

# O isocronismo dos triângulos retângulos

(The isochronism of right-angle triangles)

Álvaro de Almeida Caparica<sup>1</sup>

Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, GO, Brazil

Recebido em 6/3/2007; Aceito em 21/6/2007

Mostramos que placas em forma de triângulo retângulo com mesma hipotenusa que oscilam livremente em torno de um eixo perpendicular a elas, passando pelo vértice do ângulo reto, exibe um isocronismo semelhante ao do pêndulo simples, onde o período depende de um único parâmetro geométrico, que é o comprimento do fio. Neste caso o parâmetro é o semi-comprimento da hipotenusa e mostramos ainda que o centro de oscilação localiza-se exatamente no centro da borda oposta.

**Palavras-chave:** isocronismo, triângulos retângulos, pêndulo físico.

We show that plates having the shape of right triangles with equal hypotenuses which are free to swing about a perpendicular axis passing through the vertex of the right angle exhibit an isochronism similar to that of the simple pendulum, where the period depends on a single geometric parameter, namely the length of the string. In this case the parameter is the half-length of the hypotenuse and we show in addition that the center of oscillation is located exactly at the center of the opposite edge.

**Keywords:** isochronism, right-angled triangles, compound pendulum.

## 1. Introdução

Galileu Galilei utilizava as suas pulsações como cronômetro. Reza a tradição, que ainda nos seus tempos de estudante de medicina, por volta de 1581, Galileu, comparando as oscilações de um candelabro da Catedral de Pisa com o ritmo de seu pulso, descobriu o isocronismo das oscilações do pêndulo, ou seja, que o período das oscilações permanecia o mesmo, embora sua amplitude fosse diminuindo. Consta ainda que, Galileu e Sanctorius Sanctorius, um médico amigo seu, invertendo os papéis, inventaram o *pulsilogium*, um pêndulo de comprimento padrão, destinado a medir as pulsações de pacientes em hospitais. Formalmente as suas descobertas sobre o isocronismo dos pêndulos só aparecem em uma carta enviada a Guidobaldo Del Monte em 1602 e o marco da sua aplicação tecnológica pode ser considerado o registro da patente do primeiro relógio de pêndulo feito por Christiaan Huygens em 1656.

A aplicação das leis de Newton a um pêndulo simples resulta, para pequenas amplitudes, onde  $\sin \theta \simeq \theta$ , em um período dado por

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad (1)$$

onde  $\ell$  é o comprimento do fio e  $g$  é a aceleração da

gravidade. Esse período é independente da massa e da amplitude e caracteriza o isocronismo descoberto por Galileu.

Neste trabalho apresentamos o isocronismo das chapas homogêneas em forma de triângulos retângulos de mesmo comprimento da hipotenusa, quando oscilam em torno de um eixo perpendicular a elas, passando pelo vértice do ângulo reto.

## 2. Um pêndulo físico

Uma chapa como as descritas acima consiste num pêndulo físico do tipo representado na Fig. 1.

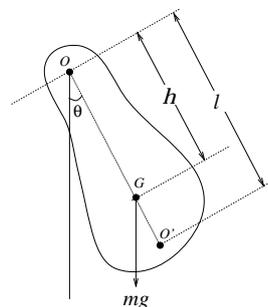


Figura 1 - O pêndulo físico, onde  $G$  é o centro de massa e  $O'$  é o centro de oscilação.

<sup>1</sup>E-mail: caparica@if.ufg.br.

O período de pequenas oscilações é dado por [1]

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}, \quad (2)$$

onde  $I$  é o momento de inércia com relação ao eixo de oscilação e  $h$  é a distância do eixo ao centro de massa  $G$  e  $m$  é a massa. O ponto  $O'$  localizado à distância

$$\ell = \frac{I}{mh}, \quad (3)$$

do ponto  $O$ , ao longo da linha que passa pelo centro de massa  $G$ , é chamado *centro de oscilação*. Se toda massa estivesse localizada em  $O'$ , o movimento do pêndulo seria idêntico ao do pêndulo físico. Uma importante propriedade do centro de oscilação é que se o eixo de sustentação for transferido para lá, o período do pêndulo resultante permanece igual ao anterior [2, 3].

Seja  $ABC$  uma chapa triangular plana de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  e massa  $m$ , como representado na Fig. 2.

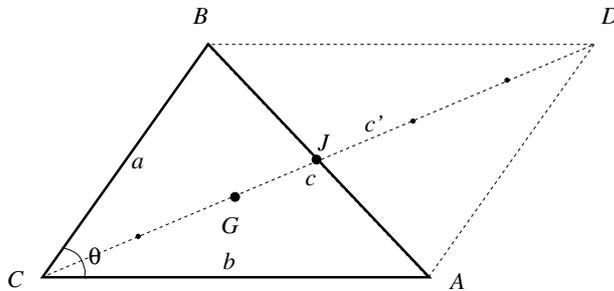


Figura 2 - Placa triangular arbitrária.

O momento de inércia da chapa com relação a um eixo perpendicular a ela, passando por  $J$ , o ponto médio do lado  $c$ , é dado por

$$I_J = m\frac{a^2 + b^2}{12}, \quad (4)$$

como demonstrado no Apêndice.

Acrescentando ao triângulo as linhas pontilhadas, obtemos o paralelogramo  $ACBD$ , que tem o mesmo momento de inércia do triângulo  $ABC$ , de mesma massa. A diagonal  $CD$  tem o seu comprimento dado por

$$c' = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}, \quad (5)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os lados  $a$  e  $b$ . O centro de massa do triângulo  $ABC$  encontra-se então à distância  $c'/3$  do ponto  $C$  e  $c'/6$  do ponto  $J$ .

Aplicando duas vezes o teorema dos eixos paralelos obtemos

$$I_C = I_G + m\left(\frac{c'}{3}\right)^2, \quad (6a)$$

$$I_J = I_G + m\left(\frac{c'}{6}\right)^2, \quad (6b)$$

onde  $I_G$  é o momento de inércia da placa relativo ao eixo paralelo que passa pelo centro de massa. Eliminando  $I_G$  das Eqs. (6) e levando em consideração a Eq. (4), obtemos o momento de inércia da chapa com relação a um eixo perpendicular que passa pelo vértice  $C$ .

$$I_C = m\frac{a^2 + b^2 + ab \cos \theta}{6}. \quad (7)$$

O período do pêndulo oscilando em torno do eixo  $C$  será então dado por

$$\begin{aligned} \tau &= 2\pi\sqrt{\frac{I_C}{mg\frac{c'}{3}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab \cos \theta}{2g\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}}}, \end{aligned} \quad (8)$$

e a distância do ponto  $C$  ao centro de oscilação será dada por

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{a^2 + b^2 + ab \cos \theta}{2\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}} \\ &= \frac{c'}{2} - \frac{ab \cos \theta}{2\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Fica claro da Eq. (9) que o centro de oscilação estará localizado dentro da placa, se  $\theta < \pi/2$  e fora dela, se  $\theta > \pi/2$ .

### 3. Isocronismo

Se  $\theta = \pi/2$  o triângulo é retângulo e obtemos

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{c}{2g}}, \quad (10)$$

que caracteriza o isocronismo dos triângulos retângulos, ou seja, todas as chapas em forma de triângulo retângulo com o mesmo comprimento da hipotenusa, quando suspensas pelo vértice do ângulo reto, oscilam com o mesmo período, independentemente não apenas das massas, mas também da razão dos catetos. Outro aspecto notável é que nesse caso o centro de oscilação está localizado exatamente no ponto médio do lado oposto ao vértice por onde passa o eixo. Na Fig. 3 mostramos exemplos de pêndulos isócronos para  $a : b = 1 : 1$ ,  $1 : 2$  e  $2 : 3$ .

Se os pêndulos forem construídos de uma mesma chapa homogênea, as áreas diferentes farão com que todos tenham massas distintas, de forma que uma demonstração de laboratório semelhante à da Fig. 3 estará evidenciando ao mesmo tempo a independência do período (a) das massas, (b) das razões dos catetos e (c) do ponto de fixação do eixo, ou seja, o vértice do ângulo reto ou o ponto médio da hipotenusa.

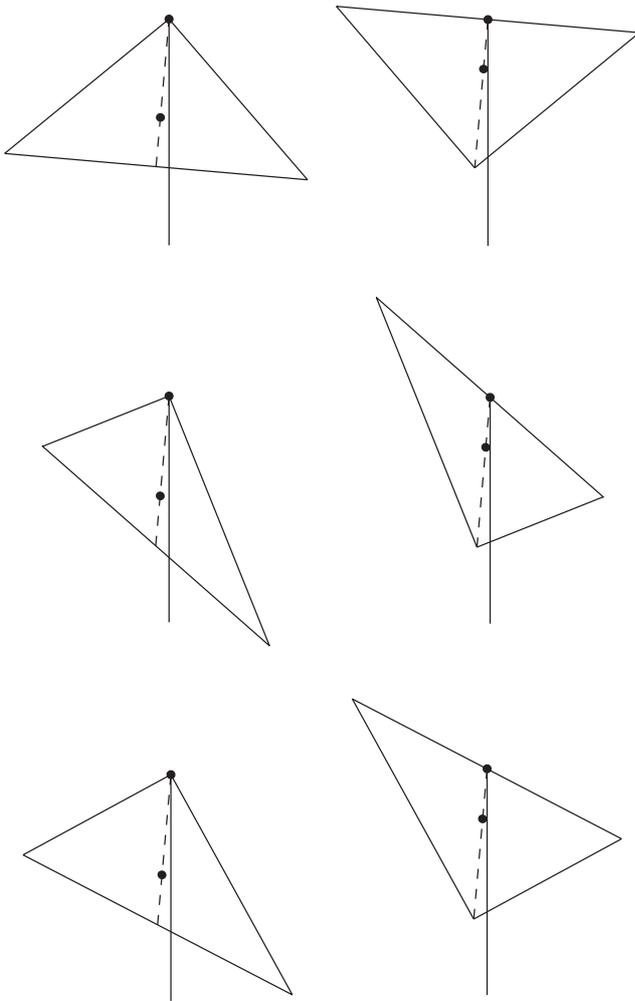


Figura 3 - Seis pêndulos isócronos, de cima para baixo as razões entre os catetos são 1:1, 1:2 e 2:3, respectivamente.

Evidentemente, o problema poderia ter sido colocado partindo-se diretamente de um triângulo retângulo, para o qual se obteria de imediato

$$I_C = \frac{mc^2}{6} \tag{11}$$

e

$$h = \frac{c}{3}, \tag{12}$$

levando prontamente ao resultado da Eq. (10), além de

$$\ell = \frac{c}{2}. \tag{13}$$

Ao resolvermos porém o problema para um triângulo arbitrário, mostramos que somente os triângulos retângulos têm o centro de oscilação localizado na sua borda e exibem um isocronismo análogo ao do pêndulo de Galileu.

#### 4. Conclusões

Mostramos que todas as chapas em forma de triângulo retângulo com o mesmo comprimento da hipotenusa,

quando suspensas por um eixo perpendicular passando pelo vértice do ângulo reto, oscilam com o mesmo período, representando um isocronismo semelhante ao do pêndulo simples. Ao invés do comprimento do fio, neste caso o parâmetro geométrico único é o semi-comprimento da hipotenusa. Uma variedade de conjuntos de demonstração pode ser desenvolvida em base dessa interessante propriedade. Por exemplo, se colocarmos chapas de diferentes razões de comprimentos dos catetos para oscilar em torno de um mesmo eixo, partindo do mesmo ângulo inicial, veremos que, se a amplitude do movimento for pequena, a figura formada pelo conjunto delas se mantém, graças ao isocronismo, porém para amplitudes maiores ocorre uma quebra do isocronismo e a forma conjunta se desfaz.

#### Apêndice

Apresentamos aqui uma possível maneira de calcular o momento de inércia de uma chapa triangular em torno de um eixo perpendicular a ela, passando pelo ponto médio de um dos seus lados. Esse momento de inércia é equivalente àquele do paralelogramo  $ACBF$  mostrado na Fig. 4, de massa igual à do triângulo  $ABC$ .

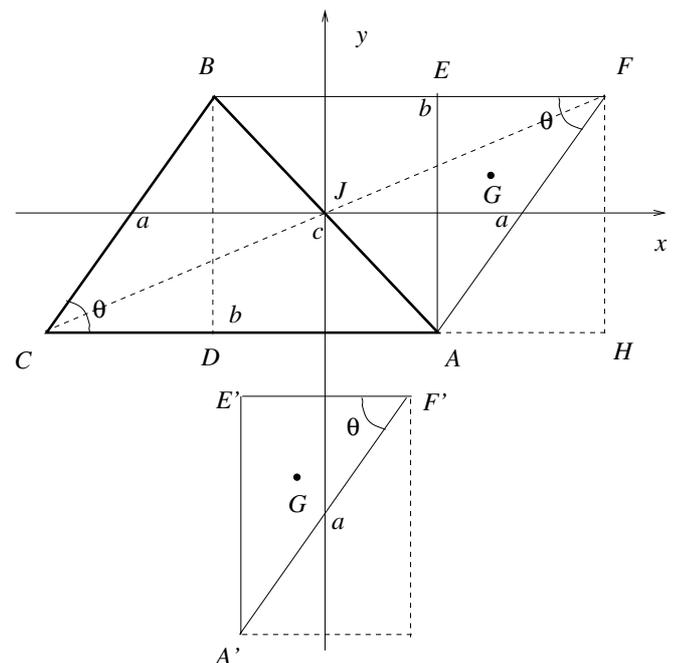


Figura 4 - Paralelogramo com momento de inércia equivalente ao do triângulo  $ABC$ .

Supomos bem conhecido o momento de inércia de uma placa homogênea retangular de largura  $w$  em torno do eixo ao longo do seu comprimento, passando pelo seu centro de massa

$$I = \frac{mw^2}{12}, \tag{14}$$

e que a componente do centro de massa de um triângulo retângulo ao longo de um cateto corresponde a  $1/3$  do

seu comprimento a partir do vértice do ângulo reto.

Usando o teorema dos eixos perpendiculares, calculamos  $I_J$  como

$$I_J = I_z = I_x + I_y, \quad (15)$$

Deslizando o triângulo  $BCD$  para a posição  $FAH$  obtemos uma placa de mesmo momento de inércia  $I_x$ . Logo

$$I_x = m \frac{a^2 \sin^2 \theta}{12}. \quad (16)$$

O momento de inércia  $I_y$  pode ser calculado como

$$I_y = I_{BEAD} + 2I_{EFA}. \quad (17)$$

As massas de cada segmento são proporcionais às suas áreas

$$A_{ACBF} = ab \sin \theta; \quad (18a)$$

$$A_{BEAD} = (b - a \cos \theta) a \sin \theta; \quad (18b)$$

$$A_{EFA} = \frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{2}. \quad (18c)$$

As massas são então dadas por

$$m_{BEAD} = m \frac{A_{BEAD}}{A_{ACBF}} = m \frac{b - a \cos \theta}{b}; \quad (19a)$$

$$m_{EFA} = m \frac{A_{EFA}}{A_{ACBF}} = m \frac{a \cos \theta}{2b}. \quad (19b)$$

O cálculo do momento de inércia do retângulo  $BEAD$  é imediato

$$I_{BEAD} = m \frac{b - a \cos \theta}{b} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{12}. \quad (20)$$

O momento de inércia do triângulo  $E'F'A'$ , que tem o eixo  $y$  passando pelo ponto médio de sua hipotenusa é dado por

$$I_{E'F'A'} = m \frac{a \cos \theta}{2b} \frac{(a \cos \theta)^2}{12}. \quad (21)$$

Aplicando duas vezes o teorema dos eixos paralelos, obtemos

$$I_{EFA} = I_G + m \frac{a \cos \theta}{2b} \left( \frac{b - a \cos \theta}{2} + \frac{a \cos \theta}{3} \right)^2, \quad (22a)$$

$$I_{E'F'A'} = I_G + m \frac{a \cos \theta}{2b} \left( \frac{a \cos \theta}{2} - \frac{a \cos \theta}{3} \right)^2, \quad (22b)$$

onde  $I_G$  é o momento de inércia do triângulo  $EFA$  em torno do eixo que passa pelo centro de massa. Eliminando  $I_G$  das Eqs. (22) e usando a Eq. (21), obtemos

$$I_{EFA} = m \frac{a^3 \cos^3 \theta - 2a^2 b \cos^2 \theta + 3ab^2 \cos \theta}{24b}. \quad (23)$$

Substituindo as Eqs. (20) e (23) na Eq. (17), obtemos

$$I_y = m \frac{b^2 + a^2 \cos^2 \theta}{12}. \quad (24)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (16) e (24) na Eq. (15), obtemos

$$I_J = m \frac{a^2 + b^2}{12}. \quad (25)$$

Esse resultado, por si só, é muito interessante, pois mostra que o momento de inércia de uma placa em forma de paralelogramo é independente dos ângulos.

## Agradecimento

O autor agradece à Fundação de Apoio à Pesquisa (FUNAPE-UFG) pela ajuda financeira.

## Referências

- [1] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física 2 Gravitação, Ondas e Termodinâmica* (LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1996).
- [2] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 1 - Mecânica* (Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1996).
- [3] K.R. Symon, *Mecânica* (Editora Campus Ltda., São Paulo, 1982).