

O princípio de Huyghens, a óptica de Fourier e a propagação de feixes de laser

(*Huyghens principle, Fourier optics and laser beam propagation*)

E. Campos, T.J. Fernandes e N.A.S. Rodrigues¹

¹*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil*
Recebido em 22/9/2009; Aceito em 26/2/2010; Publicado em 15/2/2011

Neste trabalho é apresentada uma abordagem que foi adotada para o ensino de óptica física e de propagação de feixes de laser para alunos provenientes de um Curso de Bacharelado em Matemática, no programa de Iniciação Científica do Instituto de Estudos Avançados. Inicialmente é feita uma apresentação fenomenológica do Princípio de Huyghens e de como o tratamento matemático adequado deste princípio resulta nos conceitos básicos da óptica de Fourier. Posteriormente é postulada a existência de um feixe de laser cuja distribuição de amplitude de campo elétrico é dada por uma função gaussiana e foi calculada a propagação deste feixe usando a óptica de Fourier. Como resultado deste cálculo foram obtidas as propriedades de propagação do feixe de laser gaussiano. Embora os resultados a respeito da propagação de feixes de lasers gaussianos encontrados neste trabalho sejam amplamente divulgados na literatura, a abordagem se mostrou muito útil para iniciar alunos na área de óptica física sem que seja necessário passar pela teoria do eletromagnetismo.

Palavras-chave: óptica de fourier, difração, propagação de feixes de laser.

This paper presents the approach adopted to teach diffraction and laser beam propagation to under graduation students of Mathematics. First it is presented a phenomenological approach for the Huyghens Principles and how an adequate mathematical analysis of this principle can result the basics of the Fourier optics. Later it was postulated an laser beam with a electric field amplitude distribution given by a gaussian function and the propagation of this beam was calculated by using the Fourier optics. As result of this calculation it was obtained the propagation properties of a gaussian laser beam. Although the propagation of gaussian beams is largely known in the literature, the approach showed to be very useful to introduce students into the wave physics without using the electromagnetism theory.

Keywords: Fourier optics, diffraction, laser beam propagation.

1. Introdução

Há um sem número de aplicações de óptica em que é necessário o cálculo da propagação de feixes de lasers em meios materiais homogêneos e sem perdas (meios dielétricos), tais como, por exemplo, no projeto de sistemas ópticos [1], na caracterização de feixes de lasers [2] e no projeto de dispositivos para aplicações científicas ou industriais do laser [3, 4]. De um modo geral, a primeira ferramenta a ser utilizada para tais cálculos é a óptica geométrica. No entanto, quando as características ondulatórias da luz são relevantes para o problema em questão, a óptica geométrica não se mostra adequada e se torna necessário lançar mão da óptica física. Em princípio, a abordagem da óptica física é a de resolver as equações de Maxwell, com as condições de contorno do problema em questão. Embora este tratamento seja rigoroso dentro do arcabouço

do eletromagnetismo clássico, ele requer um longo caminho através da teoria eletromagnética até que se possa abordar problemas tais como a propagação de feixes em meios homogêneos e não absorvedores, e pode se configurar numa ferramenta hermética para alunos (e mesmo profissionais) que sejam originalmente de áreas diversas da física. Neste trabalho apresentamos uma abordagem para a descrição da propagação de feixes de lasers usando a óptica de Fourier, que foi utilizada quando do desenvolvimento de atividades de Iniciação Científica do Instituto de Estudos Avançados (IEAv) com alunos do curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Braz Cubas, de Mogi das Cruzes, no estado de São Paulo. Esta abordagem nos pareceu mais facilmente digerível por alunos da área de Matemática, iniciantes na área de óptica e laser, por não requerer um curso de eletromagnetismo como pré-requisito. Óbvio que existe uma contrapartida que é o conhecimento da transfor-

¹E-mail: nicolau@ieav.cta.br.

mada de Fourier que, entretanto, nos parece mais simples de ser abordada que a teoria eletromagnética para o perfil do aluno em questão.

Neste artigo será descrita a abordagem adotada. Inicialmente serão discutidos a natureza ondulatória da luz, o fenômeno de interferência, o princípio de Huyghens e a relação entre a transformada de Fourier e a propagação de luz monocromática. Os conceitos físicos envolvidos no conteúdo serão desenvolvidos de maneira fenomenológica.

Na segunda parte, os conceitos desenvolvidos na primeira serão aplicadas ao problema da propagação de um feixe de laser. Será postulada e discutida a existência de um feixe de luz com uma distribuição de amplitude gaussiana associada ao campo elétrico da onda. Os conceitos discutidos na primeira parte serão aplicados neste feixe de luz e, como será demonstrado, surgem espontaneamente as propriedades de propagação deste feixe de laser. Por fim, estas propriedades serão discutidas e analisadas.

2. O princípio de Huyghens e a óptica de Fourier

Christiaan Huyghens foi o cientista holandês que propôs o princípio que leva seu nome, um modelo muito útil para explicar a propagação da luz. Na realidade o modelo de Huyghens se aplica a qualquer onda que se propague no espaço, mas, antes da apresentação deste princípio propriamente dito, será gasto um tempo discutindo fenomenologicamente o que é uma onda eletromagnética, o que são fontes puntiformes, como se propagam e como duas ondas se interferem quando se encontram no espaço.

É postulado inicialmente que a luz é uma onda eletromagnética cuja amplitude é associada ao campo elétrico. Se supusermos, sem perda da generalidade, que o campo elétrico no ponto P_0 oscile de acordo com uma função harmônica do tipo

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t), \quad (1)$$

este campo irradiará pelo espaço uma onda eletromagnética que também terá um comportamento harmônico. Vamos supor que qualquer alteração do campo na posição P_0 se propague no espaço com uma velocidade v , então, a informação da alteração chegará a um ponto P , a uma distância d de P_0 , após um intervalo de tempo

$$\Delta t = d/v, \quad (2)$$

e no ponto P o campo oscilará de acordo com

$$E'(t) = E(d) \cos[\omega(t - d/v)], \quad (3)$$

onde $E(d)$ somente indica que deve haver alguma alteração da amplitude do campo elétrico devido a propagação da onda, como será visto adiante.

2.1. Propriedades comuns às ondas

As ferramentas matemáticas utilizadas para estudar e descrever uma onda são as mesmas não importando muito qual a natureza da onda. Por exemplo, uma pedra jogada na superfície de um lago provoca perturbações na altura da superfície do líquido que funciona como uma fonte de uma onda que se propaga em todas as direções na superfície do lago [5]. Um balão de gás ao explodir provoca alterações na pressão do ar na sua vizinhança e isto funciona como uma fonte de uma onda (aumentos e diminuições da pressão se propagando no ar = som) que se propaga em todas as direções [6]. A absorção de um pulso de laser na superfície de um metal provoca uma perturbação local na densidade de elétrons na sua superfície que funciona como a fonte de uma onda de densidade de elétrons [7]. Todas estas ondas, e quaisquer outras ondas, tem em comum com a onda eletromagnética o fato de possuírem um determinado parâmetro físico que oscila com o tempo: a altura do líquido no caso da pedra n'água, a pressão do ar no caso do som, a densidade dos elétrons no caso do plasmion e o campo elétrico no caso da onda eletromagnética. Este parâmetro varia de um valor mínimo E_m até um valor máximo E_M . Chamamos de amplitude a metade da diferença entre estes extremos, isto é

$$E = \frac{E_M - E_m}{2}, \quad (4)$$

e a fórmula que descreve a propagação da onda será do tipo da Eq. (3) ou, como qualquer função periódica pode ser expandida em série de Fourier, como uma superposição de funções como aquela [8].

Define-se agora alguns parâmetros importantes para a caracterização de uma onda. Supõe-se que alguém permaneça em uma determinada posição contando quantas vezes a onda vai de um extremo a outro (contando ciclos) a cada unidade de tempo. O número de ciclos que a onda completa por unidade de tempo é chamada de frequência, indicada por f . Há outra maneira de caracterizar esta oscilação no tempo: é medir quanto tempo a onda leva para realizar um ciclo completo. Este parâmetro é chamado de período e é indicado por T . É importante observar que f é o recíproco de T , ou seja

$$f = \frac{1}{T}. \quad (5)$$

Imagine-se agora que uma onda é congelada no tempo (é tirada uma foto da onda, por exemplo). A distância entre dois máximos adjacentes ao longo da direção de propagação da onda, ou entre quaisquer dois pontos adjacentes em que o comportamento da onda se repita, é chamado de comprimento de onda e é indicado pela letra grega λ .

A velocidade com que a onda se propaga é dada pelo quociente entre a distância percorrida pela onda e

o tempo que ela leva para percorrer esta distância. Se for tomada a distância igual ao comprimento de onda, o tempo necessário para percorrer λ é exatamente o tempo necessário para realizar um ciclo completo, ou seja, T . Assim,

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (6)$$

Então, não importa qual a natureza da onda, sua velocidade de propagação é igual ao produto do comprimento de onda pela frequência.

Como as funções que são utilizadas para descrever a propagação de ondas são trigonométricas, é importante definir dois novos parâmetros, a frequência angular e o vetor de propagação, que associam o número de ciclos realizados por uma determinada onda com um ângulo.

A frequência angular é simplesmente

$$\omega = 2\pi f, \quad (7)$$

e sua importância está no fato de que o produto da frequência angular por qualquer intervalo de tempo indicará um determinado ângulo $\Delta\Phi$. A cada ângulo correspondente a 2π radianos (usa-se o radiano como unidade de ângulo) indica que a onda completou um ciclo completo. Assim, $\Delta\Phi/2\pi$ indica o número de ciclos completados pela onda.

O número de ondas é definido como

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (8)$$

e, por analogia com a frequência angular, o produto do número de ondas por uma distância indicará um ângulo que corresponderá a quantos ciclos a onda completou ao percorrer esta distância.

Usando então estas definições, pode-se escrever a Eq. (3) como

$$E'(t) = E(d) e^{i(\omega t - Kd)}, \quad (9)$$

onde é usada a função $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ em vez de uma função cosseno. Como não se conhece (ou não foi imposto) o “ângulo” que a onda estava no instante $t = 0$, é absolutamente arbitrária a utilização da forma exponencial, cosseno ou seno. Por outro lado, ficará autoevidente mais adiante o quão prático é descrever a propagação de uma onda na forma exponencial.

2.2. Interferência

Quando duas ondas de mesma natureza se encontram numa mesma posição, ocorre o que se chama de interferência. Deste ponto em diante só serão consideradas ondas eletromagnéticas. O campo elétrico varia de um mínimo a um máximo e o valor do campo elétrico vai depender da posição e do instante de tempo. Se

duas ondas $E_1(t, x, y, z)$ e $E_2(t, x, y, z)$ se encontrarem em uma dada posição, o campo elétrico resultante será a soma dos dois campos. Essa soma é vetorial, mas, no entanto, se a oscilação dos dois campos for na mesma direção (mesma polarização), essa soma pode ser tratada como algébrica. Caso contrário, é necessário realizar a soma vetorial das ondas. Considerando somente as ondas que oscilam numa mesma direção, o campo resultante será dado por

$$E_R(t, x, y, z) = E_1(t, x, y, z) + E_2(t, x, y, z). \quad (10)$$

Esta expressão implica em que, dependendo da posição e do instante de tempo, pode-se ter as duas ondas com campo elétrico no seu máximo, neste caso o módulo do campo elétrico resultante será $|E_1| + |E_2|$. Uma situação similar é quando ambas as ondas tem seus campos elétricos no mínimo e neste caso novamente o módulo do campo resultante será $|E_1| + |E_2|$. Ambas as situações são equivalentes e quando os campos se superpõem de modo a que suas amplitudes se somem, temos o que se chama de interferência construtiva. A situação oposta é quando um dos campos está em oposição ao outro, ou seja, um está no máximo e outro no mínimo. Neste caso o módulo do campo elétrico resultante será $||E_1| - |E_2||$ e temos o que se chama de interferência destrutiva.

É interessante observar que se as ondas tiverem amplitudes iguais, no caso de interferência destrutiva, as ondas se anulam naquela posição e naquele instante de tempo.

Se as ondas que estiverem se superpondo tiverem a mesma frequência, o campo elétrico poderá ser escrito como

$$E(t, x, y, z) = u(x, y, z) e^{i\omega t}, \quad (11)$$

onde $u(x, y, z)$ é a amplitude complexa do campo elétrico. A partir desse ponto, $u(x, y, z)$ será mencionada somente como amplitude, ficando implícito o fato de ser uma variável complexa. Esta maneira de descrever o campo facilita o tratamento de ondas pois permite que não nos preocupemos com variação harmônica da onda no tempo, embora tenha-se permanentemente em mente este comportamento.

A Fig. 1 mostra a distribuição de amplitude de ondas em um líquido geradas por estiletos batendo ritmadamente na superfície. Na esquerda um único estilete gera a onda e a sucessão de áreas claras e escuras indica máximos (ou mínimos) e zeros da onda. Na direita dois estiletos a uma certa distância um do outro tocam a superfície da água com a mesma frequência e fica evidenciado o efeito de interferência entre as ondas. Neste caso há ainda regiões onde há sequências de claros e escuros, na região clara a interferência é construtiva e na região escura, a interferência é destrutiva.

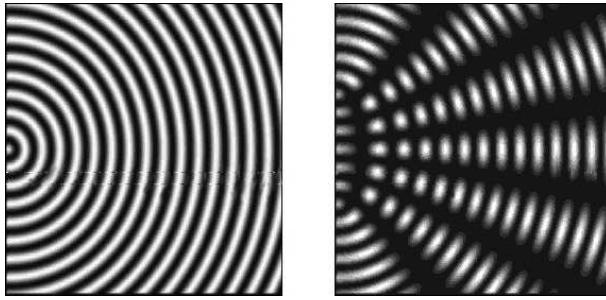


Figura 1 - Ondas na superfície de um líquido. Na figura da esquerda a onda é provocada por um estilete batendo ritmadamente na superfície. Na figura da esquerda, dois estiletos batem com a mesma frequência na superfície, evidenciando o efeito de interferência entre as duas ondas.

2.3. O princípio de Huyghens

Considere-se agora uma onda cuja fonte seja puntiforme, isto é, a partir do ponto P_0 uma onda é emanada de modo que se propague uniformemente em todas as direções, à semelhança do que ocorre com a primeira onda na Fig. 1. Se em P_0 a fonte oscilar conforme uma função harmônica do tipo $e^{i\omega t}$, a amplitude da onda pode ser descrita por uma função do tipo

$$u(r) = \frac{u_0}{r} e^{iKr}, \quad (12)$$

onde r é a distância de P a P_0 , u_0 é a amplitude da onda no ponto em que r vale uma unidade, e os outros parâmetros são os definidos anteriormente quando se discutiu as características das ondas. Esta expressão indica, além da natureza ondulatória, que a amplitude da onda cai com $1/r$ quando nos afastamos da fonte. Esta dependência da amplitude com o inverso da distância (e não com o inverso do quadrado da distância, por exemplo) é uma consequência do princípio da conservação de energia [9].

O Princípio de Huyghens estabelece que uma frente de onda pode ser considerada como composta pela superposição de infinitas fontes puntiformes de ondas, como indicado na Fig. 2, com mesmo comprimento de onda, e que a propagação desta onda pode ser descrita pela interferência das ondas geradas por estas fontes puntiformes [10].

Na Fig. 2 é exemplificado como se pode calcular a propagação de uma determinada onda (quando se conhece a frente de onda em a) usando o Princípio de Huyghens. A amplitude de onda no ponto P é obtida como se segue: para cada fonte puntiforme em a , calcula-se qual a amplitude e a fase da onda no ponto P e somam-se todas as amplitudes das diversas ondas neste ponto. Este procedimento pode ser expresso matematicamente como

$$u(P) = \sum_{n=1}^N \frac{u_n}{r_n} e^{iKr_n}, \quad (13)$$

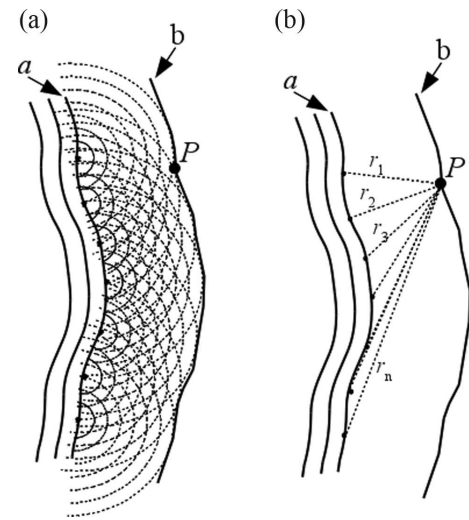


Figura 2 - Diagrama do Princípio de Huyghens. Uma frente de onda (a) é formada por infinitas fontes puntiformes colocadas lado a lado. A nova frente de onda (b) é determinada tomando uma linha tangente às frentes de onda das fontes puntiformes. Para a determinação da amplitude da onda em um dado ponto P , localizado na frente de onda (b) deve-se calcular a contribuição (interferência) de todas as fontes puntiformes que formam a frente de onda (a).

onde u_n é a amplitude da onda na frente de onda a na posição que corresponda à n ésima fonte puntiforme, r_n é a distância da n ésima fonte puntiforme ao ponto P .

Há uma outra forma mais prática de expressar matematicamente o Princípio de Huyghens, que consiste em tomar a geometria indicada na Fig. 3. Há dois planos paralelos entre si e perpendiculares à direção de propagação z . No primeiro plano, onde se conhece a distribuição de amplitude de campo elétrico, as coordenadas perpendiculares à z são denotadas por x_0 e y_0 . No segundo plano, onde se pretende calcular a distribuição de amplitude do campo elétrico, as coordenadas perpendiculares a z são denotadas por x e y . A distribuição de amplitude do campo elétrico no primeiro plano é então indicada por $u(x_0, y_0)$ e no segundo plano por $u(x, y)$.

De maneira análoga à situação mostrada na Fig. 2, para calcular a amplitude do campo elétrico em um dado ponto P no plano da direita, toma-se cada ponto no plano da esquerda e considera-se para cada um uma fonte puntiforme, posteriormente somam-se as contribuições das ondas emanada pelas fontes puntiformes na posição correspondente ao ponto P . Desta maneira tem-se uma expressão para a amplitude do campo elétrico no ponto P similar à Eq. (13), com a diferença na interpretação do termo u_n que agora indica a amplitude do campo elétrico no n ésimo ponto na superfície do plano da esquerda.

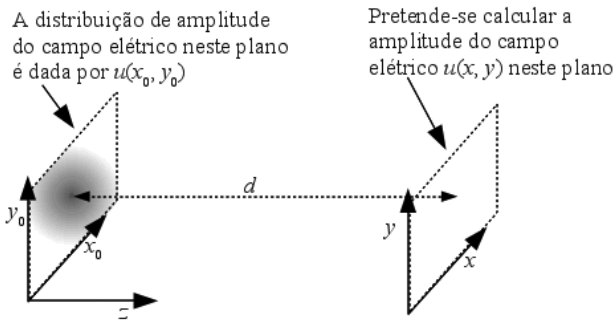


Figura 3 - A distribuição de amplitude do campo elétrico é conhecida no primeiro plano e pretende-se calculá-la no segundo plano, colocada a uma distância d do primeiro.

A diferença fundamental entre as duas abordagens é que no primeiro caso as fontes puntiformes que contribuem para a formação do campo elétrico no ponto P se distribuem sobre uma determinada frente de onda, o que implica em dois aspectos: que estas fontes puntiformes podem estar distribuídas sobre uma superfície de geometria complicada e que a fase será constante. No segundo caso, as fontes puntiformes estão distribuídas sobre a superfície de um plano e, se as frentes de onda não forem planas, várias frentes de onda contribuirão para a formação da distribuição de amplitude do campo elétrico sobre o plano da esquerda. Como a diferença de ângulo entre duas frentes de onda adjacentes é de 2π rad, neste caso $u(x_0, y_0)$ terá a contribuição de várias frentes de onda, e será necessário considerar a fase de $u(x_0, y_0)$, tal como

$$u(x_0, y_0) = |u(x_0, y_0)|e^{i\Phi(x_0, y_0)}. \quad (14)$$

Embora de interpretação um pouco mais difícil, o segundo caso permite uma grande simplificação na formulação matemática do problema e esta será a abordagem adotada neste trabalho.

Voltando então para a configuração apresentada na Fig. 3, a distribuição de amplitude do campo elétrico no plano da esquerda será descrita por $u(x_0, y_0)$ e no plano da direita por $u(x, y)$; a distância entre uma fonte puntiforme do plano da esquerda (localizada em x_0, y_0) e o ponto P (localizado em x, y) sobre o plano da direita será escrita como

$$r_n = r = \sqrt{d^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (15)$$

Se forem consideradas infinitas fontes puntiformes sobre o plano da esquerda, a soma da Eq. (13) se torna uma integral e esta pode ser reescrita como

$$u(x, y) = A \iint_S \frac{u(x_0, y_0)}{\sqrt{d^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \times e^{iK\sqrt{d^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} dx_0 dy_0, \quad (16)$$

onde A é uma constante de normalização que pode ser determinada usando, por exemplo, o princípio de con-

servação de energia e a integral dupla é realizada sobre toda a superfície S do plano da esquerda.

Esta equação nos diz que se for conhecida a distribuição de amplitude do campo elétrico sobre o plano da esquerda, pode-se calcular a distribuição de amplitude do campo elétrico após esta onda se propagar até o plano da direita, a uma distância d arbitrária do primeiro plano. Na realidade, esta integral não é de todo fácil de ser resolvida, daí a necessidade de se realizar algumas simplificações, que serão descritas adiante.

2.4. A aproximação paraxial e a equação de propagação unidimensional

Será aplicada agora uma simplificação conhecida como aproximação paraxial, que consiste em considerar que a distância d entre os dois planos é muito maior que qualquer dimensão transversal dos planos em questão, isto é,

$$d^2 \gg (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \quad (17)$$

Esta aproximação implica em se tratar somente ondas com baixas divergência, o que descreve sem perda de generalidade a maior parte das aplicações de lasers. Nesta circunstância, a expressão (15) pode ser expandida em série, tomando somente os dois primeiros termos não nulos, e ser reescrita como

$$r \approx d + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z}. \quad (18)$$

Se for ainda suposto que se possa aplicar separação de variáveis na função que descreve a amplitude complexa, de modo que $u(x_0, y_0) = u_x(x_0) u_y(y_0)$, então a Eq. (16) pode ser escrita como

$$u(x, y) = \frac{Ae^{iKd}}{d} \int_X u_x(x_0) e^{i\frac{K(x-x_0)^2}{2d}} dx_0 \times \int_Y u_y(y_0) e^{i\frac{K(y-y_0)^2}{2d}} dy_0, \quad (19)$$

onde X e Y indicam os intervalos de integração nas direções x e y , respectivamente. Esta equação também pode ser separada em duas equações, uma para a direção x e outra para a direção y . A consequência desta separação de variáveis é que pode-se tratar o problema de propagação de ondas separadamente, uma dimensão transversal por vez. Supor que se deseje tratar a propagação de uma onda inicialmente na direção transversal x . Neste caso integra-se a Eq. (19) em y de $-\infty$ a ∞ , ou

$$u(x) = \frac{Ae^{iKd}}{d} \int_X u_x(x_0) e^{i\frac{K(x-x_0)^2}{2d}} dx_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_Y u_y(y_0) e^{i\frac{K(y-y_0)^2}{2d}} dy_0 \right) dy. \quad (20)$$

Como o resultado da integral em y será uma constante, pode-se escrever então que

$$u(x) = A' e^{iKd} \int_X u_x(x_0) e^{i\frac{K(x-x_0)^2}{2d}} dx_0, \quad (21)$$

onde A' é uma constante complexa.

Esta equação é a equivalente unidimensional à Eq. (16) e é chamada de equação de propagação unidimensional. Ela determina que, uma vez que a componente x da distribuição de amplitude do campo elétrico $u_x(x_0)$ seja conhecida no plano da esquerda, $u(x)$ no plano da direita pode ser calculado. O mesmo procedimento pode ser realizado na direção y e pode-se então calcular a propagação de uma onda utilizando-se a Eq. (21).

2.5. A relação entre a propagação de uma onda e a transformada de Fourier

Expandindo o argumento da exponencial dentro da integral na Eq. (21), pode-se rescrevê-la como

$$u(x) = A' e^{iKd + \frac{x^2}{2d}} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x_0) e^{i\frac{Kx_0^2}{2d}} e^{-i\frac{Kxx_0}{d}} dx_0, \quad (22)$$

onde o limite de integração foi estendido de $-\infty$ a ∞ , o que não acrescenta erros significativos à Eq. (21) se a amplitude do campo elétrico tender a zero nas extremidades da região de integração. Se for definida a frequência angular espacial

$$\kappa = \frac{Kx}{d} = \frac{2\pi x}{\lambda d} \quad (23)$$

e tomando a definição da transformada de Fourier [11]

$$F(\kappa) = \mathfrak{F}(f(x_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0) e^{-i\kappa x_0} dx_0, \quad (24)$$

tem-se que

$$u(x) = A' e^{iKd + \frac{x^2}{2d}} \mathfrak{F} \left[u_x(x_0) e^{i\frac{Kx_0^2}{2d}} \right]. \quad (25)$$

O que há de admirável na expressão acima é que ela relaciona o problema de calcular a propagação de

uma onda com a transformada de Fourier. O conjunto dos procedimentos de se calcular sistemas ópticos e propriedades de propagação de feixes de luz utilizando esta relação é chamado de óptica de Fourier [12].

3. A propagação de feixes de lasers de acordo com a óptica de Fourier

Toda a análise da propagação de feixes de lasers neste trabalho será feita utilizando-se a Eq. (25). Inicialmente serão discutidos alguns aspectos gerais de importância para a definição de termos e parâmetros importantes e posteriormente serão estudadas as propriedades de propagação de um feixe de laser em particular, com uma distribuição de amplitude de campo elétrico do tipo gaussiana, de fundamental importância no estudo de lasers e de suas aplicações.

3.1. Campo distante, campo próximo e modos de propagação no espaço livre

Será inicialmente analisado o termo exponencial dentro da transformada de Fourier. O argumento da exponencial é inversamente proporcional à distância d entre os planos, logo, existe uma distância grande o suficiente tal que o argumento da exponencial seja desprezível e a exponencial tenda à unidade, isto é,

$$e^{i\frac{Kx_0^2}{2d}} = e^{i\frac{\pi x_0^2}{\lambda d}}, \quad (26)$$

e se

$$d \gg \frac{\lambda}{\pi x_0^2}, \quad (27)$$

então

$$e^{i\frac{Kx_0^2}{2d}} \rightarrow 1, \quad (28)$$

e $u(x)$ não depende mais de d , ou ainda, se a relação (27) for obedecida, a forma funcional de $u(x)$ permanece invariante. Esta região é chamada *campo distante*. No campo distante

$$u(x) = A' e^{iKd + \frac{x^2}{2d}} \mathfrak{F} [u_x(x_0)]. \quad (29)$$

A região onde a forma funcional de $u(x)$ depende de d , ou seja, quando d é comparável com $\lambda/(\pi x_0^2)$, é chamada de *campo próximo*. É importante observar que quando se afirma que a forma funcional de $u(x)$ não depende de d , isto não significa que a função $u(x)$ permanece constante. A variável da qual a função u depende é de fato $x/(\lambda d)$ e não x somente, assim, $u(x/\lambda d)$ permanece constante no campo distante, ou ainda, no campo distante, se d dobra, a “largura” da função u também dobra.

O conceito de campo distante permite agora que se discuta a existência de modos de propagação no espaço livre. Pode-se então especular se existem distribuições de amplitude complexa de campo elétrico

com uma forma funcional que não se altere conforme a onda se propague no espaço livre. O que se está especulando aqui não é o caso do campo distante discutido acima, é uma situação mais restritiva: haverá alguma distribuição de amplitude complexa de campo elétrico que tenha a mesma forma funcional no campo próximo e no campo distante? Reformulando a pergunta, à luz da Eq. (29): “existe alguma função cuja forma funcional seja a mesma que a de sua transformada de Fourier?”

A resposta para a pergunta acima é: Sim! Há na realidade uma família de funções com formas funcionais iguais às de suas transformadas de Fourier e as distribuições de amplitude de campo elétrico que são descritas por estas funções são conhecidas como modos do espaço livre.

Será considerado, no entanto, um caso específico que é sugerido por qualquer pessoa que tenha estudado a transformada de Fourier: a função gaussiana. De qualquer livro texto que trate de transformadas de Fourier pode-se obter que

$$\mathfrak{F}\left(e^{-\alpha x^2}\right) = F(\kappa) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\kappa^2}{4\alpha}}, \quad (30)$$

ou, a transformada de Fourier de uma gaussiana é também uma gaussiana.

3.2. O feixe gaussiano

Postula-se agora a existência de um modo de propagação de ondas eletromagnéticas no espaço livre que em alguma posição no espaço tenha uma distribuição de amplitude complexa de campo elétrico dada por uma gaussiana, ou

$$u(x_0) = u_0 e^{-\frac{x^2}{w_0}}. \quad (31)$$

Este modo, que se convencionou chamar de modo TEM₀₀, corresponde ao modo fundamental de cavidades ressonantes estáveis de lasers [2, 13]. Ele tem grande interesse teórico e prático no estudo de lasers e de suas aplicações e em grande parte dos estudos teóricos da interação entre feixes de lasers e a matéria, o laser é considerado como emitindo neste modo. Para calcular como seria a distribuição de amplitude do campo elétrico após uma propagação de uma distância genérica z , usa-se a Eq. (25) com auxílio das Eqs. (23) e (30). Com isto

$$u(x) = A' e^{iKz} e^{i\frac{\pi}{2z}} \mathfrak{F}\left(e^{-\frac{x^2}{w_0} - i\frac{\pi}{\lambda z} x^2}\right) = A' e^{iKz} e^{i\frac{\pi}{2z}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{w_0} - \frac{i\pi}{\lambda z}}} e^{-\left\{\frac{\pi^2 x^2}{w_0^2 - i\frac{\pi}{\lambda z}}\right\}}. \quad (32)$$

Rearranjando esta expressão de modo a separar a exponencial com argumento real da exponencial de argumento imaginário, tem-se

$$u(x) = C(z) e^{-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2} e^{iK\left[z + \frac{\pi^2}{2R(z)}\right]}, \quad (33)$$

onde $C(z)$ está relacionada com a variação do pico de amplitude e depende exclusivamente de z ,

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}, \quad (34)$$

e

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]. \quad (35)$$

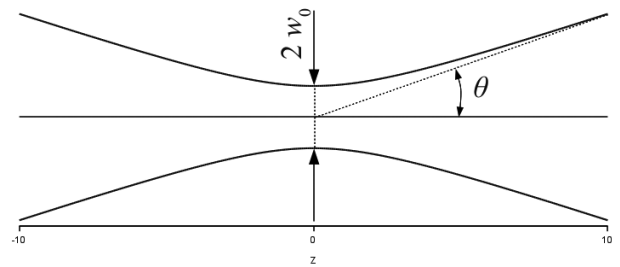


Figura 4 - Diâmetro do feixe TEM₀₀ ao longo do eixo de propagação z .

O parâmetro $w(z)$ é de fácil interpretação, pois está associado à “largura” da gaussiana e, desta maneira, está associado com o raio (metade do diâmetro) do feixe de laser. Convencionou-se definir o raio do feixe de laser no modo TEM₀₀ como $r = w$ [13]. Analisando a Eq. (34) observa-se que o raio do feixe de laser descreve uma hipérbole no espaço, como mostrado na Fig. 4. O menor valor de $w(z)$ é w_0 , chamado de cintura do feixe e ocorre para $z = 0$. Notar que esta posição não foi definida *a priori*. Surgiu espontaneamente como consequência da forma como foi definida $u(x_0)$. Assim, a posição onde $z = 0$ é definida *a posteriori*, ou seja, primeiramente define-se onde ocorre a cintura do feixe e esta posição corresponde a $z = 0$.

Da Eq. (34) verifica-se também que para $z \gg \lambda/\pi w_0^2$ (campo distante), $w(z)$ tende assintoticamente para a reta

$$w(z) \approx \frac{\lambda}{\pi w_0} z = \theta z, \quad (36)$$

onde o parâmetro

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (37)$$

é definido como a divergência do feixe de laser.

Desta última definição surge espontaneamente uma propriedade muito importante do feixe de laser no modo fundamental, o produto da cintura do feixe pela divergência é constante, ou

$$w_0\theta = \frac{\lambda}{\pi}. \quad (38)$$

Isto implica que se quisermos focalizar fortemente um feixe de laser (concentrar o feixe em áreas muito pequenas usando uma lente, por exemplo) teremos como consequência uma divergência muito alta, ou, de maneira recíproca, se quisermos um feixe “bem paralelo”, de pequena divergência, teremos como consequência um diâmetro de feixe “bem grande”.

A Eq. (35) tem uma interpretação mais capciosa, que dever ser iniciada, na realidade, com a análise da Eq. (33). É interessante estudar o formato da frente de onda e para fazer isto toma-se a exponencial com argumento imaginário e descreve-se a superfície que é determinada quando é considerada a fase (argumento da exponencial) constante igual a Q . Assim

$$z + \frac{x^2}{2R(z)} = Q, \quad (39)$$

que é a expressão de uma parábola com a concavidade voltada para a origem. Toma-se agora uma circunferência com raio R centrada em $(0, 0)$

$$x^2 + z^2 = R^2 \quad \text{ou} \\ z = R\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}. \quad (40)$$

Se for utilizada a aproximação $R \gg |x|$ pode-se expandir a raiz quadrada acima em série e tomar somente os dois primeiros termos não nulos e, rearranjando a expressão,

$$z + \frac{x^2}{2R} = R = \text{constante}. \quad (41)$$

Comparando este resultado com a Eq. (39), pode-se interpretar o termo $R(z)$ na Eq. (35) como sendo o raio de curvatura da frente de onda na posição z . A Fig. 5 mostra o comportamento de $R(z)$. A interpretação deste resultado é feita com auxílio da Fig. 6.

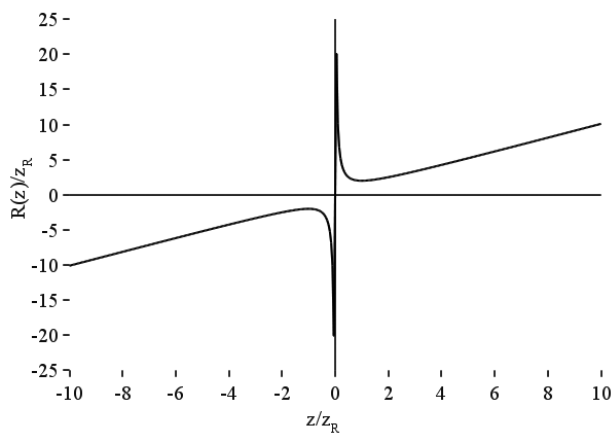


Figura 5 - Raio de curvatura da frente de onda de um feixe gaussiano em função de z .

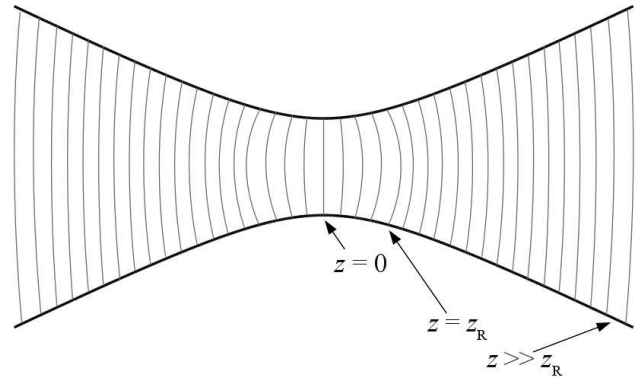


Figura 6 - Síntese das propriedades de propagação do feixe gaussiano: As linhas mais espessas indicam o envelope traçado pelo diâmetro do feixe, as linhas tênues indicam o raio de curvatura da frente de onda do feixe conforme este se propaga ao longo de z .

Segue-se agora uma síntese das propriedades de um feixe gaussiano. Supor que o feixe se propague da esquerda para a direita. Há uma posição no espaço em que o feixe possui o menor raio, chamado de cintura do feixe, e que corresponde a $z = 0$. Nesta mesma posição o feixe tem uma frente de onda plana. Antes da cintura do feixe (à esquerda, no nosso caso), o feixe é convergente e à direita é divergente. Há uma posição em particular, chamada de z_R , ou comprimento de Rayleigh, para o qual a frente de onda possui o menor raio de curvatura ($R(z_R) = 2z_R$) e o raio do feixe é $\sqrt{2}w_0$. Para distâncias muito maiores que a de Rayleigh (campo distante), a frente de onda é equivalente à de uma fonte puntiforme, ou seja $R(z) \approx z$.

Um propriedade fundamental que vale a pena ressaltar nessa síntese, é a já mencionada na Eq. (38).

Estas propriedades de propagação de feixes gaussianos concordam integralmente com os encontrados na literatura [2, 13, 14] obtidos com metodologias distintas da deste trabalho.

4. Conclusões

A metodologia apresentada neste trabalho foi desenvolvida com o intuito de introduzir alunos de graduação em matemática na óptica física. Os conceitos físicos necessários para a compreensão do contexto são discutidos de maneira fenomenológica e o desenvolvimento matemático do modelo é feito usando basicamente conteúdos vistos em um curso de Bacharelado em Matemática. A aplicação na propagação de um feixe gaussiano tem por objetivo validar o procedimento, uma vez que os resultados obtidos são conhecidos na literatura. Nos parece que a abordagem mostrada neste trabalho permite introduzir alunos de matemática no campo da óptica física sem passar necessariamente pelos estudos de eletromagnetismo, porém sem prejuízo na interpretação dos fenômenos relevantes.

Agradecimentos

Este trabalho é parte do mestrado do segundo autor, que o realizou com financiamento da CAPES.

Referências

- [1] K. Iizuka, *Engineering Optics* (Springer, New York, 1987).
- [2] A. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Stanford, 1986).
- [3] J. Ready, *LIA Handbook of Laser Material Processing* (Laser Institute of America, New York, 2001).
- [4] W.M. Steen, *Laser Material Processing* (Springer-Verlag, London, 1998), 2nd ed.
- [5] F.J. Keller, W.E. Gettys and M.J. Skove, *Física* (Makron, São Paulo, 1999), v. 2, p. 322.
- [6] Idem Ref. [5], p. 355.
- [7] C. Kittel, *Introdução à Física do Estado Sólido* (LTC, Rio de Janeiro, 2006), 8^a ed., cap. 10.
- [8] E. Butkov, *Física Matemática* (LTC, Rio de Janeiro, 1988), cap. 4.
- [9] Idem Ref. [5], p. 336.
- [10] Idem Ref. [5], p. 412.
- [11] Idem Ref. [8], cap. 7.
- [12] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (Roberts and Company, Greenwood Village, 2005), 3rd ed.
- [13] O. Svelto, *Principles of Lasers* (Springer, New York, 2004), 4th ed.
- [14] H. Kogelnik and T. Li, Proceedings of the IEEE **54**, 1312 (1966).