Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 44, e20220064 (2022)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0064

Artigos Gerais

Mecânica Clássica Conformável: uma revisão pedagógica

Conformable Classical Mechanics: a pedagogical review

Ronni Amorim[1,2], Vinicius Rispoli*[2], Leandro Xavier Cardoso[2], Alexandre Russi Junior[1]

[1]Universidade de Brasília, Instituto de Física, Brasília, DF, Brasil.
[2]Universidade de Brasília, Faculdade Gama, Brasília, DF, Brasil.

Recebido em 20 de fevereiro de 2022. Revisado em 29 de abril de 2022. Aceito em 20 de junho de 2022.

Neste trabalho descrevemos um formalismo para descrever a Mecânica Clássica fracionária segundo o cálculo fracionário conformável. Assim, uma breve revisão sobre cálculo diferencial e integral conformável foi feita. Na sequência, as versões conformáveis dos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano são apresentadas. Como exemplo, o oscilador harmônico conformável e a equação de onda conformável são discutidos. Em todas as situações consideradas, os resultados usuais são obtidos se a ordem da derivada (α) for igual a 1. Um resultado interessante é que se considerarmos $1 - \alpha \ll 1$, o oscilador harmônico conformável torna-se análogo aos oscilador usual com massa variável e termo de dissipação.
Palavras-chaves: Cálculo Fracionário Conformável, Derivada Fracionária Conformável, Mecânica Clássica Fracionária.

In this work we present a formalism to describe the fractional Newtonian mechanics based in conformable fractional calculus. In this sense, a brief revision about integral and differential conformable calculus is implemented. In sequence, the conformable version to Lagrangian and Hamiltonian formalism are presented. As examples, the conformable harmonic oscillator and conformable wave equation are discussed. In all situations, usual results are obtained when we consider $\alpha = 1$. An interesting result is that in the case $1 - \alpha \ll 1$ the conformable harmonic oscillator behaves like usual harmonic oscillator with time dependent and dissipation term.
Keywords: Fractional Calculus, Conformable Fractional Derivative, Fractional Classical Mechanics.

1. Introdução

Podemos considerar que a mecânica clássica, também denominada por muitos autores como mecânica newtoniana, corresponde à descrição do estado mecânico de um sistema físico com o uso de constructos teórico-filosóficos que não abordam movimentos a velocidades relativísticas, bem como em espaços-tempo curvos [1]. Desde a sua sistematização que se deu fundamentalmente nos volumes do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), obras escritas por Isaac Newton no século XVII, a mecânica newtoniana vem passando por sucessivos aprimoramentos em decorrência da evolução dos conceitos matemáticos, a partir dos quais diversas interpretações físicas tornaram-se possíveis [1]. De um ponto de vista histórico, podemos inferir que na elaboração dos fundamentos da mecânica clássica, Newton se inspirou nas ideias de Descartes, o qual estabeleceu um método universal inspirado no rigor matemático e nas suas cadeias de razão. Descartes propôs o método dedutivo como uma forma de obter ideias claras e distintas [2]. Nesse caminho, além da experimentação, Newton utilizou a geometria euclidiana e o que havia desenvolvido sobre cálculo diferencial e integral até então para chegar às suas conclusões. Naturalmente, o conhecimento matemático evoluiu com o passar do tempo, o que tornou possível a elaboração de outras formulações para a mecânica clássica [1]. Dentre os principais desenvolvimentos matemáticos, destacam-se os estudos sobre equações diferenciais, cálculo variacional e álgebras de Lie. No entanto, de todas a formulação da mecânica clássica, a mais concisa tem a forma de um princípio variacional. Conforme ideias típicas do século XVIII, das quais Maupertuis foi um dos pioneiros, dentre todas as alternativas à sua disposição a natureza segue o curso mais econômico de acordo com algum critério de comparação entre as diversas possibilidades. O princípio diferencial de d'Alembert, do qual se deduzem as equações de Lagrange, exprime a lei fundamental do movimento em termos da configuração instantânea do sistema e de desvios infinitesimais da referida configuração. Assim, é possível reformular a lei da dinâmica fundamental como um princípio integral, que leva em conta o movimento completo do sistema durante um intervalo de tempo finito. Nesse bojo, dentre as novas representações, os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano ocuparam mais holofotes. O arcabouço Lagrangiano foi introduzido em 1788 pelo matemático francês Joseph-Louis Lagrange na sua obra intitulada "Méchanique Analytique" [1]. Por meio do formalismo

*Endereço de correspondência: vrispoli@unb.br

Lagrangiano é possível a obtenção dos mesmos resultados obtidos por meio da abordagem de Newton; porém, dentre suas vantagens destaca-se a possibilidade de se analisar mais claramente as dos sistemas físicos, bem como permite a generalização das ideias da mecânica clássica a outros aspectos, tais como a teoria de campos. Já o formalismo Hamiltoniano, proposto pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805–1865) [1], estendeu as concepções do formalismo Lagrangiano, trabalhando com uma coordenada extra denominada momentum canonicamente conjugado, a qual se obtém a partir da Lagrangiana. Nesse arcabouço, o formalismo proposto por Hamilton apresenta algumas vantagens, quais sejam: a possibilidade de se trabalhar com equações diferenciais de primeira ordem, apesar da duplicação na quantidade de equações; a introdução das transformações canônicas; a concepção do espaço de fase e da variedade simplética. Além das vantagens já mencionadas, com os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano torna-se mais simples a análise de sistemas físicos particulares, os quais quando estudados no contexto Newtoniano são demasiadamente complicados. O ponto principal neste texto é que o conhecimento matemático mais aprofundado permite a obtenção de novas vertentes teóricas, e isso ocorre sobretudo na física.

O cálculo conformável, considerado por alguns autores como uma vertente do cálculo de ordem fracionária, é um exemplo de abordagem matemática diferente do cálculo diferencial e integral usual que pode trazer consequências às teorias físicas. O conceito de derivada conformável foi recentemente apresentado por Khalil et al. [3]. Coube a Abdeljawad [4] aprofundar os estudos desse novo tipo de derivada, e desenvolver alguns conceitos e deduzir algumas propriedades, fundando assim o cálculo diferencial e integral conformável. A definição e as propriedades da derivada conformável satisfaz as propiedades da derivada usual quando se toma o limite da ordem da derivada tendendo à unidade. É importante que o leitor não confunda a palavra conformável, atribuída a essa definição de derivada fracionária, ao nome conforme, que é usualmente utilizado em teorias físicas (como por exemplo na teoria de campos conforme) e que tem relação com um tipo de transformação no bojo da variável complexa. Não se conhece a motivação de Khalil ao denominar tal modalidade de derivada fracionária como conformável, mas sabe-se que ele pretendia obter um tipo de derivada fracionária que apresentasse propriedades mais próximas com a derivada usual.

Para alguns autores, a derivada conformável não é considerada uma legítiva derivada fracionária, pois não satisfaz algumas propriedades que definem as derivadas fracionárias previamente definidas, como Riemann-Liouville e Caputo [5–7]. A derivada conformável é local e, portanto, não apresenta efeitos de memória. Além disso, a derivada conformável satisfaz algumas regras que as derivadas fracionárias tradicionais não satisfazem, como veremos em diante. Contudo, o seu estudo no bojo das teorias físicas trazem consequências interessantes, às quais muitas vezes respondem bem alguns fenômenos da natureza, tais como a possibilidade de se analisar sistemas dissipativos ou sistemas de massa variável sem a necessidade de se introduzir novos termos na Lagrangiana do sistema livre [4, 8].

Esse é o objetivo deste trabalho, apresentar o cálculo conformável e aplicá-lo na construção da mecânica Newtoniana conformável. Sendo assim, a apresentação deste trabalho se baseará nos seguintes tópicos: na seção 2 apresentamos o cálculo diferencial e integral conformável; na seção 3 o formalismo Lagrangiano conformável é discutido; o formalismo Hamiltoniano conformável é abordado na seção 4; na seção 5 trazemos a versão conformável do oscilador harmônico como exemplo; na seção 6 a equação de onda conformável é apresentada; por fim, a seção 7 traz as considerações finais e perspectivas.

2. O cálculo diferencial e integral conformável

Nesta seção desenvolveremos a ferramenta matemática que nos guiará na formulação de uma versão fracionária da mecânica Newtoniana. De forma mais específica, abordaremos o cálculo conformável, donde apresentaremos as principais definições e propriedades acerca dessa modalidade da derivada de ordem fracionária. As demonstrações serão discutidas de forma detalhada, com a perspectiva de preparar o leitor para as seções posteriores. O conteúdo apesentado nesta seção tomou como base as referências [5, 6]

2.1. A derivada conformável

Definição 1: Considere uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, a derivada conformável de ordem α de f é definida por

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h}, \tag{1}$$

para todo $t > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. O sobrescrito t na notação $D_t^\alpha f(t)$ representa a variável em relação à qual estamos derivando. Se a derivada conformável de ordem α exisitir, dizemos que a função f é α-diferenciável.

Note que se f é uma função derivável no sentido usual, então podemos usar a regra de L'Hôpital na Equação (5) e com isso obtemos o seguinte resultado

$$D_t^\alpha f(t) = f'(t) t^{1-\alpha}. \tag{2}$$

O leitor deve se lembrar que a interpretação geométrica da derivada usual tem relação com a inclinação da reta tangente à função num dado ponto, e a interpretação física é ligada a velocidade da partícula. Além disso, na derivada usual, enquanto a variável independente muda h, o valor da função varia de acordo com tam mudança.Assim, o limite dado reflete a intensidade e direção da velocidade. Enquanto isso, no caso da derivada conformável, quando a variável independente sofre uma variação h, a função varia de acordo com $t^{1-\alpha}$. A consequência disso é que a interpretação física da derivada conformável pode ser vista como uma velocidade especial, na qual sua intensidade e direção dependem de $t^{1-\alpha}$. As consequências disso serão apresentadas ao longo do trabalho.

Ademais, a derivada conformável satisfaz as seguintes propriedades:

Sejam $\alpha \in (0,1)$, f e g funções α-diferenciáveis para $t > 0$, então:

- **Propriedade 1:** f é contínua para todo $t > 0$.
- **Propriedade 2:** A derivada conformável é linear, i.e.,
$$D_t^\alpha(af(t) + bg(t)) = aD_t^\alpha(f(t)) + bD_t^\alpha(g(t)).$$
- **Propriedade 3:**
$$D_t^\alpha(k) = 0,$$
em que k é uma constante real.
- **Propriedade 4:** A derivada conformável satisfaz a regra do produto, i.e.,
$$D_t^\alpha(f(t)g(t)) = D_t^\alpha(f(t))g(t) + f(t)D^\alpha(g(t)).$$
- **Propriedade 5:** A derivada conformável satisfaz a regra da cadeia, i.e.,
$$D_t^\alpha(f(g(t))) = [D_{g(t)}^\alpha(f(g(t)))][D_t^\alpha(g(t))](g(t))^{\alpha-1},$$
supondo que a derivada conforme $D_{g(t)}^\alpha(f(g(t)))$ exista.

Todas as propriedades dadas seguem da definição e são imediatadas de serem mostradas. Na sequência, como forma de exemplificar os cálculos, iremos mostrar as Propriedades 4 e 5 enunciadas acima. Antes disso, notemos que essas propridades são idênticas aquelas satisfeitas pela derivada ordinária, incluindo a quarta, também conhecida como regra de Leibniz. Em geral, as derivadas de ordem fracionária, como Riemann-Liouville e Caputo, não satisfazem as propriedades 4 e 5; por isso a derivada conformável recebe destaque.

Primeiramente, para mostrarmos a regra do produto, vamos usar as propriedades usuais do limite e a definição da derivada conformável, assim

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha\left(f(t)g(t)\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+ht^{1-\alpha})g(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\begin{array}{c} f(t+ht^{1-\alpha})g(t+ht^{1-\alpha}) \\ -f(t)g(t+ht^{1-\alpha}) \\ +f(t)g(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)g(t)\end{array}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\begin{array}{c} f(t+ht^{1-\alpha})g(t+ht^{1-\alpha}) \\ -f(t)g(t+ht^{1-\alpha})\end{array}}{h}\\
&\quad + \lim_{h\to 0}\frac{f(t)g(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} g(t+ht^{1-\alpha})\\
&\quad \times \lim_{h\to 0}\frac{f(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h}\\
&\quad + f(t)\lim_{h\to 0}\frac{g(t+ht^{1-\alpha}) - g(t)}{h}\\
&= g(t)D_t^\alpha f(t) + f(t)D_t^\alpha g(t).
\end{aligned}$$

Além disso, a partir das mesmas propriedades do limite é possível mostrar a regra do quociente, portanto

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(t+ht^{1-\alpha})}{g(t+ht^{1-\alpha})} - \frac{1}{h}\frac{f(t)}{g(t)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\begin{array}{c} f(t+ht^{1-\alpha})g(t) - f(t)g(t) \\ -f(t)g(t+ht^{1-\alpha}) + f(t)g(t)\end{array}}{g(t+ht^{1-\alpha})g(t)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\begin{array}{c} g(t)[f(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)] \\ -f(t)[g(t+ht^{1-\alpha}) - g(t)]\end{array}}{g(t+ht^{1-\alpha})g(t)}\\
&= \frac{\begin{array}{c} g(t)\lim_{h\to 0}[\frac{f(t+ht^{1-\alpha})-f(t)}{h}] \\ -f(t)\lim_{h\to 0}[\frac{g(t+ht^{1-\alpha})-g(t)}{h}]\end{array}}{g(t)\lim_{h\to 0}[g(t+ht^{1-\alpha})]}\\
&= \frac{D_t^\alpha(f(t))g(t) - f(t)D_t^\alpha(g(t))}{g(t)^2}.
\end{aligned}$$

Agora, para a regra da cadeia, considere $h(t) = f(g(t))$ e pela definição temos

$$D_t^\alpha\left(f(g(t))\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(t+ht^{1-\alpha})) - f(g(t))}{h}. \tag{3}$$

Fazendo a mudança de variáveis $w = t + ht^{1-\alpha}$, temos que $h = (w-t)\,t^{\alpha-1}$ e portanto o limite dado pela Equação (3) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha\left(f(g(t))\right) &= \lim_{w\to t}\frac{f(g(w)) - f(g(t))}{(w-t)}t^{1-\alpha}\\
&= \lim_{w\to t}\frac{f(g(w)) - f(g(t))}{g(w) - g(t)}\\
&\quad \times \lim_{w\to t}\frac{g(w) - g(t)}{w-t}t^{1-\alpha}\\
&= \lim_{w\to t}\frac{f(g(w)) - f(g(t))}{g(w) - g(t)}\frac{g(t)^{\alpha-1}}{g(t)^{\alpha-1}}\\
&\quad \times \lim_{h\to 0}\frac{g(t+ht^{1-\alpha}) - g(t)}{h},
\end{aligned}$$

observando que foi usado o fato que as funções f e g são contínuas, por serem α-diferenciáveis. Chamando agora $\Delta u = (g(w) - g(t))\,g(t)^{\alpha-1}$, temos que

$g(w) = g(t) + \Delta u g(t)^{1-\alpha}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} D_t^\alpha\left(f(g(t))\right) &= \lim_{w\to t}\frac{f(g(w))-f(g(t))}{g(w)-g(t)}\frac{g(t)^{\alpha-1}}{g(t)^{\alpha-1}} \\ &\quad\times\lim_{h\to 0}\frac{g(t+ht^{1-\alpha})-g(t)}{h} \\ &= g(t)^{\alpha-1} \\ &\quad\times\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(g(t)+\Delta u g(t)^{1-\alpha})-f(g(t))}{\Delta u} \\ &\quad\times\lim_{h\to 0}\frac{g(t+ht^{1-\alpha})-g(t)}{h} \\ &= \left[D_{g(t)}^\alpha f(g(t))\right]\left[D_t^\alpha g(t)\right](g(t))^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Como consequência imediata da Equação (2), trazemos a derivada fracionária conforme de algumas funções deriváveis no sentido usual e que merecem destaque, quais sejam:

1. $$D_t^\alpha e^{kt} = kt^{1-\alpha}e^{kt},$$
2. $$D_t^\alpha \cos(kt) = -kt^{1-\alpha}\sin(kt),$$
3. $$D_t^\alpha \sin(kt) = kt^{1-\alpha}\cos(kt),$$
4. $$D_t^\alpha e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha} = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha},$$
5. $$D_t^\alpha \cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -\sin\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right),$$
6. $$D_t^\alpha \sin\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha t\right) = \cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right),$$

Mostraremos a α-derivada número 4, as demais deixamos como exercício para o leitor.

$$\begin{aligned} D_t^\alpha e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha} &= t^{1-\alpha}(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha})' \\ &= t^{1-\alpha}e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\frac{1}{\alpha}\alpha t^{\alpha-1} \\ &= e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}. \end{aligned}$$

Em decorrência deste resultado, denominaremos a função $f(t) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ como função exponencial fracionária.

Teorema 1: Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ diferenciáveis em t, e seja $z = f(x, y)$ diferenciável em $(x(t), y(t))$. Então, $z = f(x(t), y(t))$ é diferenciável em t e

$$D_t^\alpha z(t) = \frac{\partial f}{\partial x}D_t^\alpha x(t) + \frac{\partial f}{\partial y}D_t^\alpha y(t). \tag{4}$$

A Equação (4) pode ser desenvolvida a partir da ideia que a função $z(t) = f(x(t), y(t))$ é diferenciável no sentido usual e com isso vale a propriedade da Equação (2)

$$\begin{aligned} D_t^\alpha z(t) &= t^{1-\alpha}\frac{dz}{dt} \\ &= t^{1-\alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}t^{1-\alpha}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}t^{1-\alpha}\frac{\partial y}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}D_t^\alpha x(t)+\frac{\partial f}{\partial y}D_t^\alpha y(t), \end{aligned}$$

que é o resultado esperado.

Finalmente, podemos estender a Definição 1 para números reais $\alpha > 1$ através da próxima definição.

Definição 2: Seja $\alpha \in (n, n+1)$, com $n \in \mathbb{N}$. Uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que é n-vezes diferenciável em $t > 0$ tem derivada conformável de ordem α se o seguinte limite existe

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t+ht^{\lceil\alpha\rceil-\alpha})-f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t)}{h}, \tag{5}$$

em que $\lceil\alpha\rceil$ é a função menor inteiro.

2.2. A integral conformável

Definição 3: Para f contínua, a Integral Conformável é definida por

$$I_a^\alpha f(t) = \int_a^t (\xi-a)^{\alpha-1}f(\xi)d\xi, \tag{6}$$

para $\alpha \in (0, 1)$. A Equação (6) também pode ser reescrita como

$$I_a^\alpha f(t) = \int_a^t f(\xi)d_a^\alpha\xi. \tag{7}$$

Além disso, para o caso de $a = 0$, segue que

$$I^\alpha f(t) = \int_0^t \xi^{\alpha-1}f(\xi)d\xi = \int_0^t f(\xi)d^\alpha\xi. \tag{8}$$

Nesse percurso, se f é diferenciável e $a = 0$, a seguinte propriedade é satisfeita

$$I^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - f(0), \tag{9}$$

pois

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha}\left(D_t^{\alpha} f(t)\right) &= \int_0^t \xi^{\alpha-1} D_{\xi}^{\alpha} f(\xi) d\xi \\
&= \int_0^t \xi^{\alpha-1} \xi^{1-\alpha} f'(\xi) d\xi \\
&= \int_0^t f'(\xi) d\xi \\
&= f(t) - f(0).
\end{aligned}
$$

Como um exemplo da integral conformável consideremos a integração da função $f(t) = nt^{n-\alpha}$, com $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha}(nt^{n-\alpha}) &= \int_0^t \xi^{\alpha-1} n \xi^{n-\alpha} d\xi \\
&= n \int_0^t \xi^{n-1} d\xi \\
&= n \frac{\xi^n}{n}\bigg|_0^t = t^n.
\end{aligned}
$$

Este resultado era esperado, pois já sabíamos que $nt^{n-\alpha}$ é a derivada conformável de t^n.

No bojo da integração conformável ainda é possível se calcular a integração por partes. Esse procedimento é realizado de acordo com a equação dada a seguir

$$
\int_a^b [f(t) D_t^{\alpha} g(t)] d^{\alpha} t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b [g(t) D_t^{\alpha} f(t)] d^{\alpha} t, \tag{10}
$$

supondo que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sejam funções deriváveis. Essa relação é imediata, uma vez que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b [f(t) D_t^{\alpha} g(t)] d^{\alpha} t &= \int_a^b f(t)\left(t^{1-\alpha} g'(t)\right)\left(t^{\alpha-1}\right) dt \\
&= \int_a^b f(t) g'(t) dt \\
&= f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b g(t) f'(t) dt \\
&= f(t)g(t)|_a^b \\
&\quad - \int_a^b g(t)\left(t^{1-\alpha} f'(t)\right)\left(t^{\alpha-1}\right) dt \\
&= f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b [g(t) D_t^{\alpha} f(t)] d^{\alpha} t.
\end{aligned}
$$

A integração por partes será bastante útil na continuidade deste trabalho.

2.3. A série de Taylor conformável

Consideremos uma função função $f(t)$ que seja infinitamente α-diferenciável no ponto t_0, i.e., a aplicação repetida da derivada conformável em f no ponto t_0 sempre existe. Nesse sentido, desejamos escrever uma série de potências para $f(t)$ em torno de t_0 dada por

$$
\begin{aligned}
f(t) &= c_0 + c_1(t-t_0)^{\alpha} + c_2(t-t_0)^{2\alpha} \\
&\quad + c_3(t-t_0)^{3\alpha} + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^{k\alpha}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Nossa tarefa agora é, supondo que a representação exista, encontrar os coeficientes c_k's dados na Equação (11). Isso pode ser facilmente feito da forma como segue.

Primeiramente, a partir da Equação (11) calculemos $f(t_0)$. Fazendo isso, facilmente concluímos que $c_0 = f(t_0)$. Em seguida, a fim de determinarmos c_1, calculemos a derivada conformável de ordem α da Equação (11), ou seja,

$$
D_t^{\alpha} f(t) = \alpha c_1 (t-t_0) + 2\alpha c_2 (t-t_0)^{\alpha} + 3\alpha c_3 (t-t_0)^{2\alpha} + \cdots
$$

Se calcularmos $D_t^{\alpha} f(t_0)$ obtemos que $c_1 = \frac{1}{\alpha} D_t^{\alpha} f(t_0)$.

Agora, com o objetivo de determinarmos c_2, calculemos a segunda derivada conformável sucessiva de ordem α da Equação (11), ou seja,

$$
(D_t^{\alpha})^2 f(t) = 2\alpha^2 c_2 + 3\cdot 2\alpha^2 c_3 (t-t_0)^{\alpha} + 4\cdot 3\alpha^2 c_4 (t-t_0)^{2\alpha} + \cdots
$$

Se calcularmos $(D_t^{\alpha})^2 f(t_0)$ obtemos que $c_3 = \frac{1}{2\cdot 1\cdot \alpha^2} (D_t^{\alpha})^2 f(t_0)$.

Na continuidade, para determinarmos o coeficiente c_3, calculemos a terceira derivada conformável sucessiva de ordem α da Equação (11), ou seja,

$$
(D_t^{\alpha})^3 f(t) = 3\cdot 2\alpha^3 + 4\cdot 3\cdot 2\alpha^3 c_4 (t-t_0)^{\alpha} + \cdots
$$

Se calcularmos $(D_t^{\alpha})^3 f(t_0)$ obtemos que $c_3 = \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \alpha^3} (D_t^{\alpha})^3 f(t_0)$. Se fizermos esse procedimento sucessivamente, obteremos após a k-ésima vez $c_n = \frac{1}{k!\cdot \alpha^k} (D_t^{\alpha})^k f(t_0)$.

Dessa forma, a Equação (11) pode ser escrita como

$$
f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D_t^{\alpha})^k f(t_0)}{k! \cdot \alpha^k} (t-t_0)^{k\alpha}, \tag{12}
$$

a qual representa a série de Taylor conformável da função $f(t)$ em torno de $t = t_0$. Se $t_0 = 0$, a série será denominada série de MacLaurin conformável.

A seguir apresentamos a série de Maclauren conformável de algumas funções. O leitor pode desenvolvê-las como exercício.

- $$
e^{\frac{1}{\alpha} t^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{k! \cdot \alpha^k}.
$$

- $$
\sin\left(\frac{1}{\alpha} t^{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{(2k+1)\alpha}}{(2k+1)! \cdot \alpha^{2k+1}}.
$$

- $$\cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{(2k)\alpha}}{(2k)!\cdot\alpha^{2k}}.$$

Usando os resultados anteriores e desenvolvendo a série de Maclaurin conformável da função $f(t) = e^{\frac{i}{\alpha}t^\alpha}$, é fácil identificar o resultado

$$e^{\frac{i}{\alpha}t^\alpha} = \cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) + i\sin\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right). \tag{13}$$

Na próxima seção utilizaremos as ferramentas apresentadas neste espaço para construir o formalismo Lagrangiano conformável.

3. Formalismo lagrangiano conformável

Nesta seção apresentaremos a versão conformável do formalismo Lagrangiano. O exposto nesta seção e nas próximas seguiu de perto as referências [9–12]. Para esse fim considere a ação S escrita a partir do seguinte funcional

$$S = I_a^\alpha L(x(t), D_t^\alpha x(t)), \tag{14}$$

em que $I_a^\alpha f(t) = \int_a^b (\xi - a)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$ e $L(x(t), D_t^\alpha x(t))$ é denominada Lagrangiana conformável. Assim, o nosso objetivo é encontrar as condições para que o funcional dado na Equação (14) tenha um mínimo local. Consideremos que $x(t)$ e $D_t^\alpha x(t)$ se transformem como

$$\begin{aligned} X(t,\epsilon^\alpha) &= x(t) + \epsilon^\alpha \eta(t) \\ D_t^\alpha X(t,\epsilon^\alpha) &= D_t^\alpha x(t) + \epsilon^\alpha D_t^\alpha \eta(t), \end{aligned} \tag{15}$$

em que a condição na fronteira é dada por $\eta(0) = \eta(t_0) = 0$ e ϵ é um parâmetro pequeno. Com tais transformações, passaremos a representar o funcional como

$$S[\epsilon^\alpha] = I^\alpha L(X(t,\epsilon^\alpha), D_t^\alpha X(t,\epsilon^\alpha)). \tag{16}$$

E a condição de extremo para a Equação (16) é obtida a partir da derivada fracionária em relação a ϵ^α, isto é,

$$(D_\varepsilon^\alpha S[\epsilon^\alpha])_{\epsilon^\alpha} = 0. \tag{17}$$

Calcularemos essa derivada com o uso da Propriedade 5 a qual estabelece a regra da cadeia da derivada conformável. Procedendo assim, temos

$$\begin{aligned} D_\epsilon^\alpha S[\epsilon^\alpha] &= I^\alpha[(D_X^\alpha L)(D_\epsilon^\alpha X)X^{\alpha-1} \\ &\quad + (D_{D_t^\alpha X}^\alpha L)D_\epsilon^\alpha(D_t^\alpha X)(D_t^\alpha X)^{\alpha-1}]. \end{aligned}$$

A Equação (15) nos dizem que $D_\epsilon^\alpha X = \eta$ e $D_\epsilon^\alpha(D_t^\alpha X) = D_t^\alpha \eta$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} D_\epsilon^\alpha S[\epsilon^\alpha] &= \alpha I^\alpha[(D_X^\alpha L)X^{\alpha-1}\eta \\ &\quad + (D_{D_t^\alpha X}^\alpha L)(D_t^\alpha X)^{\alpha-1} D_t^\alpha \eta]. \end{aligned}$$

Calculando por partes a integral da segunda parcela do integrando da expressão anterior e usando a condição de fronteira, obtemos

$$\begin{aligned} D_\epsilon^\alpha S[\epsilon^\alpha] &= I^\alpha[((D_X^\alpha L)X^{\alpha-1} \\ &\quad - D_t^\alpha(D_{D_t^\alpha X}^\alpha L)(D_t^\alpha X^{\alpha-1}))\eta(t)]. \end{aligned}$$

Finalmente, a condição de mínimo, Equação (17) nos fornece

$$(D_x^\alpha L)x^{\alpha-1} = D_t^\alpha(D_{D_t^\alpha x}^\alpha L(D_t^\alpha x)^{\alpha-1}). \tag{18}$$

Considerando a Equação (2), podemos escrever

$$\begin{aligned} (D_x^\alpha L)x^{\alpha-1} &= \partial_x L \\ D_{D_t^\alpha x}^\alpha L(D_t^\alpha x)^{\alpha-1} &= \partial_{D_t^\alpha x} L. \end{aligned} \tag{19}$$

Com isso, obtemos a versão fracionária conformável das Equações de Euler-Lagrange, isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = D_t^\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(D_t^\alpha x)}\right). \tag{20}$$

A Equação (20) será fundamental na formulação conformável da mecânica Newtoniana. Os cálculos aqui apresentados podem ser generalizados para um número qualquer de coordenadas, isso foi feito na referência [12].

3.1. As equações de movimento da mecânica Newtoniana conformável

Consideremos a Lagrangiana dada pela equação

$$L = \frac{m}{2}(D_t^\alpha x)^2 - V(x), \tag{21}$$

em que m representa a massa e $V(x)$ a energia potencial do sistema físico. Utilizando a Equação (20), usando a Lagrangiana dada na Equação (21) podemos calcular os seguintes valores

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial L}{\partial(D_t^\alpha x)} &= m D_t^\alpha x, \\ D_t^\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(D_t^\alpha x)}\right) &= m(D_t^\alpha x)^2. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos a versão conformável das equações de movimento da mecânica Newtoniana, isto é,

$$m(D_t^\alpha x)^2 = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{22}$$

Podemos definir a velovidade conformável da seguinte forma

$$v = D_t^\alpha x.$$

Nessa mesma perspectiva, a aceleração conformável fica dada por

$$a = (D_t^\alpha x)^2.$$

Assim, a versão conformável da segunda Lei de Newton pode ser escrita como

$$F = m(D_t^\alpha x)^2. \tag{23}$$

Um resultado interessante é obtido a partir da Equação (22) no caso em que $1-\alpha = \delta$ é suficiente pequeno. A seguir apresentaremos dois exemplos simples para ilustrar os resultados desta seção, num primeiro momento analisaremos a versão conformável do movimento de uma partícula com velocidade constante e na sequência, trataremos a abordagem conformável para o movimento de uma partícula com aceleração constante.

3.1.1. Movimento com velocidade constante

Consideremos uma partícula se movendo com velocidade cosntante de módulo v. Dessa forma, podemos escrever a equação de movimento como

$$D_t^\alpha x(t) = v. \tag{24}$$

Aplicando o operador integral conformável em ambos os lados da Equação (25), temos

$$I^\alpha D_t^\alpha x(t) = I^\alpha v. \tag{25}$$

Usando a Equação (8), obtemos

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \int_0^t \epsilon^{\alpha-1} v d\epsilon \\ &= v\frac{\epsilon^\alpha}{\alpha}|_0^t \\ &= v\frac{t^\alpha}{\alpha}. \end{aligned} \tag{26}$$

Considerando $\delta = 1-\alpha$ pequeno o suficiente, podemos expandir a expressão $\frac{t^\alpha}{\alpha} = t\frac{t^{-\delta}}{1-\delta}$ até os termos de primeira ordem em δ. Para esse fim, considere as seguintes expansões

$$\frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta + \delta^2 + \cdots \tag{27}$$

e, fazendo a série de MacLaurin de $f(\delta) = t^{-\delta}$ em torno de $\delta = 1$, podemos escrever

$$t^{-\delta} = 1 - \delta \ln t + \cdots \tag{28}$$

Dessa forma, com os resultados dados nas Eqs.(27)–(28), obtemos que

$$t\frac{t^{-\delta}}{1-\delta} = \frac{t^{1-\delta}}{1-\delta} \approx t + t\delta - t\delta \ln t. \tag{29}$$

E assim, chegamos à aproximação

$$x(t) = x(0) + vt[1 + \delta(1 - \ln t)]. \tag{30}$$

Denotando $\tau = t[1 + \delta(1 - \ln t)]$, podemos escrever

$$x(t) = x(0) + v\tau. \tag{31}$$

É interessante notar a partir do resultado dado na Equação (31) que a velocidade da partícula pode ser calculada a partir da derivada em relação à variável τ, isto é, $v = \frac{dx}{d\tau}$.

O comportamento da solução dada na Equação (30) para diferentes valores de α podem ser visto na Figura.

3.1.2. Movimento com aceleração constante

Nesta subseção avançaremos em relação ao aspecto analisado na precendente, pois trataremos agora de uma partícula que se move com aceleração constante. Para esse fim, consideremos a seguinte equação diferencial conformável

$$D_t^\alpha v = a, \tag{32}$$

em que a é a aceleração constante. Essa equação pode ser resolvida de forma análoga à Equação (25), fornecendo

$$v(t) = v(0) + a\frac{t^\alpha}{\alpha}. \tag{33}$$

Se usarmos

$$a = D_t^\alpha v,$$

podemos aplicar o operador integral conformável, Equação (8), em ambos os lados da Equação (33),

$$I^\alpha v(t) = I^\alpha \left[v(0) + a\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]. \tag{34}$$

Fazendo os cálculos obtemos

$$x(t) = x(0) + v(0)\frac{t^\alpha}{\alpha} + a\frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}. \tag{35}$$

A partir da Equação (35) podemos obter um resultado interessante se admitirmos novamente que $\delta = 1-\alpha$ é pequeno o suficiente. Assim, usaremos a expansão

$$\frac{t^{1-\delta}}{1-\delta} \approx t + t\delta - t\delta \ln t, \tag{36}$$

já demonstrada na subseção precedente. Necessitamos mostrar a expansão para o termo

$$\frac{t^{2(1-\delta)}}{(1-\delta)^2}.$$

É conhecido que

$$\frac{1}{(1-\delta)^2} = 1 + 2\delta + \cdots \tag{37}$$

e, se desenvolvermos a série de McLaurin para $f(\delta) = t^{2(1-\delta)}$ em torno de $\delta = 1$, obtemos

$$t^{2(1-\delta)} \approx 1 + 2\ln t - (2\ln t)\delta. \tag{38}$$

Assim, com os resultados dados nas Eqs.(37-38), chegamos à aproximação

$$\frac{t^{2(1-\delta)}}{(1-\delta)^2} = 1 + 2\ln t + 2\delta[1 + \ln t]. \tag{39}$$

Se substituirmos as Eqs.(36)-(39) na Equação (35), obtemos, finalmente, a aproximação para a função posição

$$x(t) = x(0) + v(0)\tau + a\frac{\tau^2}{2}, \tag{40}$$

em que $\tau = t[1 + \delta(1 - \ln t)]$. Note que dessa forma, a aceleração pode ser obtida a partir da segunda derivada da Equação (40) em relação a τ, isto é, $a = \frac{d^2x}{d\tau^2}$.

4. Formalismo Hamiltoniano conformável

Nesta seção abordaremos prenúncios do formalismo Hamiltoniano conformável. O nosso ponto de partida serão as equações de Euler-Lagrange conformável, Equação (20), a partir da qual podemos definir o momentum canonicamente conjungado, isto é,

$$p = \frac{\partial L}{\partial(D_t^\alpha x)}. \tag{41}$$

Neste caso, o Hamiltoniano conformável, denotado por H, pode ser definido a partir de

$$H(x,p) = -L + pD_t^\alpha x. \tag{42}$$

Substituindo Equação (42) na Equação (14) e exigindo que $\delta L = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= I^\alpha \delta(pD_t^\alpha x - H) \\ 0 &= I^\alpha[\delta p D_t^\alpha x + p\delta(D_t^\alpha x) - \delta H] \\ 0 &= I^\alpha\left[\delta p D_t^\alpha x + p\delta(D_t^\alpha x) - \frac{\partial H}{\partial x}\delta x - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Uma vez que $\delta(D_t^\alpha x) = D_t^\alpha(\delta(x))$, podemos escrever

$$I^\alpha\left[(\delta p D_t^\alpha x + pd_t^\alpha(\delta x) - \frac{\partial H}{\partial x}\delta x - \frac{\partial H}{\partial D_t^\alpha x}D_t^\alpha(\delta(x))\right] = 0. \tag{44}$$

Calculando a integral por partes da segunda parcela da integral conformável dada na Equação (55), e usando a condição de fronteira, isto é, $x(a) = x(b) = 0$, obtemos o seguinte resultado

$$I^\alpha\left[\left(D_t^\alpha x - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p + \left(-D_t^\alpha p - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta x\right] = 0. \tag{45}$$

Com isso, obtemos as equações de Hamilton conformáveis, as quais são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= D_t^\alpha x \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -D_t^\alpha p. \end{aligned} \tag{46}$$

podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= t^{1-\alpha}\frac{dx}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -t^{1-\alpha}\frac{dp}{dt}. \end{aligned} \tag{47}$$

É relevante notar que as equações de Hamilton usuais são obtidas se tomarmos $\alpha = 1$ na Equação (47).

Note que as Eqs.(47) podem ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= t^{\alpha-1}\frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -t^{\alpha-1}\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \tag{48}$$

Em termos do parêntese de Poisson, definido por $\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial x}$, a Equação (48) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= t^{\alpha-1}\{x,H\} \\ \frac{dp}{dt} &= -t^{\alpha-1}\{p,H\}. \end{aligned} \tag{49}$$

Em geral, se tivermos uma variável dinâmica $u = u(x,p)$ que não depende explicitamente do tempo, podemos escrever

$$\frac{du}{dt} = t^{\alpha-1}\{u,H\},$$

a partir dessa expressão percebemos que u representa uma constante de movimento se $\{u,H\} = 0$. O que foi discutido nesta seção pode ser generalizado para um número qualquer de coordenadas do espaço de fase (x_i, p_i), o que pode ser visto na referência [12].

5. Oscilador harmônico conformável

Nesta seção abordaremos a versão conformável de um dos sistemas mais importantes da física: o oscilador harmônico. Iniciemos a nossa análise definindo a Lagrangiana do oscilador harmônico a partir de

$$L = \frac{1}{2}m(D_t^\alpha x)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{50}$$

em que $x = x(t)$. Se usarmos a Equação (20), podemos escrever a partir da Lagrangiana dada na Equação (50)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x, \tag{51}$$

$$\frac{\partial L}{\partial(D_t^\alpha x)} = mD_t^\alpha x, \tag{52}$$

$$D_t^\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(D_t^\alpha x)}\right) = m(D_t^\alpha x)^2. \tag{53}$$

Assim, a equação de movimento que descreve o oscilador harmônico conformável fica dada por

$$m(D_t^\alpha x)^2 + m\omega^2 x = 0. \tag{54}$$

Nosso objetivo neste momento é resolver a Equação (57)

$$I^\alpha\left[\delta(p)D_t^\alpha x + p\delta(D_t^\alpha x) - \frac{\partial H}{\partial x}\delta(x) - \frac{\partial H}{\partial D_t^\alpha x}D_t^\alpha(\delta(x))\right] = 0. \tag{55}$$

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0064

com as condições iniciais dadas por $x(0) = X$ e $D_t^\alpha(0) = 0$. Para esse fim, consideraremos que a solução seja dada por

$$x(t) = e^{r\frac{1}{\alpha}t^\alpha}, \tag{56}$$

em que r é uma constante. Agora, derivaremos a Equação (56) e substituíremos na Equação (57). Sabemos que

$$(D_t^\alpha x)^2(e^{r\frac{1}{\alpha}t^\alpha}) = r^2 e^{r\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha}.$$

Com isso, a Equação (57) fica dada por

$$r^2 + \omega^2 = 0, \tag{57}$$

que é a equação característica associada a Equação (57). Condiderando ω uma constante positiva, temos duas raízes para r, quais sejam: $r_1 = i\omega$ e $r_2 = -i\omega$. A solução do problema ficada dada por

$$x(t) = C_1 e^{i\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha} + C_2 e^{-i\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha}, \tag{58}$$

em que C_1 e C_2 são constantes. Podemos escrever as exponencias conformáveis em termos das funções das funções trigonométricas conformáveis e definir $A = C_1 + C_2$ e $B = i(C_1 - C_2)$. Dessa forma, a solução fica dada por

$$x(t) = A\cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) + B\sin\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right). \tag{59}$$

As condições iniciais nos levam a concluir que $B = 0$ e $A = X$, assim

$$x(t) = X\cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right). \tag{60}$$

Essa solução é bem similar a usual, com a ressalva de que a variável t no argumento da função cosseno está elevado ao expoente de grau igual a ordem da conformalidade.

É interessante a análise da Equação (57) quando $\delta = 1 - \alpha \ll 1$. Note antes disso que a Equação (57) pode ser escrita na seguinte forma

$$(1-\alpha)t^{1-2\alpha}\frac{dx}{dt} + t^{2-2\alpha}\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{61}$$

Ou, em termos de δ,

$$\delta t^{2\delta-1}\frac{dx}{dt} + t^{2\delta}\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{62}$$

Expandindo $t^{2\delta-1}$ numa série de Taylor em torno de $\delta = 1$ até primeira ordem em δ, obtemos a aproximação

$$t^{2\delta-1} \approx 1 + 2\ln t\left(\delta - \frac{1}{2}\right). \tag{63}$$

Por outro lado, a expansão de $t^{2\delta}$ numa série de Maclaurin nos fornece

$$t^{2\delta} \approx 1 + 2\ln t\delta. \tag{64}$$

Se substituirmos as aproximações nas Equação (63) e Equação (64) na Equação (62), chegamos a

$$m(1 + 2\delta\ln t)\frac{d^2x}{dt^2} + m\delta(1 - \ln t)\frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = 0. \tag{65}$$

Se definirmos $m(t) = m(1+2\delta\ln t)$ e $\gamma(t) = m\delta(1-\ln t)$, a Equação (66) fica escrita da seguinte forma

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(t)\frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = 0, \tag{66}$$

a qual corresponde a equação de um oscilador com massa e coeficiente de amortecimento dependentes do tempo e com termo de dissipação. A presença do termo de dissipação, isto é, o termo de derivada primeira, mesmo no problema do oscilador harmônico simples é um resultado compartilhado pela oscilador harmônico fracionário segundo Caputo, por exemplo. Ou seja, o resultado para o oscilador harmônico conformável para o caso em que $1 - \alpha$ pode ser considerado suficientemente pequeno é comparável ao caso do oscilador harmônico fracionário.

6. Equação de onda conformável

Nesta seção trataremos de outra aplicação física muito relevante: o caso conformável da equação da onda. Nessa situação, a equação de onda conformável em (1+1)-dimensão pode ser escrita como [13]

$$(D_x^\alpha)^2\psi(x,t) - \frac{1}{v^{2\alpha}}(D_t^\alpha)^2\psi(x,t) = 0, \tag{67}$$

em que $v = \frac{\omega}{k}$. Vamos mostrar que uma solução possível para esta equação é dada por

$$\psi(x,t) = A\sin\left(\frac{k^\alpha}{\alpha}x^\alpha - \frac{\omega^\alpha}{\alpha}t^\alpha\right), \tag{68}$$

em que A é a amplitude da onda e $\frac{k^\alpha}{\alpha}x^\alpha - \frac{\omega^\alpha}{\alpha}t^\alpha$ é a fase da onda.

Para mostrar que a função dada na Equação (68) é de fato a solução da Equação (67), calculemos a partir da Equação (68) as derivadas

$$D_x^\alpha\psi(x,t) = k^\alpha A\sin\left(\frac{k^\alpha}{\alpha}x^\alpha - \frac{\omega^\alpha}{\alpha}t^\alpha\right). \tag{69}$$

Aplicando novamente o operador D_x^α na Equação (69), temos

$$(D_x^\alpha)^2\psi(x,t) = -k^{2\alpha}A\sin\left(\frac{k^\alpha}{\alpha}x^\alpha - \frac{\omega^\alpha}{\alpha}t^\alpha\right). \tag{70}$$

De forma análoga encontramos

$$(D_t^\alpha)^2\psi(x,t) = -\omega^{2\alpha}A\sin\left(\frac{k^\alpha}{\alpha}x^\alpha - \frac{\omega^\alpha}{\alpha}t^\alpha\right). \tag{71}$$

Substituindo a Equação (70) e a Equação (71) na Equação (67), obtemos a identidade, mostrando assim que a Equação (68) é solução da equação da onda.

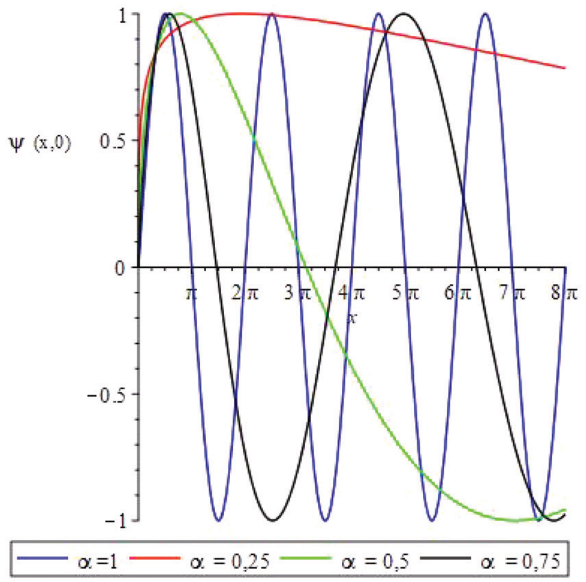

Figura 1: Solução da equação de onda Equação (68), em $t = 0$, para diferentes valores de α ($\alpha = 0,25; 0,5; 0,75; 1$).

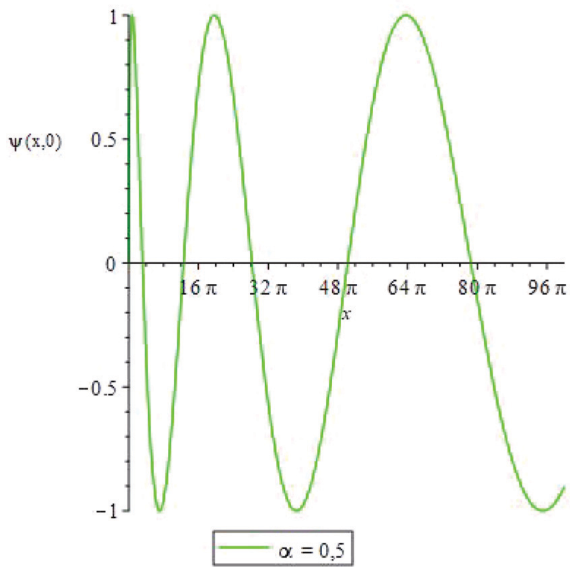

Figura 2: Solução da equação de onda Equação (68), em $t = 0$, para $\alpha = 0,5$.

Ainda no bojo da equação de onda conformável, podemos definir o α-comprimento de onda λ_α e o α-período T_α por meio das equações

$$\lambda_\alpha = \frac{2\pi\alpha}{k^\alpha},$$

e

$$T_\alpha = \frac{2\pi\alpha}{\omega^\alpha},$$

respectivamente.

Uma análise interessante pode ser feita se observarmos a Figura 1, na qual foram esboçados gráficos para a solução dada na Equação (68), em $t = 0$, para diferentes valores de α. Notamos assim que para $\alpha = 1$, temos o comportamento usual da função de onda. Enquanto o valor de α diminui o gráfico oscila com menor frequência. À medida que o valor α diminui, perdemos a noção de comprimento de onda, pois a distância entre duas cristas consecutivas, por exemplo, não permanece a mesma ao longo da evolução do gráfico. Isso pode ser visualizado na Figura 2, na qual temos o gráfico da solução dada na Equação (68), em $t = 0$, para $\alpha = 0,5$. Note que a distância entre as duas primeiras cristas consecutivas é aproximadamente 16π, enquanto a distância entre a segunda e a terceira crista é aproximadamente 48π.

7. Considerações finais e perspectivas

Neste trabalho foi apresentada uma revisão sucinta sobre a mecânica clássica conformável. Este é um tópico recente, tendo sido introduzido por Khalil *et al.* em 2014 [3]. Nesse caminho, o cálculo diferencial e integral conformável foi apresentado com cuidado, e as principais propriedades foram deduzidas de forma detalhada. Na sequência, os formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano foram cuidadosamente apresentados, sempre trazendo exemplos. Nessa última parte, discutimos as principais modificações nas equações de Hamilton, e demonstramos que a formulação usual é obtida quando tomamos α igual a 1. O oscilador harmônico conformável é resolvido, no qual é observado que quando $1 - \alpha$ é pequeno, obtém-se um oscilador com massa dependente do tempo e termo dissipativo. Por fim, a equação de onda conformável é apresentada. Pretendemos extrapolar as ideias aqui apresentadas para outras áreas da física, tais como o eletromagnetismo e a mecânica quântica. O nosso objetivo nestas análises que virão é averiguar se a dissipação ou os sistemas de massas variáveis aparecerão naturalmente a partir da introdução da derivada conformável, além de investigar se outras consequências físicas podem emergir.

Referências

[1] R. Dugas e J.R. Maddox, *A Hystory of Mechanics* (Dover, New York, 1988).

[2] A. Koyré, *Estudos de História do Pensameno Científico* (Forense Universitária, Rio de Janeiro, 2011).

[3] R. Khalil, M.A. Horami, A. Yuosef e M. Sababheh, J. Comput. Appl. Math. **264**, 65 (2014).

[4] T.J. Abdeljawad, Comp. Appl. Math. **279**, 57 (2015).

[5] M.D. Ortigueira e J.A.T. Machado, J. Comput. Phys. **293**, 4 (2015)

[6] A.A. Abdelhakim, Fract. Calc. Appl. Anal. **22**, 242 (2019).

[7] A.A. Abdelhakim e J.A.T. Machado, Nonlinear Dyn **95**, 3063 (2019).

[8] D. Zhao e M. Luo, Calcolo **53**, 903 (2017).

[9] W.S. Chung, J. Comput. Appl. Math. **290**, 150 (2015).

[10] M. Eslami e H. Rezazedeh, Calcolo **53**, 475 (2016).
[11] A. Hammad e R. Khalil, Am. J. Comput. and Applied Math. **4**, 187 (2014).
[12] M.J. Lazo e D.F.M. Torres, IEEE/CAA J. Autom. Sin. **4**, 340 (2007).
[13] W.S. Chung, S. Zare, H. Hassanabadi e E. Maghsoodi, Math. Meth. Appl. Sci. **43**, 6950 (2020).