

# Oscilações de Relaxação e suas Aplicações - II

(*Relaxation oscillations and their applications - II*)

R.L. Viana<sup>1</sup>

*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil*

Recebido em 2/7/2010; Aceito em 16/6/2011; Publicado em 5/10/2011

Oscilações de relaxação são mantidas por uma influência externa constante e apresentam duas escalas de tempo diferentes (lenta e rápida). Num trabalho anterior enfatizamos as diferenças qualitativas entre oscilações pendulares e de relaxação, mostrando alguns exemplos físicos. Neste artigo apresentamos a contribuição pioneira dada a este assunto pelo físico holandês Balthazar Van der Pol, bem como algumas propriedades da equação que leva seu nome, e que é um dos protótipos de sistemas dinâmicos não-lineares. Mostramos aplicações da equação de Van der Pol na física e na biologia.

**Palavras-chave:** oscilações de relaxação, oscilações não-lineares, oscilações auto-sustentadas.

Relaxation oscillations are maintained by a constant external influence and present two different timescales (fast and slow). In a previous paper we emphasized the qualitative differences between pendular and relaxation oscillations, showing some physical examples. In this paper we present the pioneering contribution given to this subject by the dutch physicist Balthazar Van der Pol, as well as some properties of the equation bearing his name, and which is one of the prototypes of nonlinear dynamical systems. We show applications of the Van der Pol equation in physics and biology.

**Keywords:** relaxation oscillations, nonlinear oscillations, self-sustained oscillations.

## 1. Introdução

Num trabalho anterior, que será denominado doravante simplesmente por I [1], apresentamos as propriedades básicas das oscilações de relaxação e suas diferenças com as oscilações pendulares, estas mais familiares aos estudantes de física. No entanto, devido ao grande número de aplicações das oscilações de relaxação, em I nós as estudamos por meio de dois exemplos físicos, um sistema mecânico e um circuito elétrico. Para ambos os exemplos observamos que oscilações de relaxação são entretidas por uma influência externa constante, e também apresentam duas escalas de tempo distintas, que denominamos “lenta” e “rápida”.

No primeiro dos exemplos apresentados em I, o chamado “vaso de Tântalo”, um vaso sifonado recebe um fluxo constante d’água proveniente de uma torneira. Enquanto o nível d’água no vaso não atinge a altura máxima do sifão, o vaso vai sendo preenchido e o nível d’água cresce de forma linear (escala “lenta”). Depois que a água atinge a altura máxima do sifão, este começa a escorvar o vaso rapidamente em relação ao preenchimento (escala “lenta”) [2]. Depois que o nível d’água no vaso atinge a altura da “boca” (extremidade livre) do sifão, o escorvamento é interrompido e o vaso re-

começa a ser preenchido, num processo oscilatório onde o período pode ser variado de forma relativamente fácil (por exemplo, alterando a vazão com que a água escorre da torneira).

Já a amplitude no vaso de Tântalo não é tão fácil de ser alterada, pois demandaria mudar a altura máxima do sifão e/ou a posição da sua “boca”. Em ambos os casos teríamos as modificações são bem mais difíceis do que as necessárias quando queremos alterar o período do sistema. Essas propriedades são completamente diferentes das apresentadas por oscilações de um pêndulo, as quais têm um período bem-definido e que depende de constantes físicas, como a aceleração da gravidade e o comprimento do fio, que não podem ser facilmente alteradas. Por outro lado, a amplitude das oscilações do pêndulo é muito fácil de ser alterada.

O segundo exemplo apresentado em I consiste em um circuito elétrico com uma lâmpada de neônio, que só é acesa se a diferença de potencial entre seus eletrodos for maior do que uma dada tensão de ignição [2]. Além disso, se a mesma diferença de potencial for menor do que um certo valor (tensão de extinção), a lâmpada apaga devido à inexistência de descarga elétrica entre seus eletrodos. A lâmpada de neônio faz parte de um circuito RC com uma fonte de tensão contínua.

<sup>1</sup>E-mail: viana@fisica.ufpr.br.

Inicialmente o capacitor do circuito é carregado pela fonte de tensão, fazendo com que a diferença de potencial entre os terminais da lâmpada aumente. Enquanto essa ddp não for igual à tensão de ignição, porém, a lâmpada permanecerá apagada (escala “lenta”). A partir do momento em que a ddp atingir esse valor limite, a lâmpada acende e descarrega rapidamente o capacitor (escala “rápida”). A tensão no capacitor executa oscilações de relaxação, nesse caso. Assim como para o vaso de Tântalo o período das oscilações é facilmente alterado, pois depende, entre outros fatores, da tensão constante aplicada ao circuito, a qual pode ser variada por meio de um reostato, por exemplo.

Em contraste, a amplitude das oscilações depende das tensões de ignição e extinção da lâmpada, que são características muito difíceis de alterar. Neste exemplo, o análogo de oscilações pendulares é um circuito LC oscilante com uma fonte de tensão externa, para o qual o período é difícil de ser alterado, pois depende de capacitâncias e indutâncias que são parâmetros nominais do circuito. Mas a amplitude é mais fácil de ser modificada, pois está relacionada à tensão que alimenta o circuito.

Outra diferença bastante significativa entre oscilações pendulares e de relaxação é que, para as primeiras, podemos obter harmônicos com uma frequência característica, ao passo que, nas oscilações de relaxação, as formas de onda são tipicamente uma combinação de muitos harmônicos. Nas oscilações pendulares de pequena amplitude, temos naturalmente uma solução senoidal ou cossenoidal com uma única frequência. Mas nas oscilações de relaxação de um vaso de Tântalo, por exemplo, as oscilações são tipicamente “dentes de serra”, cuja análise de Fourier revela uma grande riqueza harmônica.

As oscilações pendulares e de relaxação, a despeito das suas diferenças qualitativas, são na verdade casos-limite de oscilações auto-sustentadas. Variando um parâmetro de não-linearidade é possível obter oscilações de um e de outro tipo como situações particulares. Oscilações auto-sustentadas ocorrem em diversos problemas físicos, como o de um sistema massa-mola, onde a massa desliza com atrito sobre uma esteira em movimento [3]. Enquanto o corpo é arrastado pela esteira em movimento, a mola vai sendo distendida, aumentando portanto a força restauradora que a mola exerce sobre a massa. Para que a massa permaneça em repouso em relação à esteira é necessário que a força de atrito *estático* entre a massa e a esteira aumente na mesma proporção. No entanto, se a força de atrito estática exceder o seu valor máximo (que é dado pelo produto do coeficiente de atrito estático pelo módulo da força normal), o corpo descola da esteira enquanto a mola encolhe.

O movimento de retorno da mola, por outro lado, é amortecido pelo atrito *cinético* entre a massa e a esteira, fazendo com que a massa volte a ficar em repouso

em relação a esteira, o que faz com que volte a ser arrastada por ela, completando o ciclo de oscilação. Este é um exemplo do fenômeno “adere-desliza” (ou “stick-slip”), que ocorre em várias aplicações quotidianas [4]. Os sons emitidos por uma corda de violino, por exemplo, são provocados pelo fenômeno adere-desliza entre o arco do violino e a corda esticada. O mesmo fenômeno está por trás dos sons emitidos por uma taça de cristal quando passamos um dedo umedecido por sua borda.

Neste segundo trabalho sobre oscilações de relaxação e suas aplicações, vamos abordar de forma unificada oscilações pendulares e de relaxação a partir da chamada equação de Van der Pol, que descreve oscilações auto-sustentadas de maneira geral. Além das propriedades matemáticas da equação, como seus pontos de equilíbrio e estabilidade, vamos mostrar o efeito de perturbações periódicas sobre as oscilações. Finalmente, estudaremos um exemplo de interesse biológico, que são os batimentos cardíacos, analisados do ponto de vista da equação de Van der Pol.

A estrutura desse artigo é a seguinte: na seção 2 nós apresentaremos a chamada equação de Van der Pol. Na seção 3 apresentamos um circuito elétrico que pode ser descrito por ela. Na seção 4 analisamos algumas propriedades matemáticas da equação de Van der Pol. A seção 5 aborda como as oscilações de relaxação podem ser obtidas como soluções periódicas dessa equação. Na seção 6 estudamos o efeito de perturbações periódicas, e na seção 7 mostramos como idéias envolvendo oscilações de relaxação podem ser aplicadas à descrição do batimento cardíaco. A última seção é dedicada às nossas conclusões.

## 2. A equação de Van der Pol

Balthazar Van der Pol (Utrecht, Holanda, 1889- Wassenaar, Holanda, 1959) (Fig. 1) graduou-se em Física *cum laude* em 1916, pela Universidade de Utrecht. Nesse mesmo ano, ele viajou à Inglaterra, onde trabalhou com John Ambrose Fleming na Universidade de Londres até 1917, e depois no Laboratório Cavendish da Universidade de Cambridge, com Sir J.J. Thompson. Em 1919 Van der Pol retornou a Utrecht, onde concluiu seu doutoramento em 1920 (observe que o chamado “doutorado sanduiche” é uma instituição bastante antiga!), com a tese: “O efeito de um gás ionizado sobre a propagação de ondas eletromagnéticas e medidas do fluxo de descarga”.

De 1919 a 1922 Van der Pol foi assistente de nada menos que Hendrik Lorentz no Instituto Teyler da Universidade de Haarlem, também na Holanda. Em 1922 ele tornou-se Chefe dos Laboratórios de Pesquisas da Indústria Phillips em Eindhoven (Holanda), posição esta que ocupou até sua aposentadoria em 1949. Em determinados períodos, Van der Pol foi também professor das Universidades de Delft e Eindhoven, e, após sua aposentadoria, foi Professor Vistante nas Universidades

americanas de California (Berkeley) e Cornell [5].

Van der Pol foi um exemplo interessante de físico que deu contribuições significativas tanto à academia quanto à indústria. Por exemplo, em 1927 ele recebeu a Ordem de “Nassau Oranje” por ter estabelecido a primeira comunicação rádio-telefônica entre a Holanda e as Índias Ocidentais. Suas contribuições na área industrial foram principalmente na área de rádio-comunicação e propagação de ondas. Curiosamente, esse trabalho aplicado levou a seu envolvimento com tubos de vácuo em circuitos retificadores, utilizados amplamente na tecnologia de radio-comunicações. E foi justamente nessa área que a contribuição acadêmica de Van der Pol foi mais importante [6].

A equação de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (1)$$

onde  $x$  é uma variável dependente do tempo  $t$ , é um paradigma teórico para o estudo de oscilações de relaxação. Consideramos, em princípio, que  $x$  pode assumir qualquer valor real, e que  $\epsilon \geq 0$  é um parâmetro que mede a não-linearidade do sistema. A Eq. (1) foi introduzida por Van der Pol em 1926 para modelar o comportamento de circuitos eletrônicos contendo tubos de vácuo do tipo triodo, que na época eram utilizados como elementos retificadores [7–9]. Na próxima seção veremos como uma classe de circuitos elétricos com elementos não-lineares pode ser modelada pela equação de Van der Pol.



Figura 1 - Balthazar Van der Pol.

O comportamento físico do circuito investigado por Van der Pol é muito parecido com o do circuito com lâmpada de neônio abordado em I. O fato da equação de Van der Pol também apresentar soluções descrevendo oscilações de relaxação levou a uma intensa pesquisa sobre a sua estrutura matemática, levada a cabo por matemáticos como Cartwright e Littlewood [10], e M. Levinson [11] na década de 1940.

Um dos motivos deste interesse particular na equação de Van der Pol é o fato desta apresentar um comportamento dinâmico bastante complicado quando é adicionado um termo externo periódico no tempo (uma tensão AC, de fato). Para determinados valores dos parâmetros do sistema, Van der Pol e seus colaboradores observaram um comportamento bastante

irregular, parecido com o ruído típico de processos estocásticos [9]. Hoje em dia sabe-se que este comportamento é, na verdade, caótico; e grande parte do que se conhece atualmente sobre sistemas caóticos veio justamente da análise matemática das soluções da equação de Van der Pol [12–14].

### 3. Modelo de um circuito elétrico não-linear

Considere o circuito esquematizado na Fig. 2, consistindo num capacitor de capacitância  $C$ , uma fonte de força eletromotriz  $\mathcal{E}$ , um indutor de indutância  $L$  e um “resistor” não-linear  $R$ , sobre o qual falaremos daqui a pouco. A corrente na malha é denotada por  $I$  e as quedas de tensão no capacitor, no indutor e no resistor são denotadas  $V_C$ ,  $V_L$  e  $V_R$ , respectivamente. Temos que, para a malha do circuito em questão,

$$\mathcal{E} = V_C + V_L + V_R. \quad (2)$$

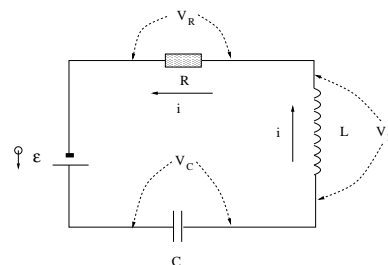


Figura 2 - Esquema de circuito descrito pela equação de Van der Pol.

É essencial que esse elemento do circuito **não seja** ôhmico para que possa haver oscilações de relaxação (se o resistor for ôhmico, as oscilações são pendulares, como vimos anteriormente). A resposta do resistor não-linear a uma dada corrente é representada pela sua curva característica  $V_R = \phi(i)$ , onde a função  $\phi$  é esquematizada na Fig. 3. Adotaremos a forma

$$\phi(i) = -\alpha i + \beta i^3, \quad (3)$$

onde  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  são constantes que caracterizam o comportamento do resistor. O termo  $-\alpha i$  pode ser fisicamente interpretada como proveniente de uma “resistência negativa”, já que para pequenos valores da corrente o elemento não-linear está *fornecendo* energia ao sistema, ao invés de dissipá-la em calor, como num resistor convencional. Além disso, para valores maiores da corrente o termo cúbico predomina sobre o linear na Eq. (3), e a resistência elétrica torna-se positiva, donde o elemento não-linear está *retirando* energia do circuito.

Van der Pol originalmente usou, como elemento não-linear, um tubo de vácuo do tipo triodo [7, 8]. Além do anodo e catodo (que também existem numa lâmpada de neônio, por exemplo) o triodo possui ainda uma grade condutora entre os dois, com a finalidade de controlar a passagem de elétrons. Modernamente pode-se construir

elementos não-lineares a partir de diodos semicondutores, como o diodo túnel ou o diodo Zener.

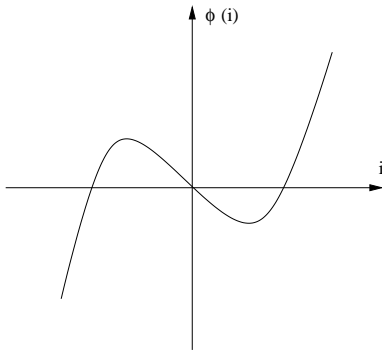


Figura 3 - Curva característica (esquemática) para o resistor não-linear.

Usando a Eq. (3) e as definições de capacitância e indutância, e ainda adotando a convenção “passiva” de sinais na lei de Kirchhoff, podemos reescrever a Eq. (2) na forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{C}q_C + L\frac{di}{dt} + \phi(i), \quad (4)$$

onde  $q_C$  é a carga nas placas do capacitor. Derivando essa expressão em relação ao tempo

$$\frac{1}{C}\frac{dq_C}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{d\phi(i)}{dt}, \quad (5)$$

onde presumimos que  $\mathcal{E}$ ,  $C$  e  $L$  têm valores constantes. Pela regra da cadeia

$$\frac{d\phi(i)}{dt} = \frac{d\phi(i)}{di} \frac{di}{dt} = (-\alpha + 3\beta i^2) \frac{di}{dt}, \quad (6)$$

e, lembrando que  $\dot{q}_C = i$ , obtemos a equação diferencial do circuito

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (3\beta i^2 - \alpha) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0. \quad (7)$$

Introduzindo a frequência “natural” do circuito LC

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (8)$$

podemos adimensionalizar a Eq. (7) definindo as seguintes variáveis normalizadas

$$x \equiv \sqrt{\frac{3\beta}{\alpha}}i, \quad t' \equiv \omega_0 t, \quad \epsilon \equiv \frac{\alpha}{\omega_0 L}, \quad (9)$$

de sorte que chegamos à equação de Van der Pol

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (10)$$

onde os pontos indicam derivadas em relação ao tempo normalizado  $t'$ .

## 4. Soluções de equilíbrio e sua estabilidade

A equação de Van der Pol, como a grande maioria das equações diferenciais não-lineares, não possui solução analítica exata. Temos, então, duas maneiras de abordar o problema: (i) obter soluções analíticas aproximadas, por meio de técnicas perturbativas, e que valem apenas para determinados valores do parâmetro característico  $\epsilon$ ; (ii) obter soluções numéricas por meio de técnicas computacionais, o que pode ser feito para qualquer valor de  $\epsilon$ . Vamos adotar, aqui, a segunda abordagem, pois estamos mais interessados em aspectos qualitativos das soluções.

Se o parâmetro  $\epsilon$  for igual a zero, a Eq. (1) reduz-se à equação de um oscilador harmônico linear de frequência unitária,  $\ddot{x} + x = 0$ , cuja solução é  $x(t) = A \cos(t + \phi)$ , onde  $A$  e  $\phi$  são constantes de integração, fixadas pelas condições iniciais do problema. Para  $\epsilon \neq 0$ , em geral, é conveniente escrever a equação de Van der Pol na forma de um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem, ou

$$\dot{x} = y, \quad (11)$$

$$\dot{y} = \epsilon(1 - x^2)y - x. \quad (12)$$

Na análise dinâmica de uma equação não-linear investigamos inicialmente a existência de soluções de equilíbrio, ou seja, estados que não se alteram com o passar do tempo, e portanto definidos pelas condições  $\dot{x}^* = 0$ ,  $\dot{y}^* = 0$ . Para o sistema de Eqs. (11)-(12) há uma única solução de equilíbrio,  $(x^* = 0, y^* = 0)$ , que corresponde à situação em que o capacitor encontra-se descarregado e não há corrente pelo circuito. Uma solução de equilíbrio, em nosso contexto, tem propriedades (locais) de estabilidade num sentido bastante próximo àquela usado em mecânica: um ponto de equilíbrio é estável se pequenas perturbações do mesmo produzem um movimento que tende novamente ao ponto de equilíbrio. Se o ponto for instável, pequenas perturbações levam o sistema para longe do equilíbrio.

A estabilidade do equilíbrio é determinada por métodos bem-conhecidos da teoria linear [15, 16]. Consideramos pequenas perturbações do estado de equilíbrio, dadas por

$$\delta x = x - x^*, \quad \delta y = y - y^*, \quad (13)$$

onde o adjetivo “pequenas” significa matematicamente que  $|\delta x| \ll x^*$  e  $|\delta y| \ll y^*$ . Nessas condições, expandimos o sistema (11)-(12) em série de Taylor retendo apenas os termos lineares em  $\delta x$  e  $\delta y$  (já que, supostamente, os termos de ordem superior são desprezíveis). Em geral, a estabilidade é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana, que é a matriz das derivadas calculadas no ponto de equilíbrio. Caso estes autovalores sejam diferentes de zero, podemos dizer que o

equilíbrio é estável (na aproximação linear) se os autovalores são negativos, e instável caso sejam positivos. Se os autovalores forem nulos, a aproximação linear não é suficiente para se decidir sobre a estabilidade do equilíbrio e métodos mais complicados devem ser empregados [12, 15, 16].

Seguindo essa prescrição, construímos a matriz Jacobiana do sistema e calculamos seus elementos no ponto de equilíbrio (0, 0)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \right|_{(0,0)} & \left. \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right|_{(0,0)} \\ \left. \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \right|_{(0,0)} & \left. \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \right|_{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad (14)$$

cujos autovalores são  $(\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4})/2$ , podendo ser reais ou complexos (conjugados) se  $0 \leq \epsilon \leq 2$  ou  $\epsilon > 2$ , respectivamente. O equilíbrio será (assintoticamente) estável se a parte real dos autovalores for negativa, e instável caso seja positiva. Podemos verificar facilmente que, seja qual for o valor de  $\epsilon$ , o equilíbrio na origem será sempre instável. A diferença é que, caso  $0 < \epsilon < 2$  as soluções divergirão em espiral da origem (*foco instável*), ao passo que, se  $\epsilon > 2$ , a divergência ocorre exponencialmente (*nó instável*).

### 5. Ciclos-limite e oscilações de relaxação

O fato de existir uma única solução de equilíbrio, e ainda por cima instável, poderia ser desanimador, caso não existisse outra solução possível para o sistema. De fato, aplicando um teorema de Liénard ao sistema de Eqs. (11)-(12) é possível mostrar que existe uma solução estável na forma de uma órbita fechada e atrativa (no plano de fase  $x - y$ ) chamada *ciclo limite* [16]. Um ciclo limite é uma solução periódica do sistema, que repete-se após um dado período  $T$ , que pode ser um número real qualquer:  $(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t))$ . Assim como as soluções de equilíbrio, os ciclos limites podem ser estáveis ou instáveis caso atraiam ou repilam, respectivamente, trajetórias iniciadas em sua vizinhança. A teoria dessas soluções é complicada e não será aprofundada nesse trabalho (o leitor interessado pode consultar, por exemplo, [12, 16] para maiores detalhes).

Na Fig. 4, obtida por integração numérica das Eqs. (11)-(12), no caso  $\epsilon = 1$ , mostramos que esse ciclo limite consiste numa órbita fechada que envolve a origem, na forma de uma oval assimétrica. As trajetórias que partem de condições iniciais fora do ciclo limite convergem a ele com o passar do tempo, em ambos os lados do ciclo. Podemos ver, ainda, que trajetórias que iniciam-se próximas à origem realmente divergem desse ponto (que sabemos ser instável) e são atraídas pelo ciclo-limite. A forma do ciclo limite é complicada devido à não-linearidade do sistema e, em geral, só pode ser conhecida por integração numérica das respectivas equações. Se  $\epsilon \ll 1$  é possível, no entanto, usar um

procedimento perturbativo, mostrar que o ciclo limite é, aproximadamente, um círculo de raio  $r = 2$  no plano de fase [3]. Nesse caso, no entanto, o comportamento do sistema assemelha-se ao de oscilações harmônicas.

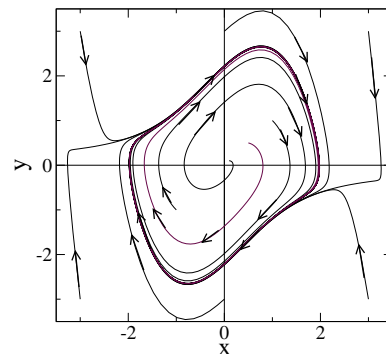


Figura 4 - Soluções no plano de fase da equação de Van der Pol no caso  $\epsilon = 1$  obtidas por integração numérica. Destaca-se a existência de um ciclo-limite atrativo (as flechas indicam o sentido do movimento).

Fisicamente, o ciclo-limite da equação de Van der Pol representa uma oscilação de relaxação estacionária para a tensão nas placas do capacitor, essencialmente similar àquela observada no circuito com lâmpada de neônio da seção 3. A existência dessa solução pode ser compreendida usando argumentos físicos. Se  $x$  for pequeno, podemos desprezar o termo em  $x^2$  na equação de Van der Pol, que pode ser escrita aproximadamente como  $\ddot{x} - \epsilon \dot{x} + x = 0$ , que é semelhante à equação de um oscilador harmônico linear amortecido, mas onde o termo de amortecimento tem sinal negativo: isso implica que, ao invés de extrair energia do sistema via atrito ou outros mecanismos dissipativos, o sistema está *ganhando* energia (resistência negativa). Isso explica por que o equilíbrio é instável: qualquer pequena carga nas placas do capacitor é amplificada pela resistência negativa.

No entanto, esse mecanismo não age indefinidamente. Na medida em que  $x$  aumenta devido à instabilidade, o termo em  $x^2$  deixará de ser desprezível. No caso onde  $x$  é muito grande, será o termo linear a ser desprezível frente ao termo  $x^2$ , e a equação de Van der Pol pode ser escrita, nesse caso, como  $\ddot{x} + \epsilon x^2 \dot{x} + x = 0$ , que pode ser interpretada como um oscilador amortecido, pois o coeficiente (não-constante) do termo de amortecimento ( $\epsilon x^2$ ) é positivo, e as oscilações tendem a diminuir suas amplitudes. O ciclo-limite representa o balanço dessas duas tendências conflitantes: um amortecimento negativo para  $x$  pequeno e um amortecimento positivo para  $x$  grande.

Um aspecto interessante da equação de Van der Pol é que ela tem soluções que podem exibir tanto oscilações pendulares como de relaxação, dependendo do parâmetro  $\epsilon$ . Na Fig. 5 mostramos as séries temporais para  $x(t)$  e  $y(t)$  obtidas pela solução numérica da Eq. (1) para os valores  $\epsilon = 0, 1$  e  $\epsilon = 10$ . Quando  $\epsilon$  é baixo, vimos há pouco que a equação de Van der

Pol aproxima-se de um oscilador harmônico simples, donde as oscilações são do tipo pendular, com as características já apontadas anteriormente.

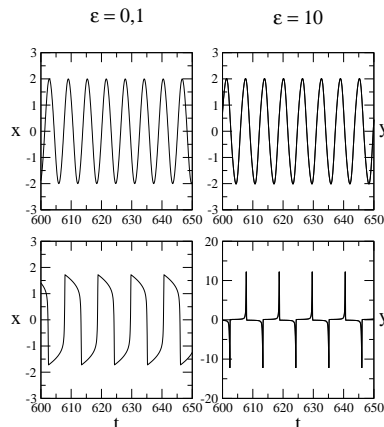


Figura 5 - Séries temporais de  $x$  e  $y$  para a equação de Van der Pol nos casos  $\epsilon = 0, 1$  (oscilações pendulares) e  $\epsilon = 10$  (oscilações de relaxação).

Para um valor alto de  $\epsilon$ , no entanto, observamos oscilações de relaxação graças à existência de duas escalas de tempo, tanto no comportamento de  $x$  como de  $y$ . Para  $x(t)$ , por exemplo, há uma fase de crescimento ou decrescimento "lentos", o que pode ser visto também no fato que as respectivas derivadas têm módulo bastante baixo. No entanto, periodicamente  $x$  sofre aumentos e diminuições abruptas (escala "rápida"), o que gera picos acentuados da sua derivada  $y$ . O ciclo-limite mostrado na Fig. (4) foi obtido para um valor intermediário de  $\epsilon = 1$ , para o qual as oscilações apresentam um comportamento de transição.

## 6. Perturbações periódicas na equação de Van der Pol

Na década de 1920, Van der Pol investigou o efeito de perturbações externas periódicas no circuito com tubo de vácuo, produzidas - como no circuito com lâmpada de neônio - por uma fonte de força eletromotriz alternada com frequência  $\Omega = 2\pi/T_0$ , o que pode ser descrito matematicamente pela equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = F \sin(2\pi t/T_0). \quad (15)$$

Quando  $\epsilon$  é grande o suficiente para que as soluções dessa equação exibam um comportamento de oscilações de relaxação, podemos aplicar o raciocínio desenvolvido na seção 5 para explicar o efeito de perturbações externas periódicas. Vimos que, se o período das oscilações  $T$  é próximo, mas não igual, ao período  $T_0$  da perturbação (ou algum múltiplo inteiro de  $T_0$ ), o período  $T$  ajusta-se exatamente a  $nT_0$  ( $n$  inteiro) após algum tempo.

Van der Pol e Van der Mark, em 1927, descobriram esse efeito experimentalmente num circuito semelhante ao mostrado na seção 3, com um resistor, um

capacitor e uma lâmpada de neônio, bem como uma fonte de tensão alternada com frequência variável [9]. Para monitorar a resposta do sistema, eles escutavam (literalmente) a tensão usando receptores telefônicos, observando que o período das oscilações ajustava-se ao período da tensão externa ou a múltiplos dele, para certos valores do parâmetro de controle. Como a frequência é o inverso do período, o ajuste da frequência das oscilações dava-se portanto a sub-múltiplos da frequência externa: Van der Pol chamou esse efeito de "desmultiplicação de frequências".

Além do ajuste dos períodos nas oscilações de relaxação do circuito, eles fizeram uma descoberta notável. Antes que o período das oscilações saltasse para os valores múltiplos do período da perturbação, eles escutaram ruídos irregulares, que interpretaram como sendo um fenômeno extrínseco (o ruído aleatório é bastante comum em circuitos eletrônicos, sobretudo aqueles que usam tubos de vácuo) [17]. No entanto, hoje em dia nós interpretamos essa observação como talvez a primeira comprovação experimental do que chamamos de *caos determinístico*: o sistema apresenta comportamento aperiódico com sensibilidade às condições iniciais (duas condições iniciais muito próximas levam a comportamentos que divergem exponencialmente com o passar do tempo) [15, 16].

## 7. Van der Pol e os batimentos cardíacos

O ritmo cardíaco normal é gerado por um agregado de células especializadas situadas no átrio direito, denominado nódulo sino-atrial (SA), que é considerado um marcapasso natural do coração, responsável pela emissão de impulsos nervosos periódicos que provocam os batimentos cardíacos. Além do nódulo sino-atrial, há um segundo marcapasso natural no coração denominado nódulo átrio-ventricular (AV). O nódulo SA gera impulsos elétricos periódicos que se propagam através do músculo cardíaco atrial, do nódulo SV, e tecidos condutores (como o feixe de His) até os ventrículos, gerando a contração e dilatação do músculo cardíaco (miocárdio) [18].

A idéia de tratar o coração usando um sistema de osciladores acoplados vem de um trabalho muito original de Van der Pol e Van der Mark de 1928, onde eles simularam os batimentos cardíacos por meio de três osciladores de relaxação [21]. Van der Pol e Van der Mark fizeram a suposição de que os átrios direito e esquerdo, assim como os ventrículos direito e esquerdo, contraem e expandem simultaneamente, de forma que seja possível referir-se a eles, coletivamente, como "átrio" e "ventrículo". Os três circuitos osciladores representavam, respectivamente, o nódulo SA, o átrio e o ventrículo; cada qual executando uma oscilação de relaxação com período bem definido.

O oscilador representado pelo nódulo SA influencia o oscilador do átrio, de forma que o acoplamento é unilateral: o primeiro influencia o segundo, *mas não vice-versa* (esse tipo de acoplamento também é chamado mestre-escravo). Da mesma forma, a propagação do impulso nervoso pelo feixe de His foi representada por um acoplamento unilateral do oscilador do átrio sobre o do ventrículo. Van der Pol e Van der Mark simularam experimentalmente esse sistema acoplado usando, para descrever cada oscilador, um circuito com lâmpadas de neônio do tipo que analisamos na Seção III: uma fonte de força eletromotriz contínua com  $\mathcal{E}$  variando entre 150 V a 200 V, um resistor, um capacitor e um tubo de vácuo contendo neônio.

A lâmpada acendia e apagava com um período aproximadamente igual ao dos batimentos cardíacos, da ordem da constante de tempo do circuito RC:  $\Delta T \approx \tau_R = CR$ . Usando um capacitor de  $1,0 \mu\text{F}$  e um resistor de  $1 \text{ M}\Omega$ , temos um período da ordem de 1 s, que equivale a uma frequência cardíaca de 60 batimentos por minuto. Três desses circuitos foram acoplados unidirecionalmente, sendo que o acoplamento entre o átrio e o ventrículo incluía uma resistência elétrica com o papel de simular o retardo do sinal elétrico enquanto propaga-se pelo feixe de His. Essa resistência foi usada como parâmetro de controle, ou seja, a intensidade do acoplamento era variável.

Além dessa engenhosa montagem foi incluído um dispositivo para adicionar sinais elétricos externos aos três osciladores, de forma a imitar um fenômeno conhecido como *extrasístole*. A extrasístole é um tipo de arritmia cardíaca que consiste na existência de batimentos cardíacos causados por impulsos elétricos gerados em outra região do coração (no átrio ou ventrículo) que não o sino-atrial, causando alterações no ritmo cardíaco que podem ser visualizadas no eletrocardiograma [18]. Este último foi simulado no sistema de circuitos acoplados de Van der Pol e Van der Mark por meio de um amplificador e um oscilógrafo analógico com frequência de amostragem de apenas 2-3 kHz, mas mesmo assim capaz de evidenciar as características gerais do ritmo cardíaco num eletrocardiograma, como a onda P, o complexo QRS, e a onda T. A onda P traduz a ativação elétrica dos átrios, o complexo QRS traduz a despolarização dos ventrículos, e a onda T traduz a repolarização dos ventrículos, um esquema sendo mostrado na Fig. 6.

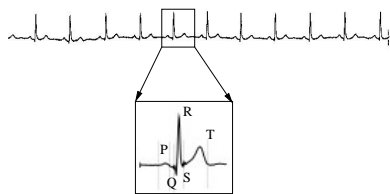


Figura 6 - Representação esquemática de um eletrocardiograma. No detalhe representamos a posição das ondas P e T, bem como do complexo QRS. Adaptado de [24].

Um dos resultados mais notáveis obtidos a partir desse modelo elétrico do coração foi a existência de bloqueios sino-auriculares: o nódulo SA pára temporariamente de emitir impulsos elétricos e depois retorna à atividade normal. O trabalho de Van der Pol e Van der Mark foi o ponto de partida de uma linha de investigação que continua até hoje, o estudo dos ritmos cardíacos (tanto normais como patológicos) por meio de sistemas de osciladores de relaxação acoplados [22, 23, 25].

É interessante tentar entender por que o ritmo cardíaco é governado por oscilações de relaxação ao invés de oscilações pendulares. Lembremos que nas oscilações de relaxação a amplitude é relativamente fixa (ou melhor, de difícil variação), ao passo que o período é facilmente alterado; ao passo que nas oscilações pendulares é o contrário. No caso do coração, a amplitude das oscilações é uma característica essencial da função cardíaca, a qual é bombear mecanicamente o sangue para todos os pontos do nosso corpo. Como o suprimento de sangue tem de ser sempre o mesmo para garantir o funcionamento normal do organismo, a amplitude das oscilações cardíacas não pode variar de modo apreciavelmente grande, do contrário poderiam ocorrer consequências fisiológicas graves.

No entanto, nossa experiência pessoal sugere que o período dos batimentos cardíacos pode e deve variar de forma relativamente rápida na medida da necessidade do nosso corpo de um suprimento maior ou menor de sangue. Por exemplo, durante um esforço físico o corpo humano necessita de uma quantidade maior de sangue, o que pode ser obtido aumentando o número de pulsações do coração por minuto, ou seja, diminuindo o período das oscilações cardíacas. E isso tem de ser feito de forma rápida para atender a necessidades urgentes, como o aumento na frequência cardíaca quando sofremos um repentino susto, ou um esforço físico maior, como quando subimos rapidamente uma escada. Então as oscilações de relaxação representam a maneira pela qual o coração pode variar facilmente o volume de sangue bombeado para o organismo sem alterar significativamente a amplitude das oscilações propriamente ditas. Esse mesmo raciocínio vale para outros ritmos biológicos, como por exemplo os ritmos neuronais, respiratórios, hormonais, etc. os quais também são usualmente descritos por osciladores de relaxação [19].

## 8. Conclusões

Oscilações de relaxação ocorrem em vários sistemas físicos e biológicos importantes, e caracterizam-se por terem uma amplitude fixa, ou difícil de ser alterada; ao passo que seu período é mais flexível e pode ser facilmente alterado. Nas oscilações de relaxação há sempre duas escalas de tempo que, adicionadas, compõem o período da oscilação: uma escala “lenta” e uma escala “rápida”. Oscilações de relaxação e pendulares são,

na verdade, casos-limite de oscilações auto-sustentadas, cujo paradigma é a chamada equação de Van der Pol. Variando um parâmetro de não-linearidade é possível obter oscilações de um e de outro tipo. Com frequência, em aplicações biológicas, as oscilações de relaxação são mais comuns do que as pendulares, como sugerido pelo comportamento do ritmo cardíaco, como sugerido pelo próprio Van der Pol, há mais de oitenta anos atrás. Com efeito, as oscilações de relaxação têm sido bastante empregadas no modelamento de ritmos biológicos.

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com auxílio financeiro do CNPq. O autor agradece ao Professor Abraham Chian-Long Chian (INPE) por ter me estimulado a estudar a equação de Van der Pol, assim como apreciar a sua utilidade na descrição dos ritmos cardíacos. Agradeço, também, ao Professor Moacir Godoy (Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto) pelas proveitosas discussões sobre a dinâmica dos ritmos cardíacos.

## Referências

- [1] R.L. Viana, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 3304 (2011).
- [2] G.F. Herrenden-Harker, Am. J. Phys. **8**, 1 (1940).
- [3] P. Hagedorn, *Oscilações Não-Lineares* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1984).
- [4] K. Popp and P. Stelter, Phil. Trans. **332**, 89 (1990).
- [5] N. de Claris, *In memoriam of Prof. Dr. Balthazar van der Pol*, IRE Transactions on Circuit Theory, December 1960, p. 360-361
- [6] B. van der Pol, *Selected Scientific Papers*, 2 volumes, Editores: H. Bremmer e C. J. Bouwkamp (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960).
- [7] B. van der Pol, Phil. Magazine, Ser. 7, **2**, 978 (1926)
- [8] B. van der Pol, Phil. Magazine Ser. 7, **3**, 65 (1927).
- [9] B. van der Pol and J. van der Mark, Nature **120**, 363 (1927).
- [10] M.L. Cartwright and J.E. Littlewood, J. London Math. Soc. **20**, 180 (1945). M.L. Cartwright, *Forced Oscillations in Nonlinear Systems, Contrib. to Theory of Nonlinear Oscillations*, Princeton University Press (Study 20) p. 149-241, 1950.
- [11] N. Levinson, Ann. Math. **50**, 127 (1949).
- [12] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983).
- [13] J.E. Flaherty and F.C. Hoppensteadt, Studies in Appl. Math. **58**, 5 (1978).
- [14] M. Levi, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **32**, No. 244 (1981).
- [15] N. Fiedler-Ferrara e C.P.C. Prado, *Caos: uma Introdução* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1994).
- [16] L.H.A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Ed. da Física, São Paulo, 2007), 2<sup>a</sup> ed.
- [17] Sons típicos que podem ser gerados em experiências deste tipo podem ser encontrados no sítio [http://www.scholarpedia.org/article/Van\\_der\\_Pol\\_oscillator](http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol_oscillator)
- [18] L. Glass, *Theory of Heart* (Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1990)
- [19] L. Glass, *Dos Relógios ao Caos: os Ritmos da Vida* (Ed. UNESP, São Paulo, 1997).
- [20] A.C.-L. Chian, Int. J. Theor. Appl. Finance **3**, 601 (2000).
- [21] B. van der Pol and J. van der Mark, *The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart*, Phil. Magazine Ser. 7 **6**, 763 (1928).
- [22] C.R. Katholi, F. Urthaler, J. Macy Jr., and T.N. James, Comp. Biom. Res. **10**, 529 (1977).
- [23] J. Honerkamp, J. Math. Biol. **18**, 69 (1983).
- [24] <http://www.ecglibrary.com/ecghome.html>
- [25] A.M. dos Santos, S.R. Lopes, and R.L. Viana, Physica A **338**, 335 (2004).