

Violão e guitarra como ferramentas para o ensino de física

(Acoustic and electric guitars as tools for the physics teaching)

E.M. Santos, C. Molina¹, A.P.B. Tufaile

Escola de Artes Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 10/3/2012; Aceito em 2/3/2013; Publicado em 30/5/2013

São propostas atividades práticas simples para a caracterização de propriedades do som produzido por violões e guitarras através de uma análise harmônica. Entre elas, propomos uma demonstração que pode ser feita em tempo real em sala de aula. Nas atividades desenvolvidas, amostras de som produzidas por instrumentos de cordas são capturadas e analisadas através de uma abordagem espectral. Propriedades físicas da corda do violão e guitarra são exploradas. Os resultados experimentais são comparados com as previsões teóricas, com uma concordância excelente. As ferramentas apresentadas podem ser utilizadas como material de apoio no estudo de cordas vibrantes, oscilações, ondas, equações diferenciais, análise harmônica baseada em transformadas de Fourier e instrumentação para o laboratório de física.

Palavras-chave: ensino de física, ondas, análise harmônica, equação de onda.

Simple practical activities are proposed for the characterization of the sound produced by guitars and electric guitars with a harmonic analysis. Among them, we propose a demonstration that can be carried out in real time at the classroom. In the developed activities, sound samples produced by string instruments are captured and analyzed within a spectral approach. Physical characteristics of the guitar strings are explored. Experimental results are compared with the theoretical predictions, with excellent agreement. The presented tools can be used as support material in the study of vibrating strings, oscillations, waves, differential equations, harmonic analyses based on Fourier transform, and physics laboratory instrumentation.

Keywords: physics teaching, waves, harmonic analysis, wave equation.

1. Introdução

Fenômenos associados a oscilações e ondas podem ser encontrados em qualquer instrumento musical. Ao promover vibração numa coluna de ar, vibrar uma corda ou percutir uma membrana, som é produzido. As vibrações associadas formam diferentes séries harmônicas que podem ser estudadas através da investigação de suas características espectrais. A análise harmônica de séries temporais, e em particular do som, é uma abordagem extremamente poderosa de investigação. O desenvolvimento de ferramentas didáticas para o estudo das técnicas envolvidas no tema é desta forma relevante.

A caracterização das propriedades do som produzido por alguns instrumentos musicais pode ser feita através do estudo de modelos simples para cordas e membranas vibrantes [1–4]. Propomos aqui atividades práticas para o estudo do som produzido por violões e guitarras, instrumentos presentes no cotidiano dos estudantes e acessíveis inclusive para os que não possuem experiência musical.

¹E-mail: cmolina@usp.br.

O nosso objetivo é manter a metodologia em um nível tão simples quanto possível, tanto do ponto de vista experimental como do teórico, de forma que as atividades possam ser feitas em tempo real como uma demonstração em sala de aula, ou alternativamente serem apresentadas como base para um experimento em laboratório. Esta demonstração pode ser complementada por atividades suplementares, conforme sugerido neste trabalho. Mostraremos que um tratamento teórico simples é suficiente para uma boa caracterização dos resultados experimentais.

Tópicos envolvendo teoria musical, física do som, análise de Fourier e equações diferenciais aparecem naturalmente na proposta apresentada. A escolha dos sistemas físicos para análise foi baseada nas características motivadoras e interdisciplinares propiciadas pelo estudo do som e da música [5, 6]. Muitos problemas ligados à análise do som, além de serem importantes nos cursos de física, matemática e engenharias, apresentam aspectos motivadores para alunos do ensino médio e superior.

2. O som produzido por uma corda vibrante

A temática deste trabalho é a utilização do violão ou guitarra como ferramentas para o ensino de física. Concretamente, propomos uma atividade onde o som do violão é gravado com um microfone ligado ao computador. Depois de tanger uma corda do violão, as vibrações da corda são transferidas para a caixa acústica que amplifica o som. Este som se propaga pelo ar até o microfone. No caso da guitarra, a vibração de suas cordas de aço gera um sinal elétrico nos captadores, via indução eletromagnética.

A modelagem teórica do mecanismo de produção de som por instrumentos de corda pode ser bastante complexa [1, 2]. O quadro básico é apresentado a seguir. Quando uma das cordas de um violão (ou outro instrumento do naipe de cordas) é perturbada, por meio de uma palheta ou apenas com o próprio dedo (pizzicato), o instrumentista inicia uma perturbação que se propaga pela extensão da corda. A energia é transmitida para o corpo do instrumento como um todo, e em particular para regiões ressonadoras. Estas regiões acoplam de forma eficiente a onda gerada no instrumento musical com o ar, produzindo o som que ouvimos.

A complexidade da geometria do ressonador de um violão pode sugerir que uma investigação baseada somente nas cordas seria inadequada. Em uma análise detalhada (que não é o objetivo deste trabalho), ressonâncias associadas ao corpo do instrumento e efeitos não-lineares não podem ser descartados. De fato, as características específicas relacionadas à confecção do violão são o que os tornam instrumentos que podem ser tão diversos [7]. Ainda assim, conforme mostraremos, os aspectos básicos do som produzido por estes instrumentos podem ser investigados por métodos simples. E para efeito de comparação, estudamos também o som produzido por guitarras elétricas. Nestes instrumentos, a oscilação da corda não é transmitida mecanicamente, já que o movimento da corda é captado por elementos eletrônicos. A análise conjunta do violão e da guitarra é instrutiva para quem apresenta a demonstração.

No modelo mais simples para um violão ou guitarra, somente a corda é considerada. A produção de uma perturbação em uma corda pode ser caracterizada como unidimensional. Assumindo que os deslocamentos da corda a partir da sua posição de equilíbrio são pequenos, os fenômenos ondulatórios em instrumentos de corda podem ser descritos por uma equação diferencial na forma [8]

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

onde a função $z(x, t)$ denota o deslocamento transversal no ponto x da corda no instante de tempo t . Esta é a chamada equação de onda. A grandeza v representa a velocidade de propagação da onda considerada. Con-

siderando uma corda com densidade linear uniforme μ (massa por unidade de comprimento) e sujeita a uma tensão τ , a velocidade da perturbação na corda pode ser expressa [8] como

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (2)$$

A tensão τ aplicada à corda pode ser variada pelo aperto ou afrouxamento das tarraxas que são usadas para afinação do instrumento.

Mas a equação de onda (1) não caracteriza completamente a física do problema. A escolha de condições de contorno apropriadas constitui parte importante do modelo teórico. Para obter diferentes notas musicais, o instrumentista pressiona os dedos entre duas das diversas casas do braço de um instrumento de corda. Ao fazê-lo, o comprimento efetivo da corda é variado. Denotando por L o comprimento efetivo da corda, tomamos que

$$z(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad z(L, t) = 0, \quad (3)$$

ou seja, assumimos a corda presa nas duas extremidades e, portanto uma onda confinada entre $x = 0$ e $x = L$.

Uma propriedade importante da Eq. (1) é a sua linearidade. Uma equação diferencial é dita linear se a combinação linear de duas soluções é também uma solução. Do ponto de vista físico, podemos dizer que vale para os problemas que são descritos pela Eq. (1) o Princípio da Superposição: combinações lineares de soluções são também soluções. No caso de fenômenos ondulatórios, processos de interferência construtiva e destrutiva são decorrência da linearidade da equação de onda, ou de forma equivalente, do princípio de superposição para ondas [8]. Do ponto de vista prático, a linearidade da equação de onda permite o estudo de soluções complexas em termos de soluções facilmente tratáveis.

A ideia básica da análise espectral é expressar o resultado geral como a soma de elementos de uma série, cada um destes, uma solução simples. Para cada uma destas soluções, teremos uma frequência associada. O conjunto de frequências possíveis é denotado de espectro. No trabalho desenvolvido aqui, o espectro é mais importante do que as soluções propriamente ditas. Isso porque no nosso tratamento experimental teremos acesso ao som produzido pelos instrumentos de interesse.

Com as condições de contorno (3), soluções particulares (os modos de vibração) podem ser obtidas, por exemplo, através do método de separação de variáveis [9], chegando-se a

$$z_n(x, t) = \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos(2\pi f_n t). \quad (4)$$

O número inteiro n ($n = 1, 2, 3, \dots$) identifica os diversos modos. A linearidade da equação de onda (1) garante que a combinação destes modos também é uma solução.

As frequências f_n , ditas frequências normais, formam o espectro de vibrações da corda [8]. Elas são dadas por

$$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (5)$$

No caso da corda, todas as frequências normais são múltiplos inteiros de uma frequência básica ($n = 1$), o modo fundamental ou primeiro modo harmônico. Os próximos modos harmônicos ($n = 2, 3, \dots$) são o primeiro sobretom, segundo sobretom, etc. São estes os observáveis físicos que foram investigados neste instrumento.

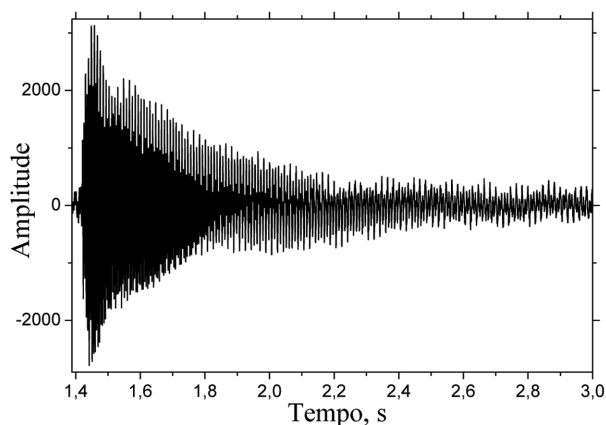
3. Analisando o som do violão e da guitarra

Os conceitos físicos discutidos na seção anterior podem ser contextualizados em uma demonstração feita em sala de aula. Para esta demonstração, são utilizados os seguintes itens:

- violão, ou guitarra;
- computador;
- microfone de computador (no caso do violão);
- plataforma de manipulação básica de som, por exemplo a *EXPstudio Audio Editor*;
- plataforma para a manipulação de dados numéricos, por exemplo o *Origin 8.0*.

O roteiro sugerido para a demonstração é indicado a seguir.

1. Uma dada casa de uma das cordas do violão é escolhida e toca-se uma nota musical, gerando uma



amostra de som. No caso do violão, o som é captado pelo microfone. No caso da guitarra, a sua saída é conectada diretamente à entrada da placa de som do computador.

2. São realizadas gravações de amostras de som produzido pelo instrumento. Nos testes realizados, todas as amostras foram gravadas em saída mono, com frequência de amostragem de 8.000 Hz, 16 bits através da plataforma *EXPstudio Audio Editor*. A frequência de amostragem é a frequência com a qual o sinal é registrado.
3. A amostra de som é gravada em formato *wave* (ou outro formato padrão de arquivo de áudio). O arquivo *wave* é importado pela plataforma *Origin 8*.
4. O gráfico da amplitude em função do tempo é apresentado à classe. Inicialmente toda a amostra de som, e posteriormente um pequeno trecho da amostra, ressaltando o perfil típico de oscilação. Ver a Fig. 1.
5. Uma transformada de Fourier é aplicada no arquivo de dados (amplitude em função do tempo), gerando o gráfico da potência em função da frequência. O gráfico é apresentado, conforme a Fig. 2.
6. As frequências dos picos de potência são coletadas.
7. O gráfico das frequências dos diversos picos é produzido e apresentado. Uma reta é o ajuste imediato para os dados. Esta reta é então comparada com o modelo teórico esperado. Veja a Fig. 3.

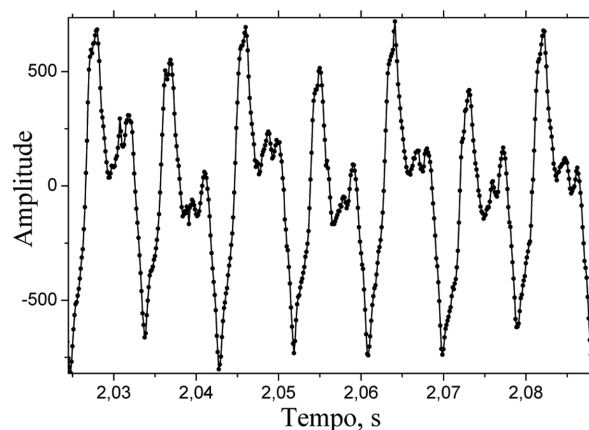


Figura 1 - (Esquerda) Decaimento da amplitude sonora em função do tempo, violão, corda 6, casa 7, nota musical e altura entre oitavas B1 (si1) 123,4 Hz, modo fundamental. (Direita) Detalhe da forma de onda sonora num trecho de 0,05 s.

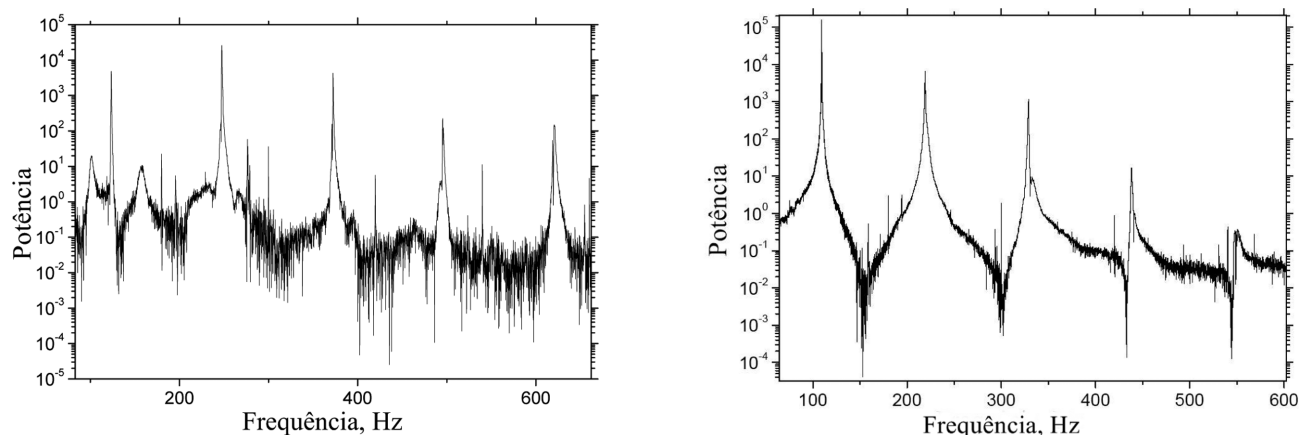


Figura 2 - (Esquerda) Análise espectral, via transformada rápida de Fourier, do som produzido por um violão, corda 6, casa 7, nota musical e altura entre oitavas B1 (si1) 123,4 Hz, modo fundamental. (Direita) Análise espectral, via transformada rápida de Fourier, do som produzido por uma guitarra, corda 6, casa 5, nota musical e altura entre oitavas A1 (lá1) 110 Hz, modo fundamental.

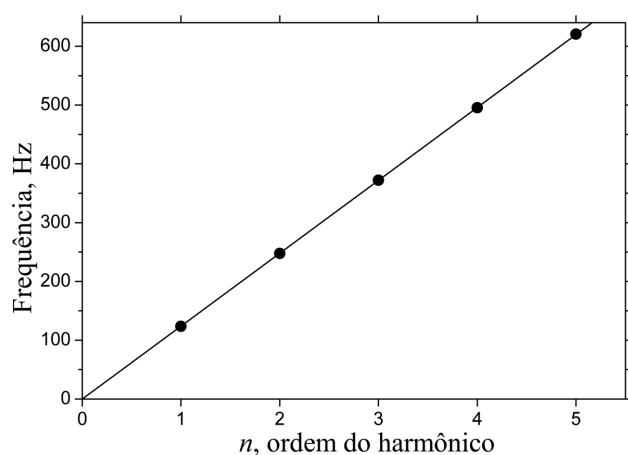


Figura 3 - Modos normais para a corda 6, casa 7, de um violão. A linha representa a reta teórica ($f_n = \alpha n$) ajustada aos pontos experimentais. Neste gráfico, $\alpha = (124,0 \pm 0,07)$ Hz.

A nossa estimativa de tempo para uma rodada de atividades, realizada de forma confortável, é de cerca de 20 minutos. A rotina pode ser repetida para várias amostras de som, tomadas com várias cordas e notas específicas.

O experimento sugerido foi realizado repetidas vezes com um violão *Giannini Série Estudo* e uma guitarra *Epiphone/Gibson Special Model*. Discutimos a seguir os resultados esperados. Medidas mais detalhadas são incluídas no apêndice (Tabela 2) como referência.

O decaimento da amplitude das amostras de som em função do tempo é apresentado na Fig. 1 para o violão. Resultados qualitativamente semelhantes são obtidos para a guitarra. Observamos que a vibração de cordas com espessura maior é sustentada por mais tempo. Também observamos que frequências agudas têm sustentação menor que frequências mais graves, ou de forma equivalente, quanto menor a corda menor a sustentação do som produzido. Isto implica que a dissipação de energia da corda é maior quanto mais alta a frequência.

É observado na Fig. 1 à direita que a função de onda é composta por um trecho que (aproximadamente) se repete. Esta onda é uma superposição específica de modos normais que caracterizam o timbre da nota. A rigor, a periodicidade do sinal é apenas aproximada, visto que o violão perde energia com o tempo, e o sinal decai constantemente. A análise da guitarra leva as mesmas conclusões.

Passamos então para a análise espectral do som capturado. Os modos normais de vibração das cordas dos instrumentos analisados foram interpretados com os gráficos da potência em função da frequência, que descrevem os harmônicos em picos de potência. Exemplos representativos dos resultados obtidos são mostrados na Fig. 2, onde (para o caso do violão) aparecem os cinco primeiros harmônicos correspondentes à amostra de som apresentadas na Fig. 1. Resultados para a guitarra são também exibidos. Ressaltamos aqui que apesar da mecânica da corda no violão e guitarra serem muito parecidas, a produção efetiva de som é completamente diferente nos dois instrumentos. Ainda assim, observamos que as características espectrais do som produzido pelo violão e guitarra é semelhante, conforme ilustrado na Fig. 2. Este resultado valida a utilização destes instrumentos na atividade proposta.

Na maior parte dos espectros obtidos para violão e guitarra foram identificados cinco picos de boa qualidade (os cinco primeiros harmônicos), conforme apresentado na Fig. 2. Vemos também nesta figura que o sinal da guitarra tem maior relação sinal/ruído, pois ele é gerado e registrado de forma mais direta neste instrumento.

As frequências mais altas que 4.000 Hz não tiveram picos bem definidos porque estão muito próximos da frequência de amostragem de 8.000 Hz. Fenômenos que ocorrem com frequência de mesma ordem de grandeza que a frequência de amostragem não são facilmente registrados. Para o registro de sons mais agudos que os produzidos nas atividades propostas, frequências

de amostragem maiores devem ser usadas. Assim, 4.000 Hz foi o limite da técnica usada no arranjo experimental descrito neste trabalho.

As frequências dos harmônicos foram tomadas no ponto de máxima potência dos picos. Após a identificação dos harmônicos por meio da transformada rápida de Fourier, os valores medidos foram submetidos à comparação com o modelo linear teórico para a corda. Os resultados demonstraram que os dados experimentais concordam com o modelo linear. Um exemplo típico é apresentado na Fig. 3 para o violão. A guitarra fornece resultados similares.

4. Determinando a velocidade da onda e tensão na corda

Esta seção apresenta procedimentos complementares, que podem ser realizados quando houver possibilidade de se medir o comprimento L da corda e de se conhecer a densidade linear μ da corda analisada. O objetivo aqui é o cálculo da tensão e velocidade de propagação da perturbação na corda, duas grandezas importantes na caracterização física do instrumento musical.

Nesta atividade são utilizados:

- uma corda do violão ou guitarra, cujas frequências associadas tenham sido analisadas na atividade anterior;
- trena milimetrada comum;
- balança de precisão ou balança analítica.

O roteiro sugerido para o desenvolvimento é:

1. Com a trena, é medido o comprimento livre da corda (L), ou seja, a distância entre a ponte e a pestana ou o traste correspondente. Este comprimento pode ser medido diretamente no instrumento musical.

2. Conhecendo-se L e o coeficiente angular α da reta ajustada, que pode ser substituído pela frequência fundamental como aproximação para simplificação, a velocidade da onda na corda é calculada. Da Eq. (5), podemos ver que $\alpha = v/2L$, e a partir desta relação o valor da velocidade v é obtido.
3. Corta-se um pedaço de comprimento especificado da corda, denotado aqui por ℓ .
4. A balança é usada para medir a massa m de um pedaço de comprimento ℓ da corda.
5. A densidade linear da corda (μ) é determinada pela relação $\mu = m/\ell$.
6. A tensão da corda τ é calculada a partir da Eq. (2), conhecendo-se a velocidade v da onda na corda e a densidade linear μ .

O tempo estimado para a realização da série apresentada é de 30 minutos. Ela pode ser repetida várias vezes para cordas diferentes, ou para a mesma corda de forma a gerar dados para uma análise estatística de erros.

Como referência, apresentamos alguns de nossos resultados nas Tabela 1, que serão usados como base para alguns comentários sobre algumas características relevantes da atividade proposta. Resultados complementares são apresentados no apêndice (Tabela 3).

Na Tabela 1, temos uma comparação entre a 6ª corda do violão e da guitarra, afinadas na mesma nota musical, portanto na mesma frequência fundamental. Neste caso, as grandezas densidade linear, comprimento, tensão e velocidade da onda na corda são maiores na guitarra em comparação com o violão. Estas grandezas estão todas relacionadas entre si, mas olhando suas relações podemos perceber que a tensão para afinar esta corda deve ser maior na guitarra porque o comprimento e a densidade linear são maiores.

Tabela 1 - Comparação entre violão e guitarra através da 6ª corda, casa 0, com afinação de 82,4 Hz.

Instrumento	Material da corda	μ (10^{-3} kg/m)	L (m)	α (Hz)	τ (N)	v (m/s)
violão	nylon	5,53(2)	0,609(2)	82,40(3)	55,7(3)	100,4(4)
guitarra	aço	7,13(2)	0,638(2)	82,29(5)	78,6(4)	105,0(4)
		29% maior	4,8% maior		41% maior	4,6% maior

5. Comentários finais

Verificamos que a aplicação de um modelo teórico simples é bem sucedida na descrição do som produzido por violões e guitarras. Desta forma, estes instrumentos musicais podem ser utilizados como material complementar no estudo de uma gama de tópicos que envolvem oscilações, ondas, equações diferenciais e análise

espectral.

Ressaltamos o caráter didático dos resultados aqui desenvolvidos com a apresentação de roteiros de atividades para demonstrações em sala ou laboratório. A demonstração proposta é simples, podendo ser realizada diretamente em sala de aula. Mesmo utilizando uma saída de som com baixa resolução temporal (frequência de amostragem de 8.000 Hz), a análise apresentada

neste trabalho se mostrou adequada para os sons produzidos por violões e guitarras. Os espectros das cordas obtidos a partir destes instrumentos são de tão boa qualidade que apenas identificar a frequência de máximo dos picos proporcionou ótimos resultados. Ressaltamos também que como a gravação das vibrações da guitarra é mais direta que no caso do violão, os dados da guitarra apresentam maior relação sinal/ruído.

Se existir a disponibilidade de mais tempo e espaço de laboratório, a demonstração básica pode ser complementada com novas atividades. Sugerimos neste trabalho uma série de procedimentos para o cálculo de quantidades físicas relevantes, especificamente velocidade de propagação e tensão na corda. A dinâmica destas atividades complementares pode ser usada como introdução à instrumentação básica em um laboratório de física.

Agradecimentos

O trabalho apresentado neste artigo foi parcialmente financiado pelo CNPq e pela Pró-Reitoria de Graduação da Universidade de São Paulo.

Apêndice: resultados complementares

São apresentados, nas Tabelas 2 e 3, resultados mais detalhados obtidos usando um violão *Giannini Série Estudo* e uma guitarra *Epiphone/Gibson Special Model*. A posição das casas 1 – 19 e das cordas 1 – 6 é indicada na Fig. 4. A “casa 0” implica em que a corda não é pressionada. Ambos os instrumentos foram previamente afinados de forma padrão. Para uma afinação com melhor precisão, foi utilizado um afinador cromático digital.

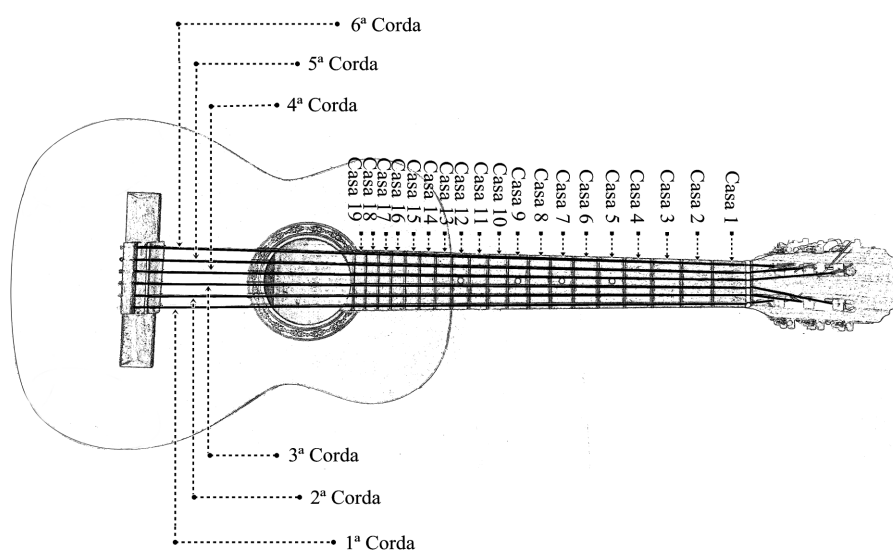


Figura 4 - Diagrama de um violão, com a indicação das casas 1 – 19 e das cordas 1 – 6.

Tabela 2 - Frequências do modo fundamental (f_1) e dos quatro primeiros sobretons (f_2 a f_5) para quatro pontos da 6ª corda E1 (Mi1), 82,4 Hz, violão e guitarra. O coeficiente angular da reta de ajuste (α) é apresentado.

Modos normais - Violão - 6ª corda E1 (Mi1)						
$\mu = (5,53 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$						
Casa	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	α (Hz)
0	82,3	165,0	246,8	329,6	411,9	$82,40 \pm 0,03$
5	110,3	221,3	332,0	442,0	552,0	$110,5 \pm 0,05$
10	146,0	294,3	441,0	587,7	734,0	$146,8 \pm 0,08$
15	196,0	396,0	592,3	790,5	990,9	$197,8 \pm 0,10$

Modos normais - Guitarra - 6ª corda E1 (Mi1)						
$\mu = (7,13 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$						
Casa	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	α (Hz)
0	82,1	164,5	246,8	329,7	411,1	$82,29 \pm 0,05$
5	109,5	219,1	328,8	438,3	550,6	$109,8 \pm 0,1$
10	145,4	291,3	438,3	584,3	735,3	$146,5 \pm 0,3$
15	193,6	389,0	584,4	783,0	983,0	$195,9 \pm 0,4$

Tabela 3 - Cálculos de velocidade de propagação e tensão da para quatro pontos da 6ª corda, E1 (Mi1), 82,4 Hz, violão e guitarra.

Velocidade e tensão - Violão - 6ª corda E1 (Mi1)			
$\mu = (5,53 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$			
Casa	L (m)	τ (N)	v (m/s)
0	$0,609 \pm 0,002$	$55,7 \pm 0,3$	$100,4 \pm 0,3$
5	$0,460 \pm 0,002$	$57,2 \pm 0,4$	$101,7 \pm 0,4$
10	$0,346 \pm 0,002$	$57,1 \pm 0,5$	$101,6 \pm 0,5$
15	$0,260 \pm 0,002$	$58,5 \pm 0,7$	$102,9 \pm 0,6$

Velocidade e tensão - Guitarra - 6ª corda E1 (Mi1)			
$\mu = (7,13 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$			
Casa	L (m)	τ (N)	v (m/s)
0	$0,638 \pm 0,002$	$78,6 \pm 0,4$	$105,0 \pm 0,3$
5	$0,483 \pm 0,002$	$80,2 \pm 0,5$	$106,1 \pm 0,4$
10	$0,365 \pm 0,002$	$81,5 \pm 0,7$	$106,9 \pm 0,5$
15	$0,275 \pm 0,002$	$82,8 \pm 0,9$	$107,7 \pm 0,6$

Referências

- [1] Alejandra Kandus, Friedrich Wolfgang Gutman, Caio Mário Castro de Castilho, Revista Brasileira de Ensino de Física **28**, 427 (2006).
- [2] José Pedro Donoso, Alberto Tannús, Francisco Guimarães e Thiago Corrêa de Freitas, Revista Brasileira de Ensino de Física **30**, 2305 (2008).
- [3] Eric Battenberg, *A Theoretical and Experimental Analysis of the Acoustic Guitar* (2009). Projeto apresentado em http://www.ericbattenberg.com/school/ebattenberg_ME173_S09.pdf, acesso em 25/2/2013.
- [4] E. Riskedal, *Drum Analysis*. Tese de doutorado, University of Bergen, 2002.
- [5] Wilson Leandro Krummenauer, Terrimar Ignácio Pasqualetto e Sayonara Salvador Cabral da Costa, A Física na Escola, **10**, 22 (2009).
- [6] Teca Alencar de Brito, Revista da ABEM **21**, 25 (2009).
- [7] Rodrigo Mateus Pereira, Albary Laibida Junior e Thiago Corrêa de Freitas, Physicae **9**, 24 (2010).
- [8] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor* (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2002), v. 2.
- [9] E. Butkov, *Física Matemática* (Addison Wesley, São Paulo, 1968).