atrito com o fluxo sanguíneo, enquanto a taxa de cisalhamento é dada pelo quociente da diferença de velocidade entre duas camadas (lâminas) pelo intervalo de separação entre as camadas [55].

Sob valores estáveis da tensão de cisalhamento, o aumento da viscosidade implica numa menor velocidade do fluxo (menor taxa de cisalhamento). Se a relação de cisalhamento for constante e houver hiperviscosidade, a tensão de cisalhamento terá que aumentar para que o sangue flua na rede vascular.

Em situações ideais o sangue flui em linhas de fluxo com cada camada do sangue permanecendo a uma mesma distância da parede do vaso. Esse tipo de fluxo é chamado fluxo laminar [56].

A relação que garante a existência de um fluxo lami-

nar, deve, então, levar em consideração as forças inerciais, $\mathbf{u}\rho$, e as forças viscosas, L_y/μ , da forma

$$Re = \frac{\rho \mathbf{u} L_y}{\mu} = \frac{\mathbf{u} L_y}{\nu}, \quad (30)$$

onde \mathbf{u} é a velocidade média do objeto em relação ao fluido, L_y é o diâmetro do vaso, ν é a viscosidade cinemática, ρ é a densidade do fluido e μ é a viscosidade dinâmica do fluido. Essa relação é conhecida como número de Reynolds e segue o seguinte padrão [57]:

- I) para $Re < 2000$ o fluxo é laminar,
- II) para $Re > 13000$ o fluxo é turbulento,
- III) para $2000 \leq Re \leq 13000$, existe uma zona de instabilidade onde podem se formar vórtices que não progridem pelo tubo e, por esse motivo, denominados de instabilidade.

Esses valores de transição de um escoamento laminar para turbulento ocorrem quando não há aumento ou diminuição da velocidade (escoamento permanente). No escoamento vascular, não-permanente (pulsátil), com paredes de vasos flexíveis, esses valores de transição não são conhecidos [1].

Em casos de fluxo pulsátil, como ocorre com o sangue, é preciso relacionar o número de Reynolds com o número de Womersley [58]. O número de Womersley aparece na solução da equação linearizada de Navier-Stokes para fluxos oscilatórios (presumidamente laminares e incompressíveis) em tubos. Esse é dado por

$$\alpha = \frac{L_y}{2} \sqrt{\left(\frac{\eta}{\nu}\right)}, \quad (31)$$

onde η é a frequência angular ou frequência de oscilação cardíaca [1,59]. O número de Womersley [5] representa o quociente entre as forças inerciais transientes ou oscilatórias pelas forças viscosas [6]. Quanto maior o valor de α maior será o valor crítico do número de Reynolds.

Conhecendo a equação de Navier-Stokes simplificada com base no fluxo de Poiseuille, pode-se escrever a equação do movimento de um fluido por [60]

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (32)$$

sendo u_x a velocidade longitudinal do fluido no vaso e $\frac{\partial P}{\partial x}$ é o gradiente de pressão que pode ser reescrito como $\Delta P(t) = \frac{P_2 - P_1}{L_x}$, onde L_x é o comprimento do tubo ao longo de x . Por Womersley [5] é possível exprimir o gradiente de pressão por uma função periódica com uma determinada frequência que represente o pulso arterial e, dessa forma, pode-se dizer que está sendo assumido um fluxo de Poiseuille que muda ao longo do tempo, ou seja, um problema transiente (dependente do tempo) do escoamento de Womersley.

Esse último é o interesse deste trabalho por se aproximar do escoamento sanguíneo [1, 7, 58]. Como neste

estudo dispõe-se da condição de contorno vinculada a velocidade, ou seja, é conhecida a distribuição de velocidades de entrada no *lattice* [5,59,61], adota-se a solução analítica para a Eq. (32), dada por [60]

$$u_x(y, t) = -Real \left[i \frac{A}{\eta \rho} (1 - B) e^{i\eta t} \right], \quad (33)$$

sendo

$$B = \frac{\cos \left(\lambda \left(\frac{2y}{L_y} - 1 \right) \right)}{\cos \lambda},$$

onde a frequência angular é dada por $\eta = \frac{2\pi}{T}$, sendo T o período de oscilação da condição de contorno (período da onda), A é a amplitude do gradiente de pressão, com $A = \max(\Delta P)$, i é a unidade imaginária, $Real(\cdot)$ é a componente real do argumento (\cdot) e é dada em função do número adimensional de Womersley, α , dado pela Eq. (31) com $\lambda^2 = -i\alpha^2$.

O resultado para o gradiente de pressão é uma função sinusoidal com amplitude A dado pela equação

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -Real[Ae^{i\eta t}] = -A \cos(\eta t). \quad (34)$$

5. Uma aplicação

Algumas simplificações para o modelo serão impostas de forma que a resposta numérica continue gerando resultados compatíveis com o HCVS. Assim, adota-se um fluido incompressível, newtoniano, laminar e pulsátil que percorre um trecho idealizado e planificado da artéria femoral, localizado na região da panturrilha. O fluido está confinado entre as paredes da artéria que são adotadas de maneira simplificada como rígidas e impermeáveis, conforme pode ser observado na Fig. (2).

Os parâmetros estão representados em unidades de *lattice* sendo utilizados valores de $\alpha = 27.3$, $\tau = 0.519$, $\Delta P = 0.01$, $Re = 220$ e $\rho = 1.055$. Em L_y são utilizados 182 *lattices* e em L_x são utilizados 1066 *lattices*. Tais parâmetros são uma forma de representar o fluxo hemodinâmico com as idealizações adotadas. Esses podem ser modificados dentro de certos limites sem que as idealizações percam a validade conforme disposto na seção 4.

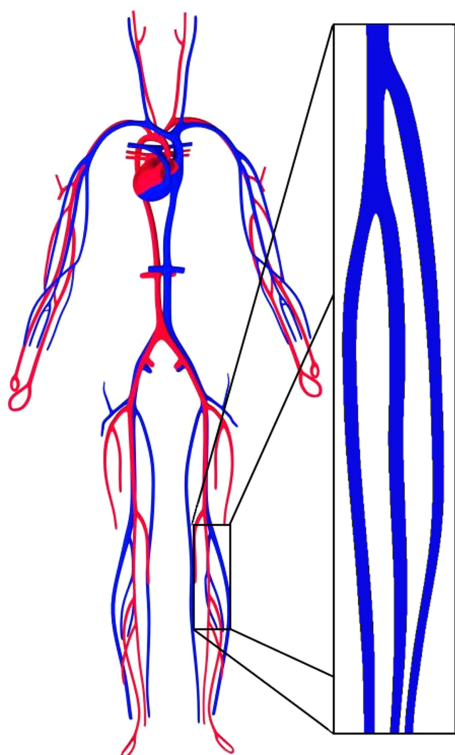


Figura 2 - Representação do pedaço da artéria femoral.

Pela Eq. (33), o modelo proposto resulta nas curvas de Womersley, ilustradas pelos perfis de velocidades da Fig. (3), para a velocidade inicial do fluxo na artéria femoral.

5.1. Resultados e discussões

Os resultados serão apresentados de duas formas distintas. Primeiro utilizando interpolações suavizadas dos módulos da velocidade nos *lattices* e a segunda forma de apresentação será através de linhas de velocidade, cujas cores são dadas pelo módulo da velocidade nos *lattices*, $|\mathbf{u}|$. As cores variam de azul, representando $|\mathbf{u}| = 0$, a vermelho, representando $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}_{\max}|$, em ambas as apresentações.

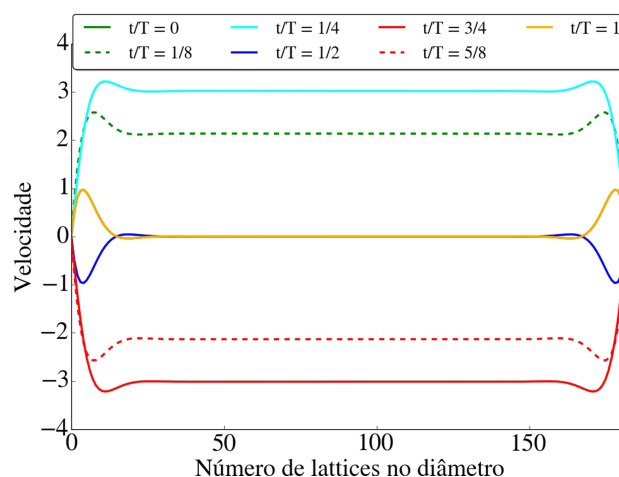


Figura 3 - Perfil de velocidades para Womersley.

As Figs. 4, 5, 6 ilustram uma sequência no tempo do fluxo na artéria. O tempo é contado de maneira genérica sendo ilustrado em interações do processo de solução, ou seja, $t = 100$ indicam 100 interações. Pode-se observar nessa sequência a movimentação das regiões de velocidades máximas e de velocidades zero, representativas da distribuição de velocidades de Womersley na região de entrada (lado esquerdo da figura) e sua propagação na artéria, caracterizando assim uma parte do fluxo pulsátil sanguíneo idealizado. Na Fig. 4 observa-se uma região de velocidades zero após a primeira ramificação (em azul escuro), aparecendo na Fig. 5 já após a segunda ramificação e na 6 um pouco mais a frente. Nessa mesma figura observa-se que na região de entrada do fluxo já ocorre uma nova pulsação dando origem a uma nova região de velocidades zero. Além disso, na Fig. (4), na região próxima a entrada, a artéria descreve, em sua seção transversal, a forma da distribuição de velocidades de Womersley, parâmetro de entrada do modelo, conforme pode ser verificado na Fig. (3), e requisito para o fluxo pulsátil. Por fim, o fluxo apresenta na região de interface velocidades zero em todas as paredes da artéria idealizada (borda das figuras em azul escuro), caracterizando um alto atrito entre o sangue e a parede arterial.

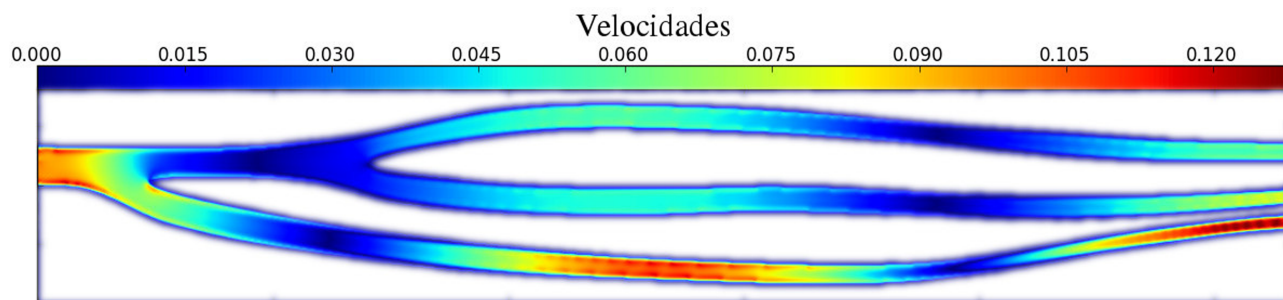
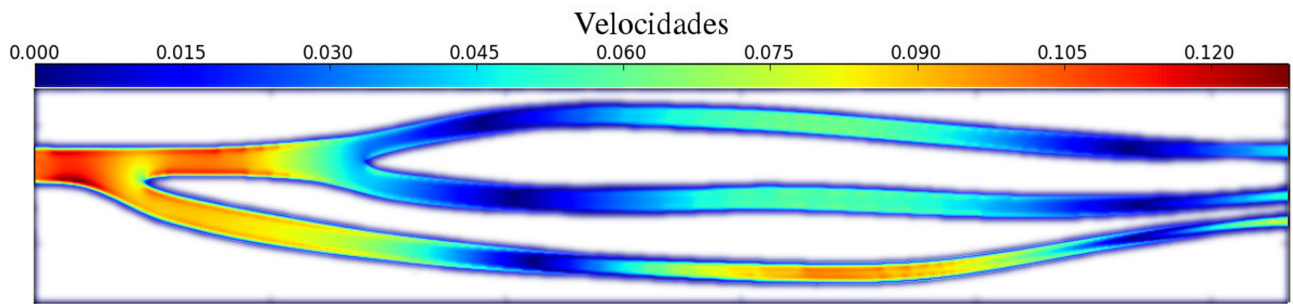
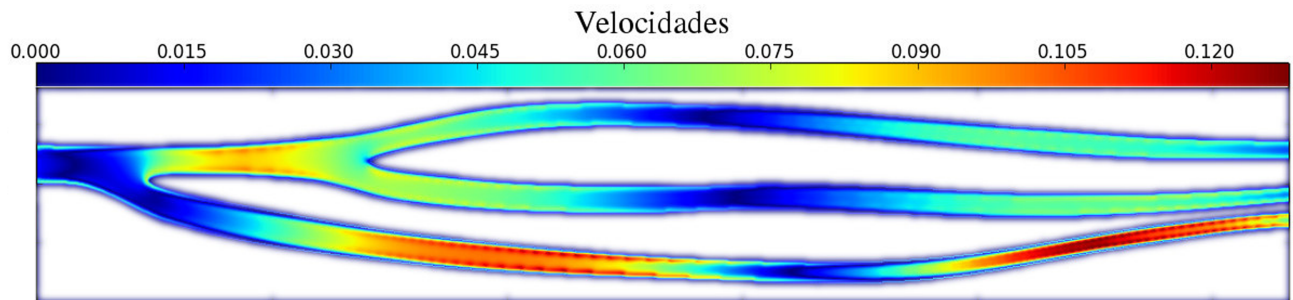
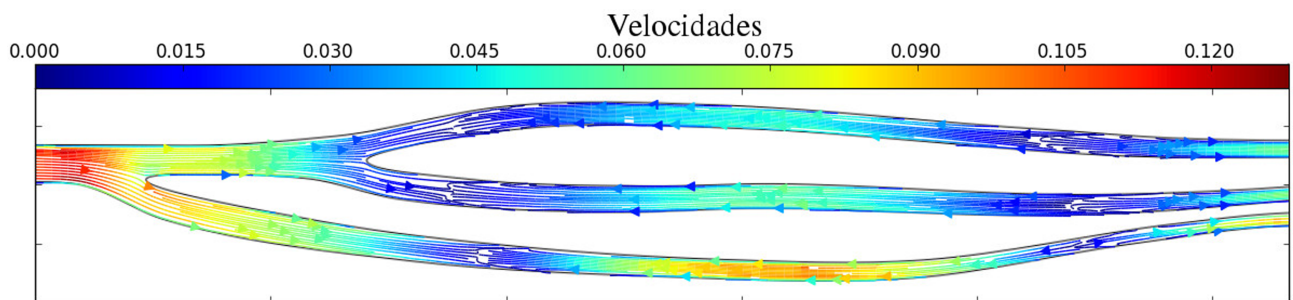


Figura 4 - Fluxo no tempo $t = 100$.

Figura 5 - Fluxo no tempo $t = 150$.Figura 6 - Fluxo no tempo $t = 200$.

Nas Figs. 7, 8, 9, 10 ilustradas com as linhas de fluxo do escoamento, função do módulo da velocidade, também observa-se uma propagação das regiões de velocidades zero e de velocidades máximas. As linhas de fluxo representam uma conexão entre os vetores do módulo da velocidade, sendo traçadas de acordo com a direção desses vetores e coloridas com sua intensidade. Em alguns pontos, são desenhadas setas nas linhas de fluxo indicativas da direção desses vetores na região. As imagens são relacionadas com o tempo genérico total de uma pulsação completa T , ou, de acordo com a formulação de Womersley, o período de oscilação da condição de contorno. Portanto, $t/T = 1/4$ indica 25% de uma pulsação. O ponto a ser observado nessas imagens é a direção das velocidades máximas, que podem ser tanto orientadas na direção do fluxo (positivas) quanto opostas (negativas), como pode ser verificado pelas setas indicativas nas linhas de fluxo. Com a

distribuição de velocidades de Womersley de $t/T = 1/4$ e $t/T = 3/4$, respectivamente, constatam-se bem definidas essas regiões representativas da pulsação positiva e negativa. Ambas as regiões propagam-se pela artéria indicando que, de acordo com a pulsação inicial, regiões de velocidades positivas e negativas ocorrem por todo o comprimento da artéria, assim como de velocidades nulas. A contração ventricular é conhecida como sístole e nela ocorre o esvaziamento dos ventrículos o que gera a ocorrência das velocidades positivas. O relaxamento ventricular é conhecido como diástole e é nessa fase que os ventrículos recebem sangue dos átrios e assim gera-se um pulso de velocidade negativa nas artérias [1]. Tal comportamento representa a possível movimentação das diferentes estruturas celulares que compõem o sangue (células vermelhas, brancas, etc.) e que podem oscilar em função da pulsação inicial [1, 6].

Figura 7 - Pulso para $t/T = \frac{1}{4}$.

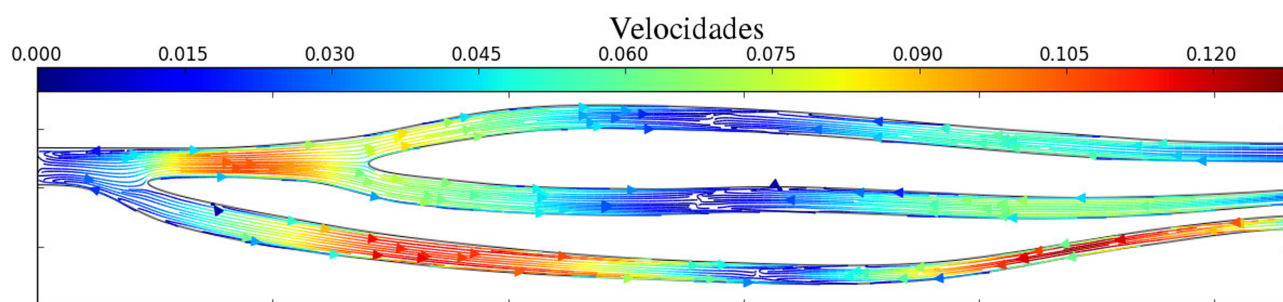


Figura 8 - Pulso para $t/T = 1$.

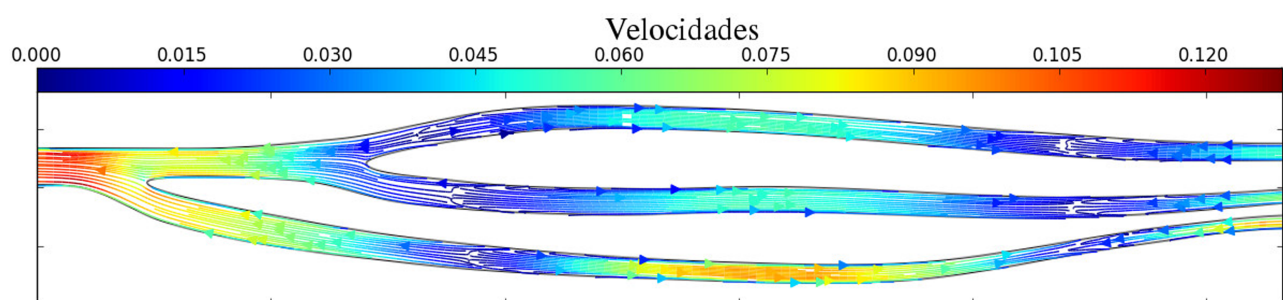


Figura 9 - Pulso para $t/T = \frac{3}{4}$.

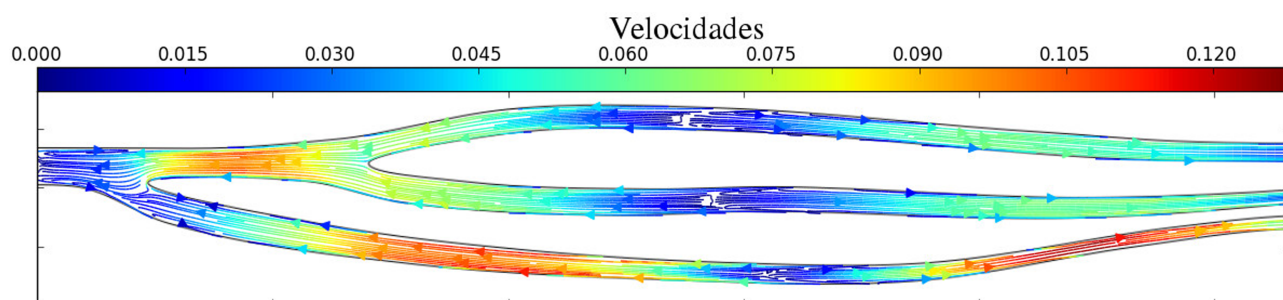


Figura 10 - $t/T = \frac{1}{2}$.

A validação dos resultados se baseia na verificação das condições impostas para o modelo, que podem ser observadas em estudos médicos e no comportamento real do fluxo sanguíneo por artérias e veias do corpo humano [6, 7, 44, 62] visto que uma validação comparando resultados analíticos para a equação de Navier-Stokes não seria possível, devido a complexidade do modelo. Dentro dessa limitação, julgou-se que o modelo proposto para o fluxo pulsátil de um escoamento sanguíneo idealizado gerou resultados satisfatórios sob o ponto de vista qualitativo.

6. Conclusões

O método LBGK é de fato interessante para a simulação de modelos de escoamento de fluidos sanguíneos pelos diversos motivos já elucidados durante o texto, mas também pelo fato de ser um método de simples implementação computacional [16, 17] e com resulta-

dos coerentes para um modelo sanguíneo idealizado pulsátil, conforme exposto. O objetivo do trabalho era apresentar todo o processo de construção de um modelo idealizado para representar o fluxo sanguíneo em artérias (pode ser aplicado da mesma forma em veias) considerando-o pulsátil, uma característica física real desse tipo de escoamento [5, 6], fato que, a aplicação representativa ilustra bem conforme descrito nos resultados. Como o modelo é idealizado, os valores obtidos de velocidades são mais qualitativos que quantitativos, funções das simplificações adotadas e dos valores utilizados nos parâmetros de entrada. Diversos trabalhos já vem comentando e empregando fluxos pulsáteis para avaliação do HCVS [7, 61, 63], comentando sobre os parâmetros, medindo erros [3, 59] e implementando a metodologia em condições ideais com geometrias simplificadas. Neste trabalho foi feita uma descrição completa da teoria por de trás desse contexto, ilustrando-se ao final a apresentação de uma aplicação desses con-

ceitos, os quais representam o contexto utilizado neste trabalho, utilizando uma geometria extraída da artéria femoral. Uma próxima etapa de refino desse modelo é a utilização desses parâmetros com valores mais realistas, obtidos, por exemplo, com medições *in vivo*, permitido também, dessa forma, comparações mais quantitativas dos resultados obtidos.

Agradecimentos

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- [1] W.W. Nichols, M.F. O'Rourke and C. Vlachopoulos, *Mcdonald's Blood Flow in Arteries* (Hodder Arnold, London, 2011), v. 9, p. 456.
- [2] S. Čanić, A. Mikeli and J. Tamba, *Comptes Rendus Mécanique* **333**, 1 (2005).
- [3] D.R. Golbert, P.J. Blanco, A. Clausse and R.A. Feijóo, *Medical Engineering and Physics* **34**, 339 (2012).
- [4] V. Feijóo, *Modelagem do Fluxo Sanguíneo na Aorta Abdominal Utilizando Interação Fluido-Estrutura*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2010.
- [5] J.R. Womersley, *J. Physiol* **127**, 553 (1955).
- [6] Y.C. Fung, *Biodynamics: Circulation* (Springer Verlag, New York, 1984), p. 404.
- [7] M. Beraia, *Health* **02**, 532 (2010).
- [8] M. Oshima, R. Torii, T. Kobayashi, N. Taniguchi and K. Takagi, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **191**, 661 (2001).
- [9] D. Chakraborty and M. Chattopadhyay, *Procedia Technology* **10**, 262 (2013).
- [10] A. Ivankovic, A. Karac, E. Dendrinis and K. Parker, *Biorheology* **39**, 401 (2002).
- [11] A.M. De Villiers, *Modelling Blood Flow in Large Arteries Using the Finite Volume Method*. Dissertação de Mestrado, North-West University, 2012.
- [12] J.G.M. Eggels, *International Journal of Heat and Fluid Flow* **17**, 307 (1996).
- [13] G. Falcucci, S. Ubertini, C. Biscarini, S. Di Francesco and D. Chiappini, *Communications in Computational Physics* **9**, 269 (2006).
- [14] X. Shan, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics* **73**, 6 (2006).
- [15] A. De Rosis, G. Falcucci, S. Ubertini and F. Ubertini, *Computers & Fluids* **86**, 558 (2013).
- [16] C. Schepke, *Distribuição de Dados para Implementações Paralelas do Método de Lattice Boltzmann*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.
- [17] J.R. Clausen, D.A. Reasor and C.K. Aidun, *Computer Physics Communications* **181**, 1013 (2010).
- [18] R. Mei, D. Yu, W. Shyy and L.S. Luo, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics* **65**, 1 (2002).
- [19] A. Zarghami, M.J. Maghrebi, J. Ghasemi and S. Ubertini, *Communications in Computational Physics* **12**, 42 (2012).
- [20] G.M. Kremer, *Uma Introdução a Equação de Boltzmann* (EdUSP, São Paulo, 2005), p. 147.
- [21] S. Chapman and T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases* (Cambridge University Press, New York, 1970), p. 427.
- [22] C. Cercignani, *Mathematical Methods in Kinetic Theory*. (Springer US, Milan, 1969), p. 227.
- [23] D. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction* (Springer, Berlin, 2005), p. 302.
- [24] C. Cercignani, *Physics of Fluids* **9**, 40 (1966).
- [25] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross and M. Krook, *Phys. Rev.* **94**, 511 (1954).
- [26] D.R. Golbert, *Modelos de Lattice-Boltzmann Aplicados à Simulação Computacional do escoamento de Fluidos Incompressíveis*. Tese de Doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica, 2009.
- [27] U. Frisch, D. D'Humieres, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau and J.P. Rivet, *Complex systems* **1**, 649, (1987).
- [28] J.M.V.A. Koelman, *Europhysics Letters (EPL)* **15**, 603 (1991).
- [29] P.C. Philippi, L.A. Hegele, L.O.E. dos Santos and R. Surmas, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics* **73**, 1 (2006).
- [30] Y.H. Qian, D. D'Humières and P. Lallemand, *Europhysics Letters (EPL)* **17**, 479 (1992).
- [31] B. Chopard, A. Dupuis, A. Masselot and P. Luthi, *Advances in Complex Systems* **5**, 103 (2002).
- [32] X. He, Q. Zou, L.S. Luo and M. Dembo, *Journal of Statistical Physics* **87**, 115 (1997).
- [33] N. Cao, S. Chen, S. Jin and D. Martínez, *Physical Review E* **55**, R21 (1997).
- [34] S. Chen and G.D. Doolen, *Annual Review of Fluid Mechanics* **30**, 329 (1998).
- [35] X. He and L.S. Luo, *Physical Review E* **56**, 6811 (1997).
- [36] X. He and L.S. Luo, *Journal of Statistical Physics* **88**, 927 (1997).
- [37] J.M. Yeomans, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **369**, 159 (2006).
- [38] Y.H. Qian and S.A. Orszag, *Europhysics Letters (EPL)* **21**, 255 (1993).
- [39] J.M. Buick and C.A. Greated, *Physics of Fluids* **10**, 1490 (1998).
- [40] T. Hyakutake, T. Matsumoto and S. Yanase, *Mathematics and Computers in Simulation* **72**, 134 (2006).

- [41] O. Pelliccioni, M. Cerrolaza and M. Herrera, *Mathematics and Computers in Simulation* **75**, 1 (2007).
- [42] Y. Liu, *Applied Mathematical Modelling* **36**, 2890 (2012).
- [43] D.H. Rothman and S. Zaleski, *Lattice-Gas Cellular Automata: Simple Models of Complex Hydrodynamics* (Cambridge University Press, New York, 2004), p. 153.
- [44] P.J. Blanco and R.A. Feijóo, *Introdução à Modelagem e Simulação Computacional do Sistema Cardiovascular Humano* (Hemolab-LNCC, Petrópolis, 2009), p. 227.
- [45] N. Westerhof, F. Bosman, C.J. De Vries and A. Noordergraaf, *Journal of Biomechanics* **2**, 121 (1969).
- [46] N. Stergiopoulos, D.F. Young and T.R. Rogge, *Journal of Biomechanics* **25**, 1477 (1992).
- [47] M. Anliker, J.C. Stettler, P. Niederer and R. Holenstein, *The Arterial System* (Springer-Verlag, Berlin, 1978), p. 284.
- [48] J.C. Stettler, P. Niederer, M. Anliker and M. Casty, *Annals of Biomedical Engineering* **9**, 165 (1981).
- [49] J.K.J. Li, *Arterial System Dynamics: Hemodynamics of Arteries* (New York University Press, New York, 1987), p. 112.
- [50] B.W. Schaaf and P.H. Abbrecht, *Journal of Biomechanics* **5**, 345 (1972).
- [51] E.W. Merrill, *Physiological Reviews* **49**, 863 (1969).
- [52] F.J. Gijsen, F.N. van de Vosse and J.D. Janssen, *Journal of Biomechanics* **32**, 601 (1999).
- [53] T. Sochi, arXiv preprint arXiv:1306.2067 (2013).
- [54] L.L. Schramm, *Emulsions, Foams, and Suspensions: Fundamentals and Applications* (Wiley-VCH, Weinheim, 2006), p. 448.
- [55] J.M.E. Silva, *Bulletin of the Portuguese Society of Hemorheology and Microcirculation* **28**, 1 (2013).
- [56] W. Kaufmann, *Fluid Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1963), p. 462.
- [57] Y.C. Fung, *Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth* (Springer Verlag, New York, 1993), p. 567.
- [58] K. Rohlf and G. Tenti, *Journal of Biomechanics* **34**, 141 (2001).
- [59] A.M. Artoli, A.G. Hoekstra and P.M.A. Sloot, *International Journal of Modern Physics C* **13**, 1119 (2002).
- [60] H.P. Fang, R.Z. Wan and Z.F. Lin, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* **66**, 19 (2002).
- [61] H.P. Fang, R.Z. Wang, Z.F. Lin and M. Liu, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* **65**, 1 (2002).
- [62] S. Čanić, D. Lamponi, A. Mikelić and J. Tambaca, *Multiscale Modeling & Simulation* **3**, 559 (2005).
- [63] Y. Huo and G.S. Kassab, *Am. J. Physiol. - Heart and Circulatory Physiology* **292**, 2623 (2007).