

Precessão da órbita da estrela S2 em torno do buraco negro Sagitário A*

S2 star orbit precession around the black hole Sagittarius A*

Marco A. Garms¹, Gabriel C. Grime^{*1}, Iberê L. Caldas¹

¹Universidade de São Paulo, Instituto de Física, 05508-090, São Paulo, SP, Brasil.

Recebido em 05 de julho de 2023. Revisado em 15 de agosto de 2023. Aceito em 15 de agosto de 2023.

Como aplicação didática da Relatividade Geral, implementamos, a partir da métrica de Schwarzschild, uma simulação da órbita da estrela S2 em torno do buraco negro massivo Sagitário A*. Verificamos que a órbita simulada é quase uma elipse, com uma precessão lenta igual à observada recentemente. Nessa simulação utilizamos os aplicativos Geogebra e Excel.

Palavras-chave: Relatividade Geral, Precessão de Schwarzschild, Buraco Negro Massivo, *Geogebra*.

As a didactic application of General Relativity and based on the Schwarzschild metric, a simulation of the orbit of the star S2 around the massive black hole Sagittarius A* is implemented. We verified that the simulated orbit is almost an ellipse, with a slow precession equal to the one recently observed. This simulation is performed using *Geogebra* and *Excel* applications.

Keywords: General Relativity, Schwarzschild Precession, Massive Black hole, *Geogebra*.

1. Introdução

Einstein em 1915 publicou a Teoria da Relatividade Geral (RG) e, como uma aplicação, calculou a precessão da órbita do planeta Mercúrio, ou seja, o avanço do seu periélio em torno do Sol. A precessão calculada, igual à observada, resolveu um problema importante na astronomia e resultou no primeiro sucesso da nova teoria [1].

Neste artigo, consideramos a precessão de uma órbita, por sua motivação histórica e por considerá-la didaticamente adequada para uma introdução da análise dinâmica (por simulação) na RG. Entretanto, o avanço do periélio de Mercúrio [1] é um ângulo pequeno e difícil de ser medido, sendo a sua simulação inconveniente para ser reproduzida do ponto de vista didático. Como alternativa, optamos pela simulação da precessão da órbita da estrela S2 em torno do buraco negro massivo Sgr A*, muito maior que a da órbita de Mercúrio. Além disto, a excentricidade da órbita considerada é bem maior do que a de Mercúrio, facilitando a determinação do seu eixo maior. Salientamos também que esta escolha tem um caráter atual servindo para testes recentes na comprovação da RG em campos gravitacionais mais intensos e em altas velocidades [2, 3].

Na Seção 2 apresentamos o sistema buraco-negro/estrela considerado neste artigo. Introduzimos, na Seção 3, a métrica de Schwarzschild que utilizamos, na Seção 4, para obter a energia total desse sistema.

A partir dessa energia, obtemos na Seção 5 as equações de movimento. Na Seção 6 apresentamos a simulação da precessão e a comparamos com a precessão observada. Na Seção 7 apresentamos os comentários finais e no Apêndice o algoritmo e detalhes do programa desenvolvido empregando os aplicativos *Geogebra* (muito utilizado com finalidades didáticas) [4, 5] e *Excel*.

2. Sistema

O sistema $M\backslash m$ a ser considerado consiste num par de massas isoladas M (buraco-negro Sgr A*) e m (estrela S2) de dimensões desprezíveis, com a massa m movendo-se em torno da massa M de posição fixa na origem do sistema de coordenadas (Figura 1) e separadas por uma distância r limitada. Dada a massa de Sgr A* $M \sim 10^6 M_{\odot}$ [6], e a massa da estrela S2 $m \sim 10 M_{\odot}$ [7], temos que a razão $m/M \sim 10^{-5}$. Logo, podemos considerar, com boa aproximação, $m \ll M$.

O raio de Schwarzschild para a massa M é dado por

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1)$$

onde c a velocidade da luz no vácuo e G a constante gravitacional. Tal raio define o horizonte de evento do buraco negro, ou seja, a fronteira na qual, além dela, nenhum evento pode afetar um observador externo [8]. Não obstante, assumimos as seguintes condições: $v \ll c$ e $r \gg r_s$, sendo v a velocidade da massa m .

Na Mecânica Clássica Newtoniana (MCN) considera-se que exista uma força gravitacional de M atraindo a

*Endereço de correspondência: gabrielgrime@gmail.com

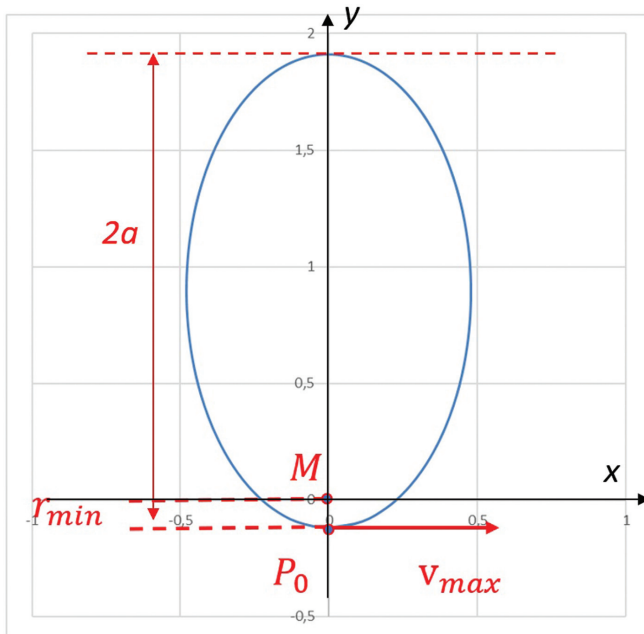


Figura 1: Órbita de m ao redor de M . No ponto P_0 são tomadas as condições iniciais com a distância mínima r_{\min} e a velocidade máxima v_{\max} . O comprimento $2a$ corresponde ao eixo maior da elipse.

massa m . Por este motivo esta configuração é denominada como sistema de força central gravitacional (FCG) e a métrica do espaço Euclidiano é a de Minkowski que não inclui o tempo. Nesse caso, a órbita é uma elipse fechada.

Inserindo-se uma massa M na origem de um espaço inicialmente vazio, a métrica do espaço ao redor dessa massa é alterada para a métrica de Schwarzschild [9] a qual determina a dinâmica do movimento da massa m . A órbita relativística é, aproximadamente, uma elipse com precessão.

3. Métrica de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild é dada por [9]:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{tt}c^2 dt^2 - g_{rr} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2)$$

com os coeficientes métricos g_{tt} e g_{rr} dados por

$$g_{tt} = 1 - \frac{r_s}{r} = g_{rr}^{-1}, \quad (3)$$

sendo

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

ou

$$d\Omega^2 = d\varphi^2$$

para $\theta = \pi/2$ no plano equatorial. As variáveis r , θ e φ são coordenadas esféricas.

Dividindo a equação (2) por $c^2 dt^2$, usando a equação (3) e com a notação $\dot{x} = dx/dt$, obtém-se:

$$\gamma_s = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{r_s}{r - r_s} \frac{v_{\text{rad}}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (4)$$

onde $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}$ e $v_{\text{rad}} = \dot{r}$ são, para a massa m , respectivamente, a velocidade e a velocidade radial.

Assumimos uma velocidade v muito menor que a velocidade da luz e que $r \gg r_s$. Então, da equação (4) pode-se afirmar que $\gamma_s \approx 1$ e, portanto, $dt = \gamma_s d\tau \approx d\tau$. Pelas condições estabelecidas para o sistema $M \setminus m$, na Seção 2, estas aproximações permanecerão válidas ao longo de todo o artigo.

4. Energia Total

Nesta seção utilizamos a métrica de Schwarzschild para obter a energia total do sistema $M \setminus m$ [10]. Multiplicando-se a métrica de Schwarzschild, equação (2), restrita ao plano equatorial, por $(-mg_{rr}^{-1})/(2d\tau^2)$, e usando as equações (1) e (3), além de reordenar os termos obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{mc^2}{2} \left[g_{tt}^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \right] \\ & = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Da equação anterior pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \left[g_{tt}^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 \right] \frac{mc^2}{2} + \frac{GMm}{r} \\ & = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{mr^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 - mr \frac{GM}{c^2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2. \quad (6) \end{aligned}$$

Identificando-se, na equação (6),

$$\tilde{E} = \left[g_{tt}^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 \right] \frac{mc^2}{2}, \quad (7)$$

como a energia total do sistema $M \setminus m$, ver [1] páginas 79 a 81, usando a igualdade

$$mr \frac{GM}{c^2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = \frac{GM}{mc^2 r^3} \left(mr^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2$$

e sendo

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$$

o momento angular da massa m de teste com relação à posição da massa M , resulta para a energia total pela

RG a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{mr^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \\ &\quad - \left(\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{mc^2 r^3} L^2 \right) \\ &= T + \tilde{V}. \end{aligned} \tag{8}$$

Por outro lado, pela Mecânica Clássica Newtoniana (MCN), ver [11] página 148, temos:

$$\begin{aligned} E &= \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{mr^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - \left(\frac{GMm}{r} \right) \\ &= T + V. \end{aligned} \tag{9}$$

As equações (8) e (9) diferem pelo termo proporcional a $1/r^3$, que é uma nova contribuição da RG que não aparece na MCN. Esse novo termo, nos limites de $M \rightarrow 0$ e/ou de $r \rightarrow \infty$, implica numa pequena correção pela RG, na dinâmica relacionada a uma força central gravitacional. Esperam-se, nesse caso, valores próximos aos calculados na MCN (ver [11] páginas 147 a 161), isto é, sem a parcela proporcional a $1/r^3$.

5. Equações de Movimento

A diferença das órbitas previstas pela MCN e pela RG é, principalmente, a precessão de Schwarzschild, pois a órbita clássica da massa m , nas condições assumidas, é fechada (elíptica) [11].

A seguir, obteremos as equações do movimento por meio da Lagrangiana a ser deduzida da energia total pela RG dada pela equação (8).

Escolhemos utilizar coordenadas cartesianas x, y . Assim, partindo-se da equação (8), empregando a notação de ponto para d/dt , usando a aproximação $dt \approx d\tau$, já discutida, e a equação $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \frac{m}{2} \left[\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 \right] - \left[\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r^3} \left(\frac{L}{mc} \right)^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \left[\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r^3} \left(\frac{L}{mc} \right)^2 \right] \\ &= T + \tilde{V}. \end{aligned}$$

Deduz-se deste resultado a Lagrangiana $\tilde{L} = T - \tilde{V}$ correspondente:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \left[\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r^3} \left(\frac{L}{mc} \right)^2 \right]. \tag{10}$$

Usando esta última equação aplica-se a equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i}$$

para obter as equações de movimento:

$$\ddot{x} = a_x = -GM \frac{x}{r^3} - GM \left(\frac{L}{mc} \right)^2 \frac{3x}{r^5} \tag{11}$$

$$\ddot{y} = a_y = -GM \frac{y}{r^3} - GM \left(\frac{L}{mc} \right)^2 \frac{3y}{r^5}. \tag{12}$$

Os termos proporcionais a $1/r^5$ nas equações (11) e (12) correspondem à contribuição da RG não revelada pela MCN e dão origem à precessão de Schwarzschild. Sem eles a simulação gera resultados da MCN (e.g. leis de Kepler). Como tais termos são muito pequenos (comparados com os proporcionais a $1/r^3$), então os resultados por revolução obtidos pela MCN são pouco alterados pela RG.

6. Simulação

A seguir obtemos as órbitas da estrela S2 integrando as equações (11) e (12), com o algoritmo descrito no Apêndice e com a condição inicial indicada, na Figura 1, pelo ponto P_0 e velocidade v_{\max} . Para simular a órbita são necessários os valores de GM e $(L/(mc))^2$, obtidos a partir de dados da órbita desta estrela em torno do buraco negro Sgr A*, conforme a Tabela 1.

6.1. Parâmetros e condição inicial

A simulação aqui é realizada normalizando-se a órbita de uma revolução para a forma de uma elipse com semieixo maior $a = 1 \text{ u}_d$ e período $T = 2\pi \text{ u}_t$, sendo u_d e u_t , respectivamente, as unidades de distância e de tempo.

Tabela 1: Valores utilizados na simulação, sendo M a massa do buraco negro Sgr A* e m a massa da estrela S2 [2, 3].

Grandeza	Descrição	Valor
r_{\min}	distância mínima da órbita até M	117.5 ua
r_{\max}	distância máxima da órbita até M	1919.5 ua
v_{\max}	velocidade máxima de m	$0.025 c = 7.5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$
a	semieixo maior da elipse orbital	1 u_d
T	período orbital	$2\pi \text{ u}_t = 16.05 \text{ anos}$
ϵ	excentricidade da elipse orbital	0.88
G	constante da gravitação	$6.67384 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
c	velocidade da luz	$2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
ua	unidade astronômica	$1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
M_{\odot}	massa solar	$1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

A partir da Tabela 1 pode-se obter os valores destas unidades (normalizadas). Para o período orbital

$$T = 16.05 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 5.062 \cdot 10^8 \text{ s}, \quad (13)$$

introduzimos a unidade de tempo

$$1 \text{ u}_t = \frac{T}{2\pi} = 8.05567 \cdot 10^7 \text{ s}. \quad (14)$$

Para o eixo maior a definimos a unidade de distância

$$1 \text{ u}_d = a = \frac{117.5 + 1919.5}{2} \cdot 1.496 \cdot 10^{11} \\ = 1.52368 \cdot 10^{14} \text{ m} \quad (15)$$

Os valores da velocidade máxima v_{\max} da estrela S2 (para $r = r_{\min}$) e da velocidade da luz c em unidades normalizadas são obtidas a seguir, a partir das equações (14) e (15) e de dados da Tabela 1:

$$v_{\max} = 7.5 \cdot 10^6 \frac{\text{u}_d}{1.52368 \cdot 10^{14}} \frac{8.05567 \cdot 10^7}{\text{u}_t} \\ = 3.96 \frac{\text{u}_d}{\text{u}_t} \quad (16)$$

bem como

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{u}_d}{1.52368 \cdot 10^{14}} \frac{8.05567 \cdot 10^7}{\text{u}_t} \\ = 158.5 \frac{\text{u}_d}{\text{u}_t} \quad (17)$$

Deste modo e pela Figura 1, o ponto inicial é dado em coordenadas cartesianas por $P_0 = (0, -r_{\min})$, sendo, veja na Tabela 1.

$$r_{\min} = a(1 - \epsilon) = 0.12 \text{ u}_d \quad (18)$$

e, veja na equação (16), a velocidade inicial dada por

$$\mathbf{v}_0 = (3.96, 0) \frac{\text{u}_d}{\text{u}_t}$$

correspondendo às condições iniciais usadas no cálculo da órbita pelo algoritmo descrito no Apêndice.

Da equação (18) e da Tabela 1 pode-se obter, ainda, o valor da constante L/m em unidades normalizadas, veja também a Figura 1:

$$\frac{L}{m} = h = v_{\max} a(1 - \epsilon) = 0.475 \frac{\text{u}_d^2}{\text{u}_t} \quad (19)$$

Usando-se as equações (17) e (19) resulta, finalmente, a equação para o primeiro parâmetro procurado (em unidades normalizadas):

$$\left(\frac{L}{mc}\right)^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 = \left(\frac{0.475}{158.5}\right)^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ u}_d^2 \quad (20)$$

Note que

$$\frac{h}{c} = \frac{r_{\perp} v}{c},$$

sendo v a velocidade da massa m , e como $\gamma_S \rightarrow 1 \Rightarrow v/c \rightarrow 0$, então $h/c \rightarrow 0$. Logo a equação (20) ter um valor muito pequeno está relacionado com os limites estabelecidos para o sistema $M \setminus m$ do caso de estudo (Seção 2).

Para definir o segundo parâmetro GM se utilizam as equações (14) e (15) ou dados da Tabela 1. Considera-se, ainda, a equação

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \quad (21)$$

deduzida para o sistema $M \setminus m$ pela Mecânica Clássica Newtoniana [11], e que corresponde a terceira lei de Kepler. Como nos limites impostos por este sistema (Seção 2) a correção pela RG é muito pequena, veja (20), (11) e (12), pode-se então assumir a seguinte aproximação para o caso de estudo:

$$GM \approx \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{\text{u}_d^3}{\text{u}_t^2}. \quad (22)$$

6.2. Precessão de Schwarzschild

Os parâmetros e a condição inicial da subseção 6.1 são usados para se obter os 11 pontos da Tabela 2, escolhidos da órbita de S2, entre os obtidos pelo aplicativo *Geogebra* e indicados na Tabela 4, presente no Apêndice. Os cinco primeiros A, B, C, D, E correspondem à primeira revolução e os cinco últimos G, H, I, J, K à centésima primeira revolução da estrela S2. O ponto X adicional será empregado no final da subseção 6.3.

Apresentamos na Figura 2 a primeira e a centésima primeira revoluções. Pontos de cada uma delas foram transferidos para o *Geogebra* o que permite desenhá-las para assim medir a precessão $\Delta\varphi$, indicada na Figura 2 e correspondente a 100 revoluções, para comparar este resultado com o valor divulgado na referência [2].

Com este procedimento construíram-se as duas elipses apresentadas na Figura 2, aproximadamente iguais, conforme indicado nas distâncias dessa figura.

Como planejado, verificamos, por essas elipses, que o valor do ângulo entre os seus eixos maiores é de $\Delta\varphi \approx 19.9^\circ$. Logo o valor estimado para a precessão

Tabela 2: Pontos transferidos ao *Geogebra* e representados na Figura 2 (valores em unidades normalizadas).

Ponto	t	x	y
A	0.45	0.455973	0.61148
B	0.99	0.455872	1.147027
C	1.53	0.373914	1.493635
D	2.07	0.260216	1.718274
E	2.61	0.131516	1.84639
X	3.15	-0.00341	1.889017
G	636.87	-0.81767	1.535997
H	637.95	-0.81367	0.935276
I	639.03	0.217965	0.08842
J	640.11	-0.00969	1.345553
K	641.19	-0,37583	1,742461

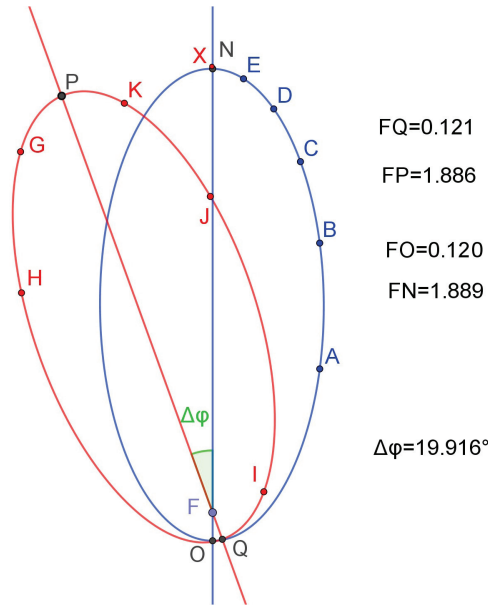


Figura 2: Revoluções obtidas pela simulação: a primeira (ABCDE) e a centésima primeira (GHIJK). Os valores dos segmentos são apresentados na unidade u_d .

por revolução pela simulação realizada é de:

$$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{100} = \frac{19.9^\circ}{100} \approx 11.9'. \tag{23}$$

Usando os comprimentos dos segmentos FO e FN, da primeira revolução da órbita simulada apresentada na Figura 2, temos que

$$\begin{aligned} a(1 - \epsilon) &= 0.12 u_d \\ a(1 + \epsilon) &= 1.89 u_d \end{aligned}$$

obtendo-se daí os parâmetros a (semieixo maior da órbita) e ϵ (excentricidade da órbita):

$$a = 1.005 u_d \quad e \quad \epsilon = 0.881. \tag{24}$$

Na Tabela 3 comparamos os valores simulados, equações (23) e (24), com os observados no movimento da estrela [2, 3]. Os valores são praticamente iguais, sendo que as diferenças encontradas podem ser atribuídas à existência de erros de interpolação, de aproximação (e.g. $dt \approx d\tau$, considerar a forma elíptica para cada revolução), de integração numérica entre outros.

Tabela 3: Comparação entre valores simulados e apresentados nas referências [2, 3]. Unidade de distância $u_d = 1.52368 \cdot 10^{14}$ m.

Grandeza	Simulado	Referência
a	$1.005 u_d$	$1 u_d$
ϵ	0.881	0.88
$\Delta\varphi$	$11.9'$	$12.0'$

6.3. Resultados adicionais

Em complemento, para que se apresente uma análise mais detalhada desta simulação, a seguir serão calculados alguns valores adicionais importantes.

Em primeiro lugar se obtém a massa M do buraco negro massivo Sagitário A* no centro de nossa Galáxia. Usando-se as equações (14), (15) e (22) para calcular GM no sistema MKS, temos:

$$\begin{aligned} GM &\approx 1 \frac{u_d^3}{u_t^2} = \frac{(1.52368 \cdot 10^{14} \text{ m})^3}{(8.05567 \cdot 10^7 \text{ s})^2} \\ &= 5.45 \cdot 10^{26} \text{ m}^3 \text{ s}^2 \end{aligned} \tag{25}$$

e consultando-se o valor da constante G na Tabela 1, resulta para a massa deste buraco negro o valor de

$$M = 8.17 \cdot 10^{36} \text{ kg} = 4.11 \cdot 10^6 M_\odot, \tag{26}$$

o que está de acordo com a referência [2]. Usando-se as equações (16), (17) e (22), e os dados da Tabela 1, pode-se também calcular

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 1}{158.5^2} = 7.91 \cdot 10^{-5} u_d \ll r_{\min} \\ &= a(1 - \epsilon) = 0.12 u_d, \end{aligned} \tag{27}$$

ou $1.83 \cdot 10^{10}$ km. Ainda, devido à equação (4), obtemos

$$\gamma_S \approx \left(1 - \frac{v_{\max}^2}{c^2} - \frac{r_S}{r} \right)^{-1/2} = 1.00064 \approx 1, \tag{28}$$

resultados que estão de acordo com os limites fixados para o sistema $M \setminus m$ simulado, Seção 2.

Finalmente, vamos estimar o período T de uma revolução da massa m por meio dos dados simulados e pela aproximação contida na equação (21), da MCN, para compará-los entre si.

O valor de $t = 3.15 (\pm 0.015) u_t$ no ponto X da Tabela 2 corresponde ao intervalo de tempo de meia revolução (de O a X na Figura 2) e, portanto, $T_{\text{simul}} \approx 6.3 u_t$. Por outro lado, das equações (21) e (24) resulta

$$T_{\text{MCN}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{GM^{1/2}} \approx \frac{6.28 \cdot 1.005^{3/2}}{1} = 6.33 u_t,$$

ou 16.2 anos. Verifica-se uma aproximação entre os valores T_{simul} e T_{MCN} , esperada por ser muito pequena a perturbação causada pelo termo adicional devido à RG.

7. Considerações Finais

Foi desenvolvido um programa de simulação da precessão da órbita da estrela S2 em torno do buraco negro Sagitário A*, com objetivo didático de aplicação da Relatividade Geral. Sobre este sistema da pesquisa contemporânea resultaram valores (precessão, período de revolução, dimensões e tipo da órbita, massa do buraco negro, etc.) muito próximos aos apresentados

na literatura. Consideramos assim que este programa pode ser explorado em cursos sobre a Relatividade Geral para que os alunos adquiram uma primeira experiência de simulação nesta área da Física. Para concluir, convém lembrar que na literatura podem ser encontradas introduções didáticas aos efeitos relativísticos a partir da geometria modificada por uma massa gravitacional. Assim, na referência [12] é apresentado um estudo numérico para o modelo cosmológico relativístico de Friedmann partindo de conceitos Newtonianos, tornando acessível à compreensão de alguns conceitos básicos da Cosmologia. Por outro lado, na referência [13] são analisadas propriedades dos buracos negros e dos buracos de minhocas obtidas pela Teoria de Gravitação de Einstein (TGE) usando as métricas de Schwarzschild, Eddington e Kruskal. Uma dedução das equações da teoria de gravitação de Einstein para um curso de graduação pode ser encontrada em [14].

Agradecimentos

Os autores agradecem as discussões com o Prof. Mauro D. Cattani e suas sugestões, bem como o financiamento sob os processos n° 2018/03211-6 e 2022/05667-2 Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Em memória de Concetta Rosas Forte Garms.

Material suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:

Apêndice 1 – Algoritmo

Apêndice 2 – Programa

Referências

- [1] M.V. Berry, *Principles of cosmology and gravitation* (IOP Publishing, Philadelphia, 1989).
- [2] R. Abuter, A. Amorim, N. Anugu, M. Bauböck, M. Benisty, J-P. Berger, N. Blind, H. Bonnet, W. Brandner, A. Buron et al., *Astronomy & Astrophysics* **615**, L15 (2018).
- [3] W.C. Santos e R.S. Magalhães, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20200336 (2020).
- [4] M.A. Garms e I.L. Caldas, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40**, e2316 (2018).
- [5] M.A. Garms, *Videos (Playlist)*, disponível em: <https://www.youtube.com/@marcogarms7668>, acessado em: 05/06/2023.
- [6] A. Boehle, A.M. Ghez, R. Schödel, L. Meyer, S. Yelda, S. Albers, G.D. Martinez, E.E. Becklin, T. Do, J.R. Lu et al., *The Astrophysical Journal* **830**, 17 (2016).
- [7] M. Habibi, S. Gillessen, F. Martins, F. Eisenhauer, P.M. Plewa, O. Pfuhl, E. George, J. Dexter, I. Waisberg, T. Ott et al., *The Astrophysical Journal* **847**, 120 (2017).
- [8] W. Rindler, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **116**, 662 (1956).
- [9] R.R. Machado, *Uma dedução heurística da métrica de Schwarzschild*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (2016).
- [10] J.B. Hartle, *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity* (Benjamin Cummings, San Francisco, 2002).
- [11] K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1971).
- [12] P.D.C. Reis, E.G. Seifert, E.C. Gabrick, R. Jantsch, K.C. Iarosz, A.M. Batista e J. Trobia, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **44**, e20220196 (2022).
- [13] M.S.D. Cattani, *Black holes and wormholes: Brief comments*, disponível em: <http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd1720.pdf>.
- [14] M.S.D.Cattani, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **20**, 27 (1998).