

Uma introdução à teoria dos táquions

(An introduction to the theory of tachyons)

Ricardo S. Vieira¹

Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil

Recebido em 24/11/2011; Aceito em 30/4/2012; Publicado em 22/11/2012

A teoria da relatividade, proposta no início do século XX, aplica-se a partículas e referenciais que se movimentam com uma velocidade menor que a da luz. Nesse artigo mostraremos como esta teoria pode ser estendida a partículas e referenciais que se movimentam mais rapidamente que a luz.

Palavras-chave: táquions, superluminal, relatividade, neutrinos, transformações de Lorentz estendidas, funções hiperbólicas estendidas, paradoxo de Tolman.

The theory of relativity, which was proposed in the beginning of the 20th century, applies to particles and frames of reference whose velocity is less than the velocity of light. In this paper we shall show how this theory can be extended to particles and frames of reference which move faster than light.

Keywords: tachyons, superluminal, relativity, neutrinos, extended Lorentz transformations, extended hyperbolic functions, Tolman paradox.

1. Sobre a necessidade de se formular uma teoria dos táquions

No fim do ano passado, cientistas do Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN) divulgaram os resultados de um experimento [1] no qual neutrinos *mais rápidos que a luz* tinham sido supostamente detectados. Coincidentemente, cerca de uma semana antes da divulgação desse resultado, o autor apresentou na 7^a Semana da Física da UFSCar [2] uma palestra justamente sobre o tema, mais especificamente, sobre como a teoria da relatividade poderia ser estendida de modo a se aplicar também a referenciais e partículas mais rápidas que a luz.² Essa palestra gerou naquela ocasião grande interesse por parte de professores e alunos, e esse interesse foi ainda mais amplificado após a divulgação da notícia comentada acima. Desde então, o autor recebeu vários incentivos para que colocasse as ideias lá apresentadas na forma de um artigo, o que por fim resultou no presente texto.

Embora estudos mais recentes [3] contestem os resultados do experimento [1], é oportuno mencionar que existem outras evidências experimentais sobre a existência de fenômenos superluminais na natureza [4].

Além do mais, somos da opinião de que o estudo teórico dos táquions pode fornecer uma melhor compreensão da própria teoria da relatividade, bem como de alguns temas centrais em mecânica quântica. De fato, táquions são cogitados em algumas das mais modernas teorias da física, como por exemplo em teoria de supercordas ou em teoria quântica de campos. Acreditamos assim que o estudo teórico dos táquions seja amplamente justificado, mesmo que os resultados do experimento OPERA não estejam corretos.

Tentativas de se estender a teoria da relatividade já foram, é claro, propostas por diversos cientistas, muito embora as publicações originais possam não ser de fácil acesso.³ Dentre as formulações propostas, destacamos os trabalhos de Recami [5] e colaboradores, cujos resultados, embora deduzidos através de uma matemática bem mais avançada que a empregada aqui, coincidem em sua grande parte com os nossos. A Ref. [5] consiste em um artigo de revisão sobre o assunto, onde o leitor interessado poderá encontrar uma vasta quantidade de referências, obter mais detalhes sobre a teoria, bem como encontrar tópicos que não serão discutidos aqui (*e.g.*, a eletrodinâmica de táquions).

Por uma teoria da relatividade estendida, nos refe-

¹E-mail: rsvieira@df.ufscar.br.

²Tais partículas são chamadas em física teórica *táquions*. A palavra *táquion*, por sua vez, deriva do grego *ταχύς*, que significa *rápido*.

³Com efeito, o autor não teve acesso a essas referências quando estudou o assunto, muito embora as tenha lido antes da redação do texto. Deste modo, com exceção da seção 9 que foi baseada nas Refs. [5, 18], as deduções que se seguem foram retiradas principalmente das notas de estudos do autor. Muitos desses resultados, todavia, já foram obtidos anteriormente, como pode ser verificado na Ref. [5].

rimos a uma teoria que se aplique a partículas e referenciais quem se movimentam com velocidades maiores que a da luz, bem como a partículas e referenciais que se “movimentam” para trás no tempo. Em especial é necessário estender as transformações de Lorentz para tais referenciais. Embora essa extensão possa ser deduzida sem maiores problemas em um universo de duas dimensões, (x, t) , nos deparamos com dificuldades para implementá-la em um universo de quatro dimensões, (x, y, z, t) . As razões pelas quais isso ocorre serão comentadas na seção 10. Por fim, na seção 11 mostraremos que em um universo de seis dimensões (x, y, z, t_x, t_y, t_z) – três dimensões do tipo espaço, três do tipo tempo – aquelas dificuldades desaparecem e as transformações de Lorentz podem então ser estendidas sem qualquer desacordo com os princípios da relatividade usual.

Convém por fim mencionar que após a consolidação da teoria da relatividade (para a qual Einstein, bem sabemos, teve um papel fundamental), a hipótese de existência de partículas mais rápidas que a luz foi quase que esquecida. Isso deveu-se principalmente ao fato de que é impossível, segundo a teoria da relatividade, se acelerar uma partícula massiva até a velocidade da luz ou além, já que uma quantidade infinita de energia seria gasta nesse processo. Com isso pode parecer que a teoria da relatividade proíbe a existência dos táquions. No entanto, essa conclusão é equivocada porque tais partículas poderiam ter uma velocidade superluminal desde o momento de sua própria criação. Por exemplo, táquions poderiam ter sido criados juntamente ao big-bang, ou então serem criados por algum processo quântico similar ao processo de criação de pares de partículas-antipartículas. Em qualquer caso a velocidade dessas partículas seria, em toda a sua existência, sempre maior que a luz – não há nisso qualquer contradição com a teoria da relatividade, ninguém teve de acelerá-las!

Do ponto de vista matemático devemos ressaltar também que, ao associarmos ao universo uma completa isotropia e homogeneidade, nenhuma das direções do espaço-tempo deve ser privilegiada em relação às outras. Consequentemente qualquer valor de velocidade deveria ser possível. Nesse sentido, não seria a possibilidade de existência dos táquions uma surpresa, pelo contrário, a sua não existência é que exigiria uma explicação teórica.

2. Sobre a estrutura do espaço-tempo

Como se sabe, a formulação da teoria da relatividade deveu-se ao esforço de vários cientistas (*e.g.*, Lorentz, Poincaré, Einstein, Minkowski etc.). A descrição

geométrica da teoria da relatividade – a chamada teoria do espaço-tempo –, por sua vez, foi proposta primeiramente por Poincaré [6] em 1905 e, depois, de maneira mais acessível e detalhada por Minkowski [7] em 1909.

Essa descrição geométrica, que contém a própria essência da teoria da relatividade, pode ser fundamentada nas seguintes afirmações, ou postulados.⁴

1. O universo é um continuum em 4 dimensões – três dessas dimensões estão associadas às dimensões espaciais usuais X , Y e Z , enquanto que a outra está associada a uma dimensão temporal, T .
2. O espaço-tempo, visto como um todo, é homogêneo e isotrópico.⁵
3. A geometria do universo é hiperbólico-circular. Nos planos puramente espaciais, XY , YZ e ZX a geometria é circular (*i.e.*, euclidiana), enquanto que nos planos que envolvam a dimensão temporal, TX , TY e TZ , a geometria é hiperbólica (*i.e.*, pseudo-euclidiana).

Em termos da descrição de Poincaré-Minkowski, qualquer referencial inercial pode ser representado por um sistema de coordenadas adequado (sistema de coordenadas inercial). O movimento de uma partícula fica representado por uma curva contínua – uma reta, caso a velocidade da partícula seja constante –, a que chamamos de *linha de universo* da partícula. Em especial, a velocidade da partícula determina-se pela tangente do ângulo (hiperbólico) que sua linha de universo faz com o eixo do tempo do sistema inercial empregado. Analogamente, a velocidade relativa entre dois referenciais, v , determina-se pela tangente do ângulo (hiperbólico) entre os eixos de tempo desses sistemas de coordenadas e uma mudança de referencial consiste, nessa descrição geométrica, a uma rotação hiperbólica⁶ dos eixos coordenados.

Através dos postulados apresentados acima, toda a teoria da relatividade pode ser formulada. Em especial, destacamos que a partir desses postulados podemos mostrar o *princípio de invariância da velocidade da luz* (pelo menos em duas dimensões). Com efeito, o fato de o espaço-tempo ter uma geometria hiperbólica implica a existência de uma classe de partículas cuja velocidade é sempre a mesma, independente do referencial inercial na qual ela é medida. Podemos nos convencer disso ao notar que em uma geometria hiperbólica existem certas retas (as assíntotas) que não se alteram quando uma rotação hiperbólica é implementada. Se, portanto, a linha de universo de uma partícula for paralela a uma dessas assíntotas, a sua direção será sempre a mesma para qualquer sistema de coordenadas inercial e, conseqüentemente, a partícula terá sempre a mesma velocidade para esses referenciais. O fato experimental

⁴A influência da gravidade será explicitamente desprezada nesse texto.

⁵Se o espaço e o tempo forem considerados separadamente, essa expressão deve ser substituída por “o espaço é homogêneo e isotrópico e o tempo é homogêneo”. Expressões semelhantes devem ser interpretadas de forma análoga.

⁶No caso em que $|v| > c$ devemos considerar uma rotação hiperbólica *estendida*, conforme será discutido na seção 4.

de que da velocidade luz é a mesma em qualquer referencial inercial fornece, assim, um forte argumento a favor do caráter hiperbólico do espaço-tempo.

Para uso futuro, faremos algumas definições e convenções que serão utilizadas durante o texto. Uma vez que estamos dispostos a levar em consideração partículas que se “movimentam” em qualquer direção do espaço-tempo, convém empregarmos uma métrica que seja sempre real e não-negativa. Optamos, assim, por definir a *métrica* pela expressão,

$$ds = \sqrt{|c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2|}. \quad (1)$$

A escolha da métrica, é claro, não pode interferir nos resultados finais da teoria, uma vez que sempre há certa liberdade em defini-la.

Em termos da métrica (1), vamos classificar os eventos como do tipo tempo, luz ou espaço conforme a quantidade $c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ seja positiva, nula ou negativa, respectivamente. Uma classificação semelhante pode ser atribuída a partículas e referenciais. Assim, por exemplo, partículas mais lentas que a luz (brádions) serão classificadas como partículas do *tipo tempo* e partículas mais rápidas que a luz (táquions) como partículas do *tipo espaço*. Partículas que se movem com a velocidade da luz (luxons) serão classificadas, é claro, como partículas do *tipo luz*.

Também classificaremos as partículas de acordo com a sua “direção de movimento” no tempo. Partículas que se movimentam para o futuro serão chamadas de *progressivas* e as que se movimentam para o passado, de *retrógradas*. Partículas que se movimentam com velocidade infinita só existem no instante presente e por isso serão chamadas de *momentâneas*. Uma classificação idêntica pode ser empregada a referenciais.

3. Antipartículas e o princípio da inversão

Na seção anterior introduzimos o conceito de partículas retrógradas como partículas que voltam no tempo. Nessa seção vamos esclarecer como elas podem ser interpretadas do ponto de vista físico. Para que a discussão se torne mais simples, entretanto, vamos considerar apenas partículas do tipo tempo, isto é, partículas com velocidade menor que a da luz.

Deixe-nos começar o nosso estudo analisando qual deve ser a energia de uma partícula retrógrada. Sabemos da teoria da relatividade usual que a energia de uma partícula (do tipo tempo) relaciona-se com sua massa e seu momentum através da expressão $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. Essa expressão quadrática tem duas soluções para a energia: uma raiz positiva e outra negativa (geometricamente, esta equação descreve, para m fixo, um hiperboloide de duas faces). Na teoria relatividade geralmente interpretamos os estados

de energia positiva como estados acessíveis a qualquer partícula livre progressiva, ou, em outras palavras, que na ausência de forças uma partícula progressiva sempre possui uma energia positiva. Em virtude dessa associação devemos, por consistência, interpretar os estados de energia negativa como acessíveis somente a partículas retrógradas, ou, em outros termos, que na ausência de forças, partículas retrógradas sempre possuem uma energia negativa.

Esses dois conceitos que separadamente não possuem sentido físico – a saber, partículas que voltam no tempo e partículas (livres) de energia negativa –, podem ser conciliados através do chamado *princípio da inversão*.⁷ Esse princípio baseia-se no fato de que qualquer observador considera o tempo como que fluindo do passado para o futuro e que qualquer medição da energia de uma partícula livre resulta em uma quantidade positiva. Desse modo, o princípio da inversão estabelece que uma partícula retrógrada (cuja energia é negativa) deve sempre ser fisicamente observada como uma partícula progressiva usual (cuja energia é positiva).

O leitor poderia assim pensar que não há diferenças entre partículas progressivas e retrógradas, já que aparentemente as últimas são vistas como as primeiras. No entanto, isso não é verdade, pois ao observarmos uma partícula retrógrada como progressiva, algumas de suas propriedades acabam por se inverterem no processo. Por exemplo, se a partícula retrógrada tem uma carga elétrica $+e$, então devido ao princípio de conservação de carga elétrica, devemos observar a “partícula invertida” como que portando a carga $-e$. Isso pode ser mais bem visualizado através da seguinte experiência.

Considere o fenômeno descrito na Fig. 1, onde uma partícula progressiva P , de carga elétrica $+e$, interage com um fóton γ e que, em virtude dessa interação, se torne uma partícula retrógrada, Q . Note que a partícula Q é, em verdade, a mesma partícula P , mas que agora se “movimenta” para trás no tempo. Portanto, a carga elétrica portada pela partícula Q é ainda igual a $+e$.

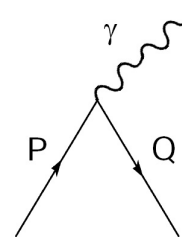


Figura 1 - A partícula progressiva P interage com o fóton γ e se transforma na partícula retrógrada Q .

Entretanto, quando esse processo for fisicamente observado, o observador fará uso do princípio da inversão (mesmo que de maneira inconsciente) e o fenômeno

⁷ *Switching principle*, em inglês. Às vezes o termo “*princípio da reinterpretção*” é também empregado.

passa a ser interpretado da seguinte forma: duas partículas de igual massa se aproximam e, em dado momento, colidem e se aniquilam, dando origem a um fóton. Desde que o fóton não tem carga elétrica e sabemos que a carga elétrica observada da partícula progressiva é $+e$, decorre que a carga elétrica observada da partícula retrógrada tem de ser $-e$. A conclusão que se tira disso é que o sinal da carga elétrica de uma partícula retrógrada se inverte no processo de observação.

Assim, uma partícula retrógrada de massa m e carga e é sempre vista como uma partícula progressiva de mesma massa e carga elétrica oposta. Ora, essas são justamente as propriedades esperadas de uma *antipartícula*. Portanto o princípio da inversão nos permite concluir que qualquer partícula retrógrada é observada fisicamente como uma antipartícula. O conceito de antipartículas pode ser visto, assim, como um conceito puramente relativístico; não é necessário se falar de mecânica quântica para se introduzir esse conceito.⁸

Por fim, deixe-nos comentar que esses argumentos também são válidos no caso de partículas do tipo espaço, ou seja, no caso dos táquions. No entanto, veremos na seção 8 que no caso dos táquions a energia se relaciona com o momentum e a massa através da relação $E^2 = p^2c^2 - m^2c^4$, equação esta que descreve um hiperboloide de folha única. Assim podemos verificar que os táquions possuem uma propriedade bem interessante: eles podem passar de uma partícula progressiva a uma retrógrada (e vice-versa) através de um simples movimento contínuo. Em outras palavras, ao acelerarmos um táquion podemos fazê-lo se transformar em um antitáquion e vice-versa (no momento dessa inversão, aliás, o táquion tornar-se-ia uma partícula momentânea, ou seja, uma partícula de velocidade infinita). Isso, é claro, só é possível para partículas do tipo espaço.

4. Dedução das transformações de Lorentz estendidas (em 2 dimensões)

Deixe-nos agora mostrar como as transformações de Lorentz podem ser generalizadas, ou estendidas, a referenciais que se movimentam com uma velocidade maior que a da luz, bem como para referenciais retrógrados. Nessa seção nos limitaremos, contudo, a formular uma teoria em duas dimensões. Como já foi comentado, em quatro dimensões nos deparamos com diversas dificuldades para se fazer essa extensão, as quais serão explicadas na seção 10. Apresentaremos a seguir duas deduções para as *Transformações de Lorentz Estendidas* (TLE), uma dedução algébrica e outra geométrica.

⁸A conexão entre partículas que voltam no tempo com antipartículas já foi, é claro, proposta por diversos cientistas (*e.g.*, Dirac [8], Stückelberg [9,10], Feynman [11,12], Sudarshan [13], Recami [5] etc.).

⁹Daqui em diante, sempre que falarmos nos referenciais R e R' assumiremos implicitamente que a velocidade relativa entre eles é v e que as condições estabelecidas acima são sempre satisfeitas.

¹⁰De fato, é apenas nesse caso que as transformações procuradas formam um grupo, conferir a Ref. [6].

Dedução algébrica: desde que, em duas dimensões, os postulados apresentados na seção anterior são suficientes para mostrar que a luz se propaga com mesma velocidade c em qualquer referencial inercial, podemos tomar esse resultado como o nosso ponto de partida.

Considere assim que um determinado evento tenha as coordenadas (ct, x) em relação a um referencial R e que para um outro referencial inercial R' , que se movimenta em relação a R com velocidade v , as coordenadas desse mesmo evento sejam (ct', x') . Suponha além disso que os eixos coordenados desses referenciais sejam igualmente orientados e que em $t' = t = 0$ a origem desses referenciais coincidam.⁹

Nessas condições, se um raio de luz for emitido da origem do referencial R no instante $t = 0$, então esse raio de luz se propagará, em relação a esse referencial, conforme a equação

$$x^2 - c^2t^2 = 0, \quad (2)$$

e, para R' , devido ao princípio de invariância da velocidade da luz, conforme uma equação análoga

$$x'^2 - c^2t'^2 = 0. \quad (3)$$

As Eqs. (2) e (3) implicam, portanto, que

$$x'^2 - c^2t'^2 = \lambda(v) (x^2 - c^2t^2), \quad (4)$$

onde $\lambda(v)$ não depende das coordenadas e do tempo, mas pode depender de v .

Por outro lado, desde que a velocidade do referencial R quando medida por R' é claramente $-v$, segue também que

$$x^2 - c^2t^2 = \lambda(-v) (x'^2 - c^2t'^2). \quad (5)$$

Conclui-se, assim, a partir das Eqs. (4) e (5), que $\lambda(v)\lambda(-v) = 1$. Entretanto, a hipótese de que o espaço-tempo é homogêneo e isotrópico impede que $\lambda(v)$ possa depender da direção da velocidade¹⁰ e somos levados à condição

$$\lambda(v)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda(v) = \pm 1. \quad (6)$$

Temos assim dois casos à considerar. Deixe-nos primeiro considerar o caso em que $\lambda(v) = +1$. Nesse caso a Eq. (4) se torna

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2, \quad (7)$$

e, como sabemos, a solução da Eq. (7) nos leva diretamente às transformações de Lorentz usuais,

$$ct' = \frac{ct - xv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8)$$

Note que essas transformações contêm a identidade (para $v = 0$) e são descontínuas apenas em $v = \pm c$. Consequentemente, essas transformações devem se aplicar a todo o intervalo $-c < v < c$, e somente a esse intervalo.

Esperamos assim que no outro caso, isto é, quando $\lambda(v) = -1$, as transformações encontradas estejam relacionadas à velocidades maiores que a da luz. Mostraremos agora que de fato é isso o que ocorre.

Para $\lambda(v) = -1$, a Eq. (4) se torna

$$x'^2 - c^2 t'^2 = -(x^2 - c^2 t^2). \quad (9)$$

Através das substituições formais $x \rightarrow \pm i\xi$ e $ct \rightarrow \pm i\tau$, podemos reescrever a Eq. (9) como

$$x'^2 - c^2 t'^2 = \xi^2 - c^2 \tau^2. \quad (10)$$

A Eq. (10) tem a mesma forma que a Eq. (7) e, portanto, admite mesma solução

$$ct' = \frac{c\tau - \xi v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11)$$

Expressando novamente essas equações em termos de x e t , obtemos

$$ct' = \pm \frac{ct - xv/c}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad x' = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad (12)$$

e agora só nos resta remover a ambiguidade dos sinais presente nessas transformações. O sinal correto, contudo, depende das “direções de movimento” dos referenciais R e R' no espaço-tempo, conforme pode ser visualizado na Fig. 2. No caso de uma transformação *progressiva* do tipo espaço, facilmente se pode mostrar que o sinal correto é o *negativo*.

Note que essas equações, assim como no caso anterior, são descontínuas apenas em $v = \pm c$, mas agora elas são reais somente quando $|v| > c$. Essas equações representam, por conseguinte, as transformações de Lorentz entre dois referenciais cuja velocidade relativa é maior que a da luz, onde o sinal correto depende se o referencial R' é progressivo ou retrógrado em relação à R e pode ser visualizado na Fig. 2.

Dedução geométrica: do ponto de vista geométrico, as TLE correspondem a uma rotação (hiperbólica) definida sobre a curva¹¹

$$|c^2 t^2 - x^2| = \rho^2. \quad (13)$$

Podemos chamar tal transformação de *rotação hiperbólica estendida*. Note que a Eq. (13) representa um par de hipérbolas equiláteras e ortogonais. As duas assíntotas dessa curva dividem o plano em quatro regiões desconexas, a que chamaremos de regiões I, II, III e IV, respectivamente (ver Fig. 2).

¹¹Tal rotação pode ser mais elegantemente descrita através do conceito de *números hiperbólicos* [14]. Um número hiperbólico é um número da forma $z = a + hb$, com $\{a, b\} \in \mathbb{R}$ e $h : \{h^2 = +1, h \notin \mathbb{R}\}$. Definindo-se o conjugado $\bar{z} = a - hb$, segue que $|z\bar{z}| = |a^2 - b^2| = \rho^2$, uma equação da mesma forma que a Eq. (13). Obtém-se assim uma completa analogia com os números complexos, mas com a diferença de que agora esses números descrevem uma geometria hiperbólica. Destacamos também que o mesmo pode ser feito através da chamada *álgebra geométrica do espaço-tempo* [15], com a vantagem de que esse formalismo talvez permita uma generalização à dimensões maiores.

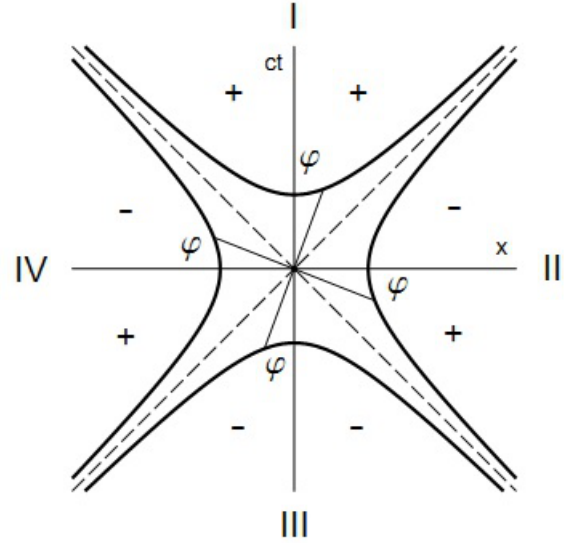


Figura 2 - Gráfico da curva $|c^2 t^2 - x^2| = \rho^2$, as regiões desconexas do espaço-tempo e os sinais que devem ser empregados nas transformações de Lorentz estendidas.

Para expressar tal rotação, convém introduzir as *funções hiperbólicas estendidas*, $\cosh_e \theta$ e $\sinh_e \theta$, definindo-as através das relações

$$ct = \rho \cosh_e \theta, \quad x = \rho \sinh_e \theta, \quad (14)$$

onde θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) é o *parâmetro circular* usual e ρ é dado pela Eq. (13). Note que nessa descrição geométrica a velocidade passa a ser dada pela expressão

$$v/c = \tanh_e \theta. \quad (15)$$

As expressões de $\cosh_e \theta$ e $\sinh_e \theta$, por sua vez, podem ser determinadas através das funções hiperbólicas usuais, $\cosh \varphi$ e $\sinh \varphi$, onde φ é o parâmetro hiperbólico usual, $-\infty < \varphi < \infty$. De fato, se introduzirmos em cada região do plano um parâmetro hiperbólico φ correspondente, o qual deve ser medido, por conveniência, como mostrado na Fig. 2, então as funções $\cosh \varphi$ e $\sinh \varphi$ nos permitem parametrizar cada um dos ramos da curva (13). Assim, uma vez especificada a região na qual θ pertence, ρ e φ determinam de forma única qualquer ponto da curva (13) e, portanto, determinam também as funções hiperbólicas estendidas. Com essas convenções, encontramos que

$$\cosh_e \theta \equiv \begin{cases} + \cosh \varphi, & \theta \in \text{I} \\ - \sinh \varphi, & \theta \in \text{II} \\ - \cosh \varphi, & \theta \in \text{III} \\ + \sinh \varphi, & \theta \in \text{IV} \end{cases}, \quad (16)$$

$$\sinh_e \theta \equiv \begin{cases} + \sinh \varphi, & \theta \in \text{I} \\ + \cosh \varphi, & \theta \in \text{II} \\ - \sinh \varphi, & \theta \in \text{III} \\ - \cosh \varphi, & \theta \in \text{IV} \end{cases},$$

onde os parâmetros θ e φ relacionam-se através da fórmula

$$\tanh_e \theta = \tan \theta = \begin{cases} + \tanh \varphi, & \theta \in (\text{I}, \text{III}) \\ - \coth \varphi, & \theta \in (\text{II}, \text{IV}) \end{cases}. \quad (17)$$

As expressões das funções hiperbólicas estendidas também podem ser encontradas sem se fazer uso das funções hiperbólicas usuais. Para isso parametrizamos a Eq. (13) através das funções circulares, colocando $ct = r \cos \theta$ e $x = r \sin \theta$, onde $r = \sqrt{c^2 t^2 + x^2}$. Isso nos permite escrever diretamente,

$$\cosh_e \theta = \frac{\cos \theta}{\sqrt{|\cos 2\theta|}}, \quad \sinh_e \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{|\cos 2\theta|}}. \quad (18)$$

ou, em termos da tangente,

$$\cosh_e \theta = \frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{|1 - \tan^2 \theta|}}, \quad \sinh_e \theta = \frac{\sigma(\theta) \tan \theta}{\sqrt{|1 - \tan^2 \theta|}}, \quad (19)$$

com

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} +1, & -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}. \quad (20)$$

A equivalência entre as Eqs. (16) e (18) ou (19) é encontrada quando se leva em conta a Eq. (17).

Uma vez definidas as funções hiperbólicas estendidas é fácil obter as expressões que descrevem uma rotação hiperbólica estendida. Sejam $(ct, x) = (\rho \cosh_e \theta_1, \rho \sinh_e \theta_1)$, as coordenadas de um ponto do plano para um sistema de coordenadas R , o qual supomos pertencer ao setor I do espaço-tempo. Se efetuarmos uma rotação hiperbólica passiva (*i.e.*, dos eixos coordenados), digamos por um ângulo θ_{12} , vamos obter um novo sistema de coordenadas R' e as coordenadas daquele mesmo ponto passarão a ser dadas agora por $(ct', x') = (\rho \cosh_e \theta_2, \rho \sinh_e \theta_2)$. Como $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$, segue que

$$ct' = \rho \cosh_e (\theta_1 - \theta_{12}), \quad x' = \rho \sinh_e (\theta_1 - \theta_{12}). \quad (21)$$

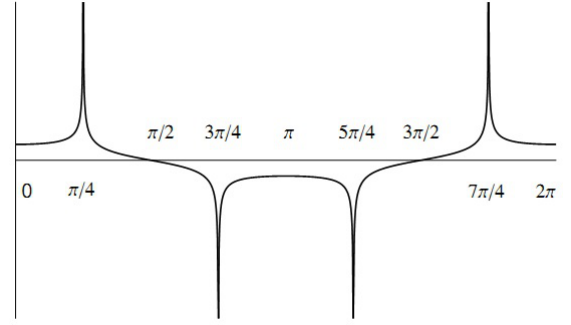


Figura 3 - Gráfico da função hiperbólica estendida, $\cosh_e \theta$. O gráfico da função $\sinh_e \theta$ é semelhante a este, mas com uma defasagem de $\pi/2$ rad.

Substituindo as expressões de $\cosh_e (\theta_1 - \theta_{12})$ e $\sinh_e (\theta_1 - \theta_{12})$ por qualquer uma das expressões acima e simplificando as expressões resultantes, levando-se ainda em conta a Eq. (17), pode-se verificar que (ct', x') relaciona-se com (ct, x) através das equações

$$ct' = \delta(\theta_{12}) (ct \cosh_e \theta_{12} - x \sinh_e \theta_{12}), \quad (22)$$

$$x' = \delta(\theta_{12}) (x \cosh_e \theta_{12} - ct \sinh_e \theta_{12}),$$

onde

$$\delta(\theta) = \begin{cases} +1, & \tan^2 \theta < 1 \\ -1, & \tan^2 \theta > 1 \end{cases}. \quad (23)$$

Por fim, utilizando a Eq. (19) e colocando $\tanh_e \theta_{12} = \tan \theta_{12} = v/c$, obtemos diretamente as transformações procuradas, que são idênticas às obtidas algebricamente

$$ct' = \varepsilon(\theta_{12}) \frac{ct - xv/c}{\sqrt{|1 - v^2/c^2|}}, \quad x' = \varepsilon(\theta_{12}) \frac{x - vt}{\sqrt{|1 - v^2/c^2|}}, \quad (24)$$

onde $\varepsilon(\theta_{12}) = \sigma(\theta_{12}) \delta(\theta_{12})$ determina o sinal correto que deve figurar na frente dessas transformações, conforme está indicado na Fig. 2.

Para encerrar esta seção convém mencionar que as transformações de Lorentz estendidas, em conjunto com o princípio da inversão, explicam de forma simples a validade universal do teorema CPT, no qual as leis da física devem ser invariantes por transformações na qual a carga, a paridade e o sentido do tempo são invertidos. Efetivamente, a inversão temporal corresponde a uma simples rotação hiperbólica estendida de π radianos e, pelo princípio da inversão, qualquer partícula que seja observada por esse referencial girado deve ter a sua carga elétrica e paridade invertidas. Desta forma podemos ver que qualquer violação do teorema CPT implicaria na violação direta das Transformações de Lorentz estendidas.

5. A lei de composição de velocidades e as transformações inversas

As transformações deduzidas na seção anterior formam um grupo, no qual as transformações de Lorentz or-

dinárias constituem apenas um subgrupo. Deixe-nos demonstrar essa estrutura.

Em primeiro lugar, notemos que a identidade é obtida quando se faz $v = 0$. Mostraremos agora que a composição de duas TLE resulta ainda em outra TLE. Para isso introduzimos um terceiro referencial inercial R'' , que se movimenta em relação a R' com velocidade $u = c \tanh_e \theta_{23}$. Por outro lado, supomos que o referencial R' movimenta-se com a velocidade $v = c \tanh_e \theta_{12}$ em relação a R . A lei de transformação entre R e R' já conhecemos, ela pode ser escrita como

$$ct' = \varepsilon(\theta_{12}) \frac{ct - x \tanh_e \theta_{12}}{\sqrt{|1 - \tanh_e^2 \theta_{12}|}}$$

$$x' = \varepsilon(\theta_{12}) \frac{x - ct \tanh_e \theta_{12}}{\sqrt{|1 - \tanh_e^2 \theta_{12}|}}$$
(25)

Por sua vez, a lei de transformação de R' para R'' pode ser escrita por uma expressão análoga

$$ct'' = \varepsilon'(\theta_{23}) \frac{ct' - x' \tanh_e \theta_{23}}{\sqrt{|1 - \tanh_e^2 \theta_{23}|}}$$

$$x'' = \varepsilon'(\theta_{23}) \frac{x' - ct' \tanh_e \theta_{23}}{\sqrt{|1 - \tanh_e^2 \theta_{23}|}}$$
(26)

Nessas equações, $\varepsilon'(\theta_{23})$ determina os sinais correspondentes às transformações de R' para R'' , os quais não precisam necessariamente ser iguais aos sinais presentes nas transformações de R para R' . De fato, enquanto na definição de $\varepsilon(\theta_{12})$ o referencial de partida, R , era suposto pertencer à região I do espaço-tempo, o referencial R' pode pertencer a qualquer região. Assim, $\varepsilon'(\theta_{23})$ é uma função ainda a se determinar.

A substituição da Eq. (25) na Eq. (26) nos fornece a lei de transformação entre R e R'' . Após algumas simplificações, pode-se verificar que as expressões obtidas possuem a mesma forma de uma TLE, a saber,

$$ct'' = \varepsilon''(\theta_{13}) \frac{ct - x \tanh_e \theta_{13}}{\sqrt{|1 - \tanh_e^2 \theta_{13}|}}$$

$$x'' = \varepsilon''(\theta_{13}) \frac{x - ct \tanh_e \theta_{13}}{\sqrt{|1 - \tanh_e^2 \theta_{13}|}}$$
(27)

onde,

$$\varepsilon''(\theta_{13}) = \frac{\varepsilon(\theta_{12}) \varepsilon'(\theta_{23})}{\delta(\theta_{12}, \theta_{23})},$$
(28)

com

$$\delta(\theta_{12}, \theta_{23}) = \begin{cases} +1, & -\tan \theta_{12} \tan \theta_{23} < 1 \\ -1, & -\tan \theta_{12} \tan \theta_{23} > 1 \end{cases},$$
(29)

e

$$\tanh_e(\theta_{13}) = \frac{\tanh_e \theta_{12} + \tanh_e \theta_{23}}{1 + \tanh_e \theta_{12} \tanh_e \theta_{23}} = \tanh_e(\theta_{12} + \theta_{23}).$$
(30)

Através da Eq. (17) podemos verificar que a Eq. (30) consiste em uma generalização da fórmula de adição das tangentes hiperbólicas, o que revela o seu significado geométrico. Em termos das velocidades, a Eq. (30) pode ser reescrita como

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}.$$
(31)

A Eq. (31) expressa a lei de composição de velocidades em nossa teoria. Ela é exatamente igual à expressão obtida na teoria da relatividade usual, mas agora aplica-se a quaisquer valores de velocidade.

Podemos igualmente mostrar que existe a transformação inversa. Para isso podemos colocar na Eq. (27) as condições $ct'' = ct$ e $x'' = x$, e requerer que a transformação resultante seja a identidade. Assim verificamos que é necessário se ter $\theta_{23} = -\theta_{12}$ e $\varepsilon''(\theta_{13}) = 1$. Com essas condições torna-se possível calcular $\varepsilon'(\theta_{23})$ através da expressão resultante de $\varepsilon''(\theta_{13})$. De fato, encontramos que

$$\varepsilon'(\theta_{23}) = \delta(\theta_{12}) / \varepsilon(\theta_{12}) = \sigma(\theta_{12}),$$
(32)

já que $\delta(\theta_{12}, -\theta_{12}) = \delta(\theta_{12})$, com $\delta(\theta_{12})$ definido pela Eq. (23).

Substituindo esse resultado na Eq. (26) obtemos então, em termos das velocidades, as expressões procuradas das transformações inversas,

$$ct = \varepsilon^{-1}(\theta_{12}) \frac{ct' + x'v/c}{\sqrt{|1 - v^2/c^2|}}$$

$$x = \varepsilon^{-1}(\theta_{12}) \frac{x' + vt'}{\sqrt{|1 - v^2/c^2|}}$$
(33)

onde colocamos $\varepsilon^{-1}(\theta_{12}) = \sigma(\theta_{12})$. Note que os sinais das transformações inversas diferem dos que aparecem nas transformações diretas. Essa diferença deve-se ao fato já comentado de que na transformação $R \rightarrow R'$, assumimos que o referencial de partida pertencia sempre à região I do espaço-tempo, enquanto que na transformação inversa, $R' \rightarrow R$, é o referencial de chegada que fixamos à região I. Quando $|v| < c$ essa assimetria não interfere em nada, já que nesse caso os sinais são sempre iguais nas duas definições, contudo, no caso em que $|v| > c$, decorre que as transformações inversas não podem ser obtidas simplesmente pela substituição de v por $-v$, ainda é necessário multiplicá-las por -1 .

Por fim, mencionamos que a associatividade das TLE pode ser igualmente demonstrada, o que completa a sua estrutura de grupo.

6. Referenciais conjugados

Introduziremos agora um importante conceito que só pode ser contemplado em uma teoria estendida da relatividade: o conceito de *referenciais conjugados*. A definição é a seguinte: dois referenciais são ditos conjugados se a velocidade relativa entre eles for infinita. Assim por exemplo, o referencial conjugado à R' (que, lembremos, se movimenta com velocidade v em relação a R) consiste em um referencial R^* cuja velocidade é, em relação a R , igual a $w = c^2/v$. De fato, obtemos da Eq. (31)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{u+v}{1+uv/c^2} \right) = \frac{c^2}{v}. \quad (34)$$

É interessante notar que a velocidade $w = c^2/v$ é idêntica à velocidade de propagação das ondas quânticas de De Broglie. *Grosso modo*, isso permitiria interpretar as ondas de De Broglie como o resultado de uma espécie de campo que, para o referencial próprio da partícula quântica, se propaga com uma velocidade infinita.

No que diz respeito à teoria dos táquions, a importância do conceito de referenciais conjugados provém do fato de que uma transformação do tipo espaço entre dois referenciais, digamos, entre R e R' , pode ser obtida por uma transformação de Lorentz usual entre os referenciais R e R^* , bastando para isso fazer as substituições $v \rightleftharpoons c^2/v$, $ct^* \rightleftharpoons x$ e $x^* \rightleftharpoons ct$. De fato, desde que $w = c^2/v$ é menor que c para $v > c$, segue que a transformação de R para R^* é dada por

$$ct^* = \frac{ct - xw/c}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad x^* = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad (35)$$

e podemos verificar que essas expressões se reduzem às transformações corretas entre R e R' ao efetuarmos as substituições indicadas acima.

Do ponto de vista geométrico a passagem de um referencial para o seu conjugado consiste em uma reflexão dos seus eixos coordenados em relação às assíntotas da curva (13), já que tal reflexão tem justamente o efeito de trocar ct por x e vice-versa (e, conseqüentemente, o de substituir v por c^2/v). Vemos assim que uma transformação de Lorentz estendida pode ser reduzida a uma transformação de Lorentz usual através de apropriadas reflexões em torno das assíntotas (para o caso das transformações do tipo espaço) e em torno da origem (para uma transformação retrógrada do tipo tempo). Isso nos fornece uma nova maneira de se deduzir as TLE.

Note, além disso, que se uma partícula tiver velocidade $u = c^2/v$ em relação ao referencial R , então ela terá uma velocidade infinita para o referencial R' , ou seja, ela será uma partícula momentânea para esse referencial. Assim, podemos verificar que se a velocidade da partícula for $u > c^2/v$ e, além disso, tivermos $v < c$, então essa partícula se tornará retrógrada para R' , e será observada como uma antipartícula por esse

referencial. Se, do contrário, tivermos $v > c$, então o referencial R' observará uma antipartícula sempre que $u < c^2/v$.

Desde que a velocidade relativa do referencial R' em relação a R é $-v$, decorre também que uma partícula de velocidade $u' = -c^2/v$ terá velocidade infinita em R . Assim, no caso em que se tem $|v| < c$, o referencial R verá uma antipartícula se $u' < -c^2/v$, e no caso em que $|v| > c$, ele só observará uma antipartícula se $u' > -c^2/v$. Essas relações, é claro, podem ser mais facilmente encontradas pela análise da Eq. (30) ou da Eq. (31).

7. Réguas e relógios

Considere dois relógios idênticos, mas com um deles fixo no referencial R , enquanto que o outro é fixo no referencial R' . Desejamos comparar o ritmo de funcionamento desses relógios, quando medido por um desses referenciais. Por exemplo, suponha que desejamos comparar o ritmo do relógio fixo em R' com o relógio fixo em R , quando ambos os relógios são medidos por R . Para isso, considere que o relógio de R' leve o tempo τ' para dar uma oscilação completa, quando o tempo é medido por esse mesmo referencial. O tempo T correspondente a oscilação desse relógio para o referencial R pode ser encontrado através das transformações inversas (33), se lembrarmos que $\Delta x' = 0$, já que o relógio analisado está fixo em R' . Obtemos assim que

$$T = \varepsilon^{-1}(\theta) \frac{\tau'}{\sqrt{|1 - v^2/c^2|}}. \quad (36)$$

Podemos então verificar que um relógio progressivo (em relação a R) em movimento trabalha em um ritmo mais lento que um relógio em repouso quando a sua velocidade for menor que a da luz (como, aliás, é bem sabido). Mas para um relógio mais rápido que a luz, o seu ritmo de funcionamento continua a ser menor para $|v/c| < \sqrt{2}$ e passa a ser maior quando $|v/c| > \sqrt{2}$. É interessante notar que para $|v/c| = \sqrt{2}$ ambos os relógios voltam a funcionar no mesmo ritmo. Além disso, no caso de um relógio retrógrado, o relógio em movimento marcará o tempo de trás para frente, o que expressa o simples fato de que relógios retrógrados devem marcar o tempo no sentido do futuro para o passado.

Deixe-nos agora verificar como o relógio fixo em R se comporta em relação ao relógio de R' , quando os tempos são medidos por esse último referencial. Nesse caso devemos utilizar as transformações diretas e obtemos

$$T' = \varepsilon(\theta) \frac{\tau}{\sqrt{|1 - v^2/c^2|}}, \quad (37)$$

onde τ é o tempo gasto pelo relógio fixo em R (*i.e.*, que se move com velocidade $-v$ para R') para dar uma oscilação completa, sendo que esse tempo é medido por R . Agora, o sinal que aparece na Eq. (37) é determinado

conforme a Fig. (2) e a análise se torna pouco mais ou menos complicada. É claro que não há problemas quando $|v| < c$, passemos então a analisar o caso em que $|v| > c$. Suponha primeiro que o referencial R' seja progressivo em relação a R . Nesse caso encontramos que $\varepsilon(\theta) = -1$ e o relógio que para R' se movimenta com velocidade $-v$ trabalha no sentido contrário ao do relógio fixo em R' . Isso significa que o relógio de R é retrógrado em relação à R' . Que isso é verdade pode ser verificado através do que foi comentado na seção anterior, onde se deve notar que $u = 0$ e $|v| > c$ (e que, por conseguinte, $u < c^2/v$).

No entanto, essa é uma situação interessante porque acabamos de ver que para o referencial R , o relógio em movimento funciona no mesmo sentido que o seu relógio, em repouso. Assim, enquanto um dos referenciais insiste que os relógios funcionam ao contrário, o outro discorda, afirmando que ambos os relógios trabalham no mesmo sentido! No caso em que o referencial R' é retrógrado em relação a R a assimetria ainda persiste, mas agora é o referencial R que verá ambos os relógios funcionarem no sentido contrário, enquanto que para R' os relógios funcionarão no mesmo sentido. Essa assimetria, é claro, tem origem na própria assimetria entre as transformações diretas e inversas.

Considere agora duas réguas idênticas, uma colocada no referencial R e outra no referencial R' . Desejamos comparar o comprimento dessas réguas, quando analisadas por um desses referenciais. Se l'_0 é o comprimento da régua fixa em R' quando medida por esse referencial, então o seu comprimento L , como medido por R , é obtido ao se determinar onde se encontram os extremos da régua em movimento em um dado instante t . Fazendo uso das transformações diretas, encontramos que

$$L = \varepsilon(\theta) \cdot l'_0 \sqrt{|1 - v^2/c^2|}. \quad (38)$$

Para $|v| < c$ reencontramos à contração de Lorentz, mas para $|v| > c$ obtemos que a régua em movimento será menor que a régua em repouso quando $|v/c| < \sqrt{2}$ e voltará a ter o mesmo comprimento quando $|v/c| = \sqrt{2}$. Por fim, para $|v/c| > \sqrt{2}$ teremos uma “dilatação de Lorentz”. Além disso, considerando que o referencial R' é progressivo em relação a R , decorre que para R a régua em movimento estará orientada contrariamente a sua régua, em repouso.

Se, por outro lado, as medições são feitas por R' , então encontramos que

$$L' = \varepsilon^{-1}(\theta) \cdot l_0 \sqrt{|1 - v^2/c^2|}, \quad (39)$$

e agora para R' a régua em movimento (que tem velocidade $-v$) apontará para o mesmo sentido que a sua régua em repouso. Encontramos assim as mesmas assimetrias comentadas mais acima.

Esses resultados podem, é claro, ser obtidos – e mais bem compreendidos – através dos diagramas de Minkowski.

8. Dinâmica

Nesta seção pretendemos responder a algumas questões referentes à dinâmica dos táquions. Expressões para a energia e o momentum de uma partícula mais rápida que a luz serão deduzidas e mostraremos como tais partículas se comportam quando na presença de um campo de forças.

Como ponto de partida assumiremos que o princípio da ação estacionária aplica-se também à partículas mais rápidas que a luz. Isso, é claro, segue diretamente da hipótese de que o espaço-tempo é isotrópico e homogêneo, uma vez que sabemos que esse princípio é válido para partículas mais lentas que a luz.

Como se sabe, o princípio da ação estacionária afirma que existe uma quantidade S , chamada *ação*, que assume um valor extremo (máximo ou mínimo) para qualquer movimento possível de um sistema mecânico (no nosso caso, uma partícula). Por outro lado, na ausência de forças o movimento de uma partícula corresponde a uma geodésica do espaço-tempo, curva esta que se reduz a uma reta quando desprezamos a gravitação. Isso significa que no caso de uma partícula livre a diferencial da ação dS deve ser proporcional ao elemento de linha ds da partícula e podemos escrever

$$dS = \alpha ds, \quad ds = \sqrt{|c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2|}. \quad (40)$$

Temos de enfatizar, entretanto, que a constante de proporcionalidade α pode assumir valores diferentes em regiões diferentes do espaço-tempo, uma vez que essas regiões são completamente desconexas. Portanto, é conveniente considerar cada caso separadamente.

No caso de uma partícula progressiva do tipo tempo, a Eq. (40) assume a forma,

$$dS = \mathcal{L}(u) dt, \quad \mathcal{L}(u) = \alpha c \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (41)$$

onde introduzimos a função de Lagrange, $\mathcal{L}(u)$, para expressar a ação em termos da velocidade da partícula.

Como se sabe, as expressões para a energia e momentum são obtidas pelas fórmulas

$$p(u) = \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial u}, \quad E(u) = u \cdot \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial u} - \mathcal{L}(u). \quad (42)$$

Aplicando-se a Eq. (42) na Eq. (41) obtemos, assim,

$$p(u) = -\frac{\alpha u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad E(u) = -\frac{\alpha c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (43)$$

Para determinar α podemos usar o fato de que essas expressões devem, para baixas velocidades, se reduzir às expressões obtidas pela mecânica de Newton. Assim, por exemplo, se expandirmos a expressão para o momentum em uma série de potências de u/c e retermos apenas o primeiro termo, encontramos que $p \approx -\alpha u/c$,

ao passo que a mecânica de Newton nos fornece $p = mu$. Vemos desta forma que $\alpha = -mc$ e, portanto, obtemos

$$p(u) = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad E(u) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (44)$$

que são justamente as expressões conhecidas da relatividade usual.

Já no caso de uma partícula progressiva do tipo espaço (*i.e.*, no caso de um táquion progressivo), a função de Lagrange assume a forma

$$\mathcal{L}(u) = \alpha c \sqrt{u^2/c^2 - 1}, \quad (45)$$

e obtemos, por meio da Eq. (42), as seguintes expressões para o momentum e energia dessa partícula,

$$p(u) = \frac{\alpha u/c}{\sqrt{u^2/c^2 - 1}}, \quad E(u) = \frac{\alpha c}{\sqrt{u^2/c^2 - 1}}. \quad (46)$$

A constante α , entretanto, não pode mais ser calculada através da comparação dessas expressões com as que são obtidas pela mecânica de Newton, já que a velocidade da partícula é nesse caso sempre maior que a da luz. Mas podemos, em contrapartida, calcular o limite dessas expressões para quando $u \rightarrow \infty$, e assim procedendo encontramos que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} p(u) = \alpha, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} E(u) = 0, \quad (47)$$

de onde se pode ver que α consiste no momentum de uma partícula momentânea, ou seja, de velocidade infinita.

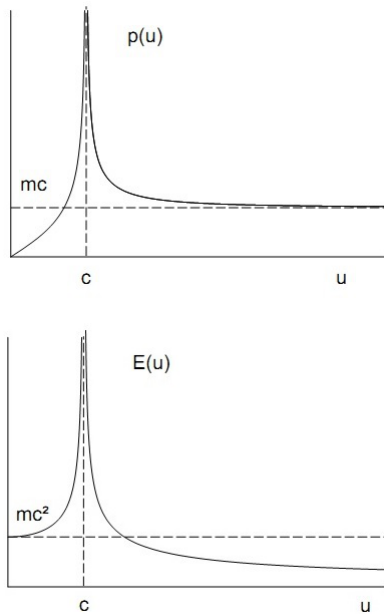


Figura 4 - Gráficos para o momentum e energia de uma partícula progressiva com velocidade $0 \leq u < \infty$.

Desde que a massa de uma partícula deve ser um invariante universal, segue que podemos definir uma

métrica também no espaço da energia e dos momenta. Fazendo uma analogia com a Eq. (1), podemos definir essa *métrica dinâmica* como

$$c^2 dm = \sqrt{|dE^2 - c^2 dp_x^2 - c^2 dp_y^2 - c^2 dp_z^2|}. \quad (48)$$

Assim, segue que a massa, a energia e o momentum de uma partícula devem estar relacionados sempre pela fórmula $mc^2 = \sqrt{|E^2 - c^2 p^2|}$. Se colocarmos, nessa última equação, $E = 0$, obtemos que $p = mc = \alpha$ (onde assumimos p é positivo para u positivo). Concluímos deste modo que o momentum e a energia de um táquion são dadas pelas as expressões (note que essas quantidades, inclusive a massa m , são sempre quantidades reais)

$$p(u) = \frac{mu}{\sqrt{u^2/c^2 - 1}}, \quad E(u) = \frac{mc^2}{\sqrt{u^2/c^2 - 1}}. \quad (49)$$

Esse resultado pode também ser obtido através do emprego dos referenciais conjugados, introduzidos na seção 6. Suponha que uma partícula tenha velocidade $u > c$ para um referencial R . Então para o referencial conjugado R^* ela terá energia $E^* = cp$ e momentum $p^* = E/c$, enquanto que a sua velocidade passa a ser $w = c^2/u$, que é menor que c . Mas as expressões para o momentum e energia de um brádion (*i.e.*, de uma partícula do tipo tempo) são dadas pela Eq. (42), e obtemos, por conseguinte,

$$p^* = \frac{mw}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad E^* = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \quad (50)$$

Podemos então verificar que as substituições de E^* , p^* e w nas fórmulas acima resultam exatamente na expressão (49).

No caso de partículas retrógradas, a função de Lagrange troca de sinal, já que dt é negativo e $\mathcal{L} = dS/dt$. Por conseguinte, partículas retrógradas devem ter energia negativa, um resultado que já havíamos indicado na seção 3.

Por fim, deixe-nos mostrar como uma partícula do tipo espaço deve se comportar quando submetida a um campo de forças. A força que atua na partícula continua, é claro, sendo dada pela lei de Newton, $\dot{p} = F$, mas agora p é dado pela Eq. (49). Calculando a derivada, obtemos

$$F = -\frac{ma}{(u^2/c^2 - 1)^{3/2}}, \quad (51)$$

onde $a = du/dt$ denota a aceleração da partícula. Note que a força é dirigida no sentido oposto à aceleração. Consequentemente duas partículas do tipo espaço que *dinamicamente* se atraem (se repelem) devem se afastar (se aproximar) uma da outra. Os conceitos de atração-aproximação e de repulsão-afastamento, portanto, não são mais equivalentes quando lidamos com táquions.

9. Causalidade e o paradoxo de Tolman

Outro argumento geralmente empregado para se mostrar que partículas mais rápidas que a luz não podem existir é que a sua existência implicaria uma violação do princípio de causalidade. Com efeito, suponha que um táquion seja emitido por um corpo A no instante t_A e que ele seja absorvido por outro corpo B no instante t_B , onde $t_B > t_A$. Como esses dois eventos (emissão de um táquion por A e sua absorção por B) estão separados por uma distância do tipo espaço, sabemos da teoria da relatividade que é possível encontrar um outro referencial, com velocidade menor que a da luz, onde a ordem cronológica desses eventos se inverte. Assim, se assumirmos que o evento em A é a causa do evento B , chegaremos então à conclusão de que, para esse referencial em movimento, o efeito precede a sua causa.

Portanto, se admitirmos que os conceitos de causa e efeito são *absolutos*, e que a causa sempre precede o seu efeito, efetivamente seremos levados à conclusão de que partículas mais rápidas que a luz não podem existir. No entanto, não há nada do ponto de vista matemático que dê suporte a essa hipótese. Pelo contrário, se admitirmos uma completa isotropia e homogeneidade do espaço-tempo, então não temos outra escolha senão considerar os conceitos de causa e efeito como que *relativos*.

Já vimos, é claro, outras quantidades que eram consideradas absolutas na teoria da relatividade usual e tiveram de ser vistas agora como relativas. Um exemplo é o conceito de emissão e absorção. Uma vez que pelo princípio da inversão não observamos partículas retrógradas mas sim antipartículas progressivas, os processos de emissão (absorção) de partículas retrógradas devem sempre ser observadas como uma absorção (emissão) de antipartículas. Podemos, é claro, descobrir se uma partícula foi de fato emitida (absorvida) se analisarmos o processo no referencial onde a fonte (emissor) está em repouso – nesse caso falaremos de uma emissão (absorção) *intrínseca* ou *própria*.

O caráter relativo da causalidade, todavia, não leva a nenhuma contradição à teoria. Na natureza, um fenômeno nunca descreve um evento isolado, mas sim uma sucessão contínua de eventos, a que podemos chamar de *processo físico*. Geometricamente um processo descreve uma curva contínua no espaço-tempo e portanto tem um caráter absoluto: a ordem temporal com que os eventos ocorrem podem diferir de referencial para referencial, mas a curva em si, correspondente ao fenômeno em questão, é a mesma para qualquer um deles. Isso, por exemplo, é suficiente para mostrar que não podemos voltar no tempo e matar o nosso avô. De fato, o simples fato de existirmos significa que existe uma curva no espaço tempo conectando o nosso avô a nós e, por essa curva ter caráter absoluto, ela não pode ser (estar) desconectada por (para) qualquer observador, mesmo que este voltasse no tempo.

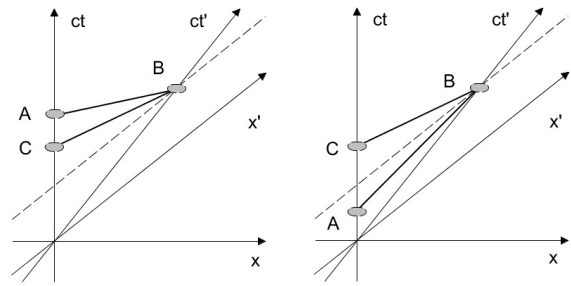


Figura 5 - Experimento imaginado por Tolman. A primeira figura descreve a situação aparentemente paradoxal do experimento. A segunda, o que de fato ocorre quando as mensagens são enviadas e recebidas intrinsecamente.

Como exemplo de um paradoxo que envolve o conceito de causalidade, deixe-nos analisar o interessante paradoxo proposto e discutido por Tolman [16] em 1917, embora ele já tivesse sido apontado dez anos antes por Einstein [17]. A argumentação que apresentaremos a seguir baseia-se nas Refs. [5, 18] e maiores detalhes podem ser conferidos também nas Refs. [5, 18–20].

O paradoxo consiste em mostrar que se existissem partículas mais rápidas que a luz, então seria possível enviar informações para o passado. Para mostrar isso, considere que os referenciais R e R' (com R' movendo-se com uma velocidade $v < c$ em relação a R) sejam equipados com certos aparelhos telefônicos especiais, cuja comunicação é feita através da transmissão de táquions. Imagine, assim, que um observador em R envie (evento A) uma mensagem, digamos na forma de uma pergunta, para R' e que, após o seu recebimento (evento B), um observador em R' mande de volta para R a sua resposta, que é então recebida por R (evento C). Acontece que, como pode ser visto na Fig. 5a, o observador em R' poderia em tese calibrar o seu aparelho de modo que a mensagem enviada por ele chegue em R antes que esse observador tenha enviado a sua pergunta. Assim, uma vez que R obtém a resposta antes mesmo de fazer a pergunta, R poderia deixar de fazê-la, no caso em que não poderia haver qualquer resposta por parte de R' , o que constitui uma situação paradoxal.

A falha nessa argumentação reside no uso simultâneo de ambos os referenciais na descrição do fenômeno, principalmente quando os termos “emissão” e “absorção” são empregados. De fato, mostraremos agora que se o referencial R' receber *intrinsecamente* a pergunta enviada por R , e também enviar *intrinsecamente* a sua resposta, então o referencial R sempre receberá a resposta de R' depois de ter enviado a sua pergunta.

Para isso, suponha que a pergunta de R seja enviada com uma velocidade u_1 e que a resposta volte com uma velocidade u_2 , com ambas as velocidades maiores que a da luz e medidas sempre por R . Então note que para a resposta de R' chegar antes da pergunta de R , é necessário que se tenha $|u_1| > |u_2|$, porque para R

o evento C é anterior a A e ambos chegam em B no mesmo instante. No entanto, para que o referencial R' receba *intrinsecamente* a pergunta de R é necessário que se tenha $|u_1| < c^2/v$, já que do contrário, conforme vimos na seção 6, essa mensagem seria retrógrada para R' e o observador em R' veria simplesmente a emissão de uma mensagem por meio da transmissão de antitáquions, conforme prediz o princípio da inversão. Da mesma forma, para que R' emita *intrinsecamente* a sua resposta, devemos ter $|u_2| > c^2/v$, já que a resposta é enviada na direção negativa do eixo X de R . Assim, mostramos que $|u_2| > |u_1|$, uma contradição.

Portanto, se o referencial R' de fato recebe a pergunta de R e de fato emite a sua resposta, então o processo será descrito, em verdade, pela Fig. 5b e não pela Fig. 5a. Nesse caso, a resposta sempre chegará depois da pergunta.

É claro que a Fig. 5a também representa um processo físico válido, mas não se refere efetivamente à situação descrita no paradoxo de Tolman. Além disso, nesse caso cada referencial terá a sua própria visão do que ocorre. Por exemplo, para o referencial R a Fig. 5a corresponde ao caso onde, primeiramente, há o envio da mensagem C (por meio de antitáquions) e, logo depois, o envio da mensagem A (por meio de táquions), por fim, ambas as mensagens chegam juntas em B . Já para R' tudo se passa como se ele enviasse a mensagem C para R por meio de antitáquions e, ao mesmo tempo, enviasse a mensagem A por meio de táquions, então após algum tempo ele veria que o observador em R recebe a mensagem C e depois a mensagem A . Note que a ordem cronológica dos eventos depende do referencial considerado, mas o processo em si (que interliga os eventos A , B e C) é único.

10. Dificuldades para se formular a teoria dos táquions em 4 dimensões

Na seção 4 conseguimos com êxito mostrar que em duas dimensões as transformações de Lorentz podem ser estendidas, de modo a relacionar qualquer par possível e imaginável de referenciais inerciais (com exceção daqueles que se movimentam com a velocidade da luz, é claro). Quando, porém, tentamos fazer o mesmo em quatro dimensões, nos deparamos com sérias dificuldades, as quais serão brevemente discutidas aqui.

Deixe-nos lembrar o leitor que ao estender as transformações de Lorentz em duas dimensões, fizemos o uso de um importante princípio: aquele que afirma que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial. Vimos, aliás, que em duas dimensões esse princípio pode ser deduzido a partir dos postulados apresentados na seção 2, de modo que ele pode ser visto como um teorema da própria teoria da relatividade. Quando, todavia, passamos para um universo de 4 dimensões, não é mais possível mostrar a validade geral desse teorema da mesma forma que fizemos lá, de modo que em qua-

tro dimensões não podemos nem mesmo afirmar que a luz se propaga em superfícies esféricas e com velocidade c em *qualquer* referencial inercial.

Para mostrar mais claramente a origem dessa dificuldade, deixe-nos considerar por exemplo uma fonte de luz fixa na origem do referencial R e supor que em relação a esse referencial a luz se propague em superfícies esféricas e com velocidade c . Em quatro dimensões as assíntotas do espaço-tempo são substituídas por um cone – o cone de luz. O lugar geométrico (no espaço-tempo) de um raio de luz que é emitido por uma fonte fixa em R é justamente esse cone de luz.

A teoria da relatividade usual mostra também que para qualquer outro referencial inercial do tipo tempo, a propagação dessa luz é ainda representada por esse mesmo cone de luz. Mas como a luz deve se comportar para um referencial R' do tipo espaço? Nesse caso, o eixo do tempo desse referencial estará sempre na região externa ao cone de luz de R , de modo que não é evidente que a luz emitida pela fonte fixa em R deva se propagar em superfícies esféricas de velocidade c para R' . Além disso, podemos nos perguntar o que acontece quando uma fonte fixa em R' emite luz. Será que para R' essa luz se propagará em superfícies esféricas de velocidade c ? E para o referencial R , onde a fonte tem velocidade $v > c$, o que ocorre?

Como se pode ver, há várias questões que não podem ser respondidas de imediato, sem se ter informações adicionais. De fato, o comportamento da luz depende de suas propriedades intrínsecas, as quais são determinadas por uma teoria eletromagnética que *a priori* desconhecemos. Deixe-nos analisar um pouco mais essas possibilidades.

Podemos supor, por exemplo, que a fonte de luz fixa em R' (que vamos supor ter velocidade maior que a da luz) também emita ondas esféricas e com velocidade c para esse mesmo referencial. Então agora deve existir um outro cone de luz, correspondente à esse referencial do tipo espaço e que deve contornar o eixo do tempo de R' . Uma vez que o eixo do tempo de R sempre estará fora desse novo cone de luz, segue que para R a luz emitida pela fonte em movimento não se propagará em superfícies esféricas de velocidade c , mas antes terá a forma de um hiperboloide de dupla face. Nesse caso a velocidade dos raios luminosos dependeria, por conseguinte, da sua direção de propagação e o espaço não poderia mais ser considerado isotrópico.

Se, do contrário, considerarmos que a luz emitida pela fonte em R' se propaga em superfícies esféricas com respeito ao referencial R , ou seja, que no universo existe apenas um cone de luz, e que o lugar geométrico dessa luz sempre pertence a esse cone, não importando qual seja a velocidade da fonte que a emitiu, então podemos verificar que embora a luz se propague em superfícies esféricas de velocidade c para R , o mesmo não ocorre para R' , o qual deve observar a luz se propagando em hiperboloides de dupla face.

Para que a luz se propague em superfícies esféricas de velocidade c em ambos os referenciais é necessário que as coordenadas transversais, y' e z' , do referencial R' sejam imaginárias (assumindo que y e z são reais). Pois somente desse modo se pode mapear um cone de luz do “tipo tempo” em um cone de luz do “tipo espaço”. Com efeito, isso pode ser demonstrado ao se deduzir as TLE em 4 dimensões, assumindo desde o início a validade do princípio de invariância da velocidade da luz para qualquer referencial inercial. De fato, teremos nesse caso,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \lambda(v) (x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2), \quad (52)$$

no lugar da Eq. (4). Como se sabe, a solução dessa equação para $\lambda(v) = +1$ consiste nas transformações de Lorentz usuais, enquanto que, para $\lambda(v) = -1$ obtemos

$$ct' = \pm \frac{ct - xv/c}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad x' = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad (53)$$

$$y' = \pm iy, \quad z' = \pm iz,$$

e as coordenadas transversais y' e z' tornam-se imaginárias. Essa possibilidade foi considerada, por exemplo, na Ref. [21], contudo, a introdução de coordenadas imaginárias não parece ser provida de qualquer sentido físico aceitável.

Se, por fim, negarmos a validade do princípio de invariância da velocidade da luz, obtemos então as transformações

$$ct' = \pm \frac{ct - xv/c}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad x' = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad (54)$$

$$y' = \pm y, \quad z' = \pm z,$$

em que todas as coordenadas são reais. O problema é que agora estamos nos casos discutidos anteriormente, onde o espaço não pode mais ser considerado isotrópico.

Note que em cada uma das possibilidades discutidas acima, as componentes transversais das grandezas físicas se tornarão diferentes. Assim, por exemplo, a formulação da eletrodinâmica dos táquions assumirá formas diferentes em cada uma dessas formulações. Somente a experiência pode, contudo, decidir qual delas está correta, (isto é, assumindo que alguma delas esteja).

Em resumo, os argumentos apresentados acima nos mostram que não é possível estender as transformações de Lorentz de modo a satisfazer todos os postulados apresentados na seção 2. Veremos na seção seguinte que, se não exigirmos a validade do postulado 1, isto é, que o universo tenha quatro dimensões, então torna-se possível construir uma teoria dos táquions que satisfaça os outros postulados.

¹²A concepção de um universo em seis dimensões também já foi proposta antes, conferir a Ref. [5].

11. Uma possível teoria em 6 dimensões

Podemos nos perguntar por que encontramos dificuldades em estender as transformações de Lorentz em um universo de quatro dimensões, se em duas dimensões essa extensão é quase que direta. Após um pouco de reflexão, podemos encontrar a resposta. O motivo pelo qual isso ocorre reside no fato de que em quatro dimensões temos um número diferente de dimensões do tipo espaço e do tipo tempo. Desde que a experiência nos mostra que o universo tem três dimensões espaciais (pelo menos), segue que devemos considerar um universo de (no mínimo) seis dimensões – três do tipo tempo, três do tipo espaço.¹²

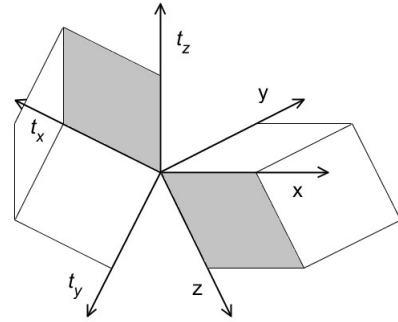


Figura 6 - Ilustração de um universo em 6 dimensões – “universos ortogonais”.

Mas o que devemos entender por um universo com três dimensões de tempo? A interpretação que propomos aqui é a seguinte: embora o universo tenha três dimensões do tipo tempo, o *tempo físico*, isto é, o tempo que de fato é medido por um observador, é sempre unidimensional. Efetivamente, esse tempo físico deve corresponder ao *tempo próprio* desse observador, ou seja, deve ser determinado pelo comprimento de sua linha de universo.

Dessa forma, consideramos também que as outras duas dimensões do tipo tempo, as que são ortogonais à linha de universo do observador, são sempre *inacessíveis* a esse observador. Assim, muito embora o universo seja considerado hexadimensional pela teoria, o *universo físico* é sempre quadridimensional. De certa forma, esse universo a seis dimensões pode ser interpretado como que composto por *dois universos tridimensionais ortogonais*, conforme está pictoricamente ilustrado na Fig. 6.

Com essas interpretações, podemos definir a métrica do universo em seis dimensões pela expressão

$$ds = \sqrt{|c^2 dt_x^2 + c^2 dt_y^2 + c^2 dt_z^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2|}, \quad (55)$$

e a *métrica física* por

$$d\sigma = \sqrt{|c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2|}. \quad (56)$$

onde supomos que $t \equiv t_x$ seja o tempo físico medido pelo observador correspondente (por uma escolha conveniente do sistema de coordenadas sempre podemos, é claro, escolher t_x como paralelo à linha de universo do observador).

Deixe-nos então mostrar agora como se pode obter as TLE que estejam de acordo com os postulados apresentados na seção 2. Para isso, considere um determinado evento de coordenadas $(ct_x, ct_y, ct_z, x, y, z)$ em relação a um referencial R , mas que apenas as coordenadas (ct, x, y, z) sejam acessíveis a esse referencial. Analogamente, para o referencial R' deixe $(ct'_x, ct'_y, ct'_z, x', y', z')$ serem as coordenadas daquele mesmo evento, onde agora somente as coordenadas (ct', x', y', z') são acessíveis a R' .

Considere primeiro o caso em que $v < c$. Nesse caso é evidente que as dimensões acessíveis de R e R' devem ser iguais, já que para $v = 0$ devemos obter a identidade. Assim, obtemos diretamente que as transformações procuradas consistem nas transformações de Lorentz usuais, acrescidas das relações

$$ct'_y = ct_y, \quad ct'_z = ct_z, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (57)$$

Considere agora o caso de mais interesse em que $v > c$. Aqui, pelo contrário, deve haver uma inversão nas dimensões acessíveis de R quando observadas por R' . De fato, podemos dizer que os referenciais R e R' estão, agora, em “universos ortogonais” diferentes. Assim, as coordenadas ct_y e ct_z devem passar a ser acessíveis para R' , enquanto que as coordenadas y e z devem se tornar inacessíveis. Note ainda que para a luz se propagar em superfícies esféricas de velocidade c em ambos os referenciais é necessário apenas que se tenha $d\sigma = d\sigma' = 0$. Contudo, podemos considerar a hipótese mais forte de que sempre se tenha $ds' = ds = 0$ para um raio de luz. Nesse caso facilmente se verifica que condição anterior é satisfeita através das relações

$$ct'_y = \pm y, \quad ct'_z = \pm z, \quad y' = \pm ct_y, \quad z' = \pm ct_z, \quad (58)$$

as quais se somam as expressões

$$ct'_x = \pm \frac{ct_x - xv/c}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad x' = \pm \frac{x - vt_x}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad (59)$$

já deduzidas na seção 4, para constituir as TLE em seis dimensões. Note que agora todas as coordenadas são reais.

Deixe-nos por fim interpretar os resultados obtidos. Em primeiro lugar é fácil verificar que em ambos os referenciais a luz se propagará com velocidade c . Isso pode ser feito através da substituição direta das Eqs. (58) e (59) na Eq. (56). Além disso, notemos que nessa formulação, a forma como os táquions são observados no referencial R pode ser completamente diferente de sua forma para o referencial R' , uma vez que para o referencial R as coordenadas transversais são dadas por $y = \pm ct'_y$ e $z = \pm ct'_z$, as quais não são acessíveis a R' .

Além disso, é interessante notar que se uma fonte de luz for fixada ao referencial R' , então o referencial R verá essa luz se propagando em superfícies esféricas com velocidade c , conforme mostramos, mas desde que a fonte tem nesse caso uma velocidade maior que c , teremos efetivamente a formação de um cone de Mach, pois a fonte estará sempre à frente das ondas que emite. Pode-se mostrar então que a superposição das ondas emitidas por essa fonte superluminal formam duas frentes de onda com o formato de hiperboloides. A velocidade de grupo dessas ondas depende da direção, sendo sempre maior que c (exceto na direção X , cuja velocidade é c), isso, no entanto, deve-se puramente a um fenômeno de interferência e não a uma anisotropia do espaço, diferentemente do que ocorria nos casos discutidos na seção anterior. Ondas desse tipo são comumente chamadas de “ondas X ” e efetivamente são soluções superluminais das equações de Maxwell [22, 23] – essas ondas, inclusive, já foram observadas e até mesmo produzidas em laboratório [4, 22–24], o que constitui uma importante verificação experimental da existência de fenômenos superluminais na natureza.

Agradecimentos

O autor agradece ao Prof. Dr. A. Lima-Santos pela leitura do manuscrito e sugestões, e também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] T. Adam *et al.* (The OPERA Collaboration), arXiv:1109.4897v1 [hep-ex] (2011).
- [2] R.S. Vieira, *Para Além da Velocidade da Luz – Uma Breve Introdução à Teoria dos Tachyons*, Palestra apresentada na 7ª Semana da Física da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos (2011).
- [3] M. Antonello *et al.* (The ICARUS Collaboration), arXiv:1203.3433v3 [hep-ex], (2012).
- [4] E. Recami, *Found. Phys.* **31**, 1119 (2001).
- [5] E. Recami, *Riv. Nuovo Cim.* **9**, 1 (1986).
- [6] H. Poincaré, *Circ. Mat. Palermo* **21**, 129 (1906).
- [7] H. Minkowski, *Phys. Z.* **10**, 104 (1909).
- [8] P.A.M. Dirac, *Proc. R. Soc. London, A* **126**, 360 (1930).
- [9] E.C.G. Stückelberg, *Helv. Phys. Acta* **14**, 588 (1941).
- [10] E.C.G. Stückelberg, *Helv. Phys. Acta* **15**, 23 (1942).
- [11] R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 769 (1949).
- [12] R.P. Feynman, in *The 1986 Dirac Memorial Lectures by R.P. Feynman and S. Weinberg* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [13] O.M.P. Bilaniuk, V.K. Deshpande and E.C.G. Sudarshan, *Am. Journ. Phys.* **30**, 718 (1962).

- [14] F. Catoni, D. Boccaletti, R. Cannata, V. Catoni and P. Zampetti, *Geometry of Minkowski Space-Time* (Springer Briefs in Physics, Heidelberg, Dordrecht, London and New York, 2011).
- [15] J. Vaz Jr., *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 5 (2000).
- [16] R.C. Tolman, *The Theory of Relativity of Motion* (University of California Press, Berkeley, 1917).
- [17] A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **23**, 371 (1907).
- [18] E. Recami, *Lett. Nuovo Cim.* **44**, 587 (1985).
- [19] D. Bohm, *The Special Theory of Relativity* (Routledge, London and New York, 1965).
- [20] E. Recami, *Found. Phys.* **17**, 239 (1987).
- [21] R.L. Dawe and K.C. Hines, *Aust. J. Phys.* **45**, 591 (1992).
- [22] E.C. de Oliveira and W.A. Rodrigues Jr., *Tend. Mat. Apl. Comput.* **3**, 165 (2002).
- [23] E. Recami and M.Z. Rached, *Advances in Imaging & Electron Physics* **156**, 235 (2009).
- [24] E. Recami, M. Fracastoro-Decker e W.A. Rodrigues Jr., *Revista Ciência Hoje* **5**, n. 26, 48 (1986); E. Recami e M.Z. Rached, *Revista Ciência Hoje* **29**, n. 170, 20 (2001).