

# Batimentos e ressonância de diapasões analisados usando um osciloscópio

(Analyzing a diapason beating and resonance effects using an oscilloscope)

Adenilson José Chiquito<sup>1</sup> e Antonio Carlos Alonge Ramos

Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil  
Recebido em 23/3/2004; Aceito em 24/2/2005

Tratar fenômenos ondulatórios como o de batimentos e ressonância em cursos introdutórios de Física pode, às vezes, apresentar-se como um processo complicado, dada a dificuldade de visualização dos fenômenos citados. Neste trabalho, apresentamos uma forma bastante simples e acessível para proporcionar a visualização destes fenômenos usando um osciloscópio e um circuito amplificador muito simples.

**Palavras-chave:** ressonância, mecânica.

It can be a hard task to introduce the beating and resonance effects in physics courses due to the difficulties for the visualization of these effects. In this work, we present a simple way which can help the visualization of these effects, using an oscilloscope and an easy-to-built electronic amplifier.

**Keywords:** resonance, mechanics.

## 1. Introdução

Podemos dizer que a *demonstração* de um fenômeno tem o mesmo, senão, maior valor que uma imagem<sup>2</sup>. Normalmente, o aprendizado de fenômenos físicos requer dos estudantes uma boa dose de imaginação para a visualização do sistema que se está estudando e dos efeitos resultantes. Quando este exercício de imaginação pode apoiar-se em experiências que fazem parte do censo comum ou já realizadas em laboratórios, a dificuldade é reduzida. Entretanto, nem sempre isto é possível e em determinadas situações é fácil observar que uma simples demonstração torna-se um divisor de águas entre a compreensão de dado fenômeno e a simples atitude de *aceitá-lo*.

Neste trabalho, desenvolvemos um sistema que pode ser construído facilmente e que mostrou resultados excelentes na ilustração de fenômenos ondulatórios como batimentos e ressonância. A proposta é baseada no uso de diapasões para a ilustração dos efeitos, os quais são visualizados em um osciloscópio ou, na falta deste, em uma caixa de som. Muitos outros experimentos podem ser conduzidos com a utilização deste sistema, e algumas experiências são sugeridas ao longo deste trabalho. A seguir será dada uma breve introdução ao problema, com um desenvolvimento dos conceitos que permitem

descrever matematicamente a ressonância e os batimentos. Em seguida, serão apresentados os procedimentos experimentais para a construção do dispositivo e alguns experimentos com a montagem.

## 2. Batimentos e ressonância - Conceitos básicos

### 2.1. Batimentos

O fenômeno conhecido por batimento é o resultado da superposição de duas ondas que se propagam numa mesma direção com frequências ligeiramente diferentes [1, 2]. Por exemplo, duas ondas sonoras propagantes na mesma direção com frequências próximas chegam a um observador, num determinado ponto do espaço, ao mesmo tempo; o observador escutará o acoplamento das duas ondas sonoras que periodicamente entram em fase e saem de fase: haverá uma alternância no tempo entre a interferência construtiva e a destrutiva das duas ondas e este fenômeno pode ser caracterizado como uma interferência temporal.

Para descrevermos este fenômeno, consideremos duas ondas de amplitudes iguais, propagando-se num meio (por exemplo, o ar) e na mesma direção, porém com frequências ligeiramente diferentes,  $f_1$  e  $f_2$ .

<sup>1</sup>E-mail: chiquito@df.ufscar.br

<sup>2</sup>Um exemplo brilhante disto pode ser visto no livro *A História Química de uma Vela e as Forças da Natureza*, de Michael Faraday, Contraponto Editora (2003), com tradução de Vera Ribeiro.

Podemos representar o deslocamento que cada onda provocaria em um certo ponto no espaço por

$$y_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t) \text{ e } y_2 = A \cos(2\pi f_2 t).$$

Pelo princípio da superposição, observamos que o deslocamento resultante no ponto considerado é dado por

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A(\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)),$$

a qual pode ser reescrita, usando a identidade trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Fazendo  $a = 2\pi f_1 t$  e  $b = 2\pi f_2 t$ , encontramos

$$y(t) = 2A \cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right] \cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right]. \quad (1)$$

Através da Eq. (1) observamos que o deslocamento resultante da combinação das duas ondas tem uma frequência efetiva igual à frequência média,  $(f_1 + f_2)/2$ , e uma amplitude não constante, mas modulada por uma função oscilatória, ou seja,

$$2A \cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]. \quad (2)$$

A amplitude varia com o tempo e com uma frequência dada por  $(f_1 - f_2)/2$ . No caso de uma onda sonora, o máximo de amplitude, conhecido como batimento, será percebido sempre que  $\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right] = \pm 1$ . Ou seja, são dois os máximos em cada ciclo. Uma vez que a amplitude varia com a frequência segundo  $(f_1 - f_2)/2$ , o número de batimentos por segundo será o dobro da frequência de batimentos, ou seja  $f_1 - f_2$ .

## 2.2. Ressonância

Na natureza existem inúmeros sistemas que podem oscilar em torno de uma posição de equilíbrio, como por exemplo pontes, as cordas de um violão, a membrana de um tambor, os elétrons numa antena, os átomos nos sólidos, etc. Em sistemas reais essas oscilações são normalmente amortecidas, ou seja, elas desaparecem gradualmente com o tempo se nenhum estímulo externo for aplicado ao sistema (este efeito é devido à dissipação de energia). A aplicação adequada de um estímulo, de forma a compensar a energia que é perdida naturalmente permite que as oscilações do sistema sejam mantidas.

A representação mais simples para um sistema com essas características é o oscilador harmônico amortecido forçado (OHF). Para representar e estudar as características básicas de um OHF podemos utilizar um

sistema massa mola, onde o bloco de massa  $m$  desliza sobre um plano horizontal, levando em conta o atrito entre o bloco e o plano.

Quando submetido a um estímulo externo  $F(t) = F_0 f(t)$  ( $F_0$  é a amplitude da força aplicada), o comportamento deste sistema pode ser descrito pela equação

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t), \quad (3)$$

na qual  $b$  é a constante de amortecimento e  $k$  é a constante elástica da mola. Para o caso em que se aplica uma força externa senoidal, com frequência angular  $\omega$ , temos

$$F(t) = F_0 \text{sen}(\omega t), \quad (4)$$

e, uma solução para a Eq. (3) é [2]

$$x = x_0 \text{sen}(\omega t + \phi), \quad (5)$$

onde  $x_0$  é a amplitude e  $\phi$  é o ângulo de fase, dados por:

$$x_0 = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega b}{m})^2)^{1/2}}, \quad (6)$$

$$\tan(\phi) = -\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)b}{\omega/m}. \quad (7)$$

Nestas equações,  $\omega_0$  é a frequência natural de oscilação do sistema ou frequência de ressonância do sistema, dada por  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Analisando a Eq. (6) observamos que a amplitude de oscilação  $x_0$  será máxima quando a frequência externa  $\omega$  for igual a frequência natural de oscilação do sistema,  $\omega_0$ . Através da Eq. (7) pode-se ver que a amplitude de deslocamento e a força externa estarão em fase na condição de ressonância. Um ponto importante a ser destacado é que a condição de ressonância independe da amplitude da força  $F_0$ .

De forma geral, quando a frequência da força externa for igual a frequência do sistema oscilante, a amplitude de oscilação do sistema será máxima. Há sistemas na natureza que possuem mais de uma frequência característica, como a corda de um violão, a membrana de um tambor, os átomos nos sólidos, etc. Logo, a amplitude de oscilação destes sistema será máxima quando a frequência de estímulos externos for igual a uma das frequências naturais destes sistemas.

## 3. Montagem do circuito amplificador e obtenção de dados

### 3.1. Montagem

Inicialmente, a utilização de um osciloscópio para a visualização de um sinal mecânico pressupõe necessariamente o uso de um sistema que possa converter o sinal mecânico (ondas sonoras produzidas pelas oscilações dos diapásões) em um sinal elétrico. Um transdutor<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Um transdutor pode ser considerado como qualquer dispositivo que converta um tipo de energia em outro. Em nosso caso, energia mecânica em energia elétrica.

que mostrou-se útil, com excelente resposta e baixo custo, foi um alto-falante usado em microcomputadores. Como sabemos, um alto-falante é composto por uma bobina móvel presa a um cone de papel e disposta em torno de um ímã permanente [Fig. 1(a)]. Quando a bobina é percorrida por uma corrente elétrica, é gerado um campo magnético proporcional à corrente que interage com o campo do ímã permanente, fazendo o cone de papel vibrar e produzir ondas sonoras, ou seja, transformamos energia elétrica em mecânica. Agora, por que não tomar o caminho inverso? Movimentando o cone de papel, teremos necessariamente a produção de uma corrente elétrica na bobina (justamente como prevê a Lei de Faraday [3]) que pode ser observada com um instrumento de medida como um multímetro ou um osciloscópio. Temos, portanto, um meio de converter energia mecânica em elétrica.

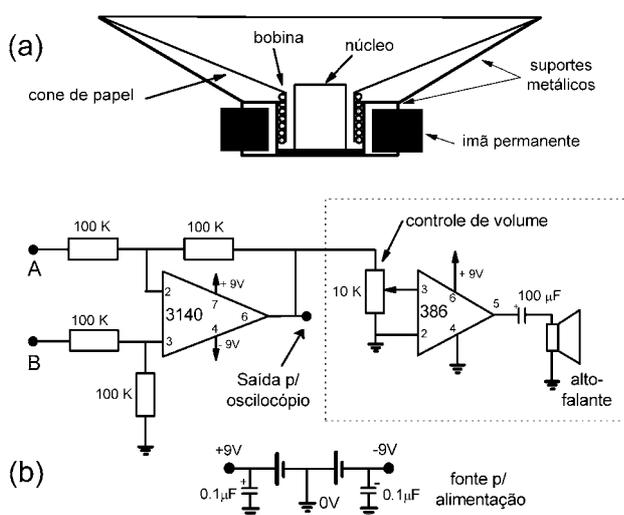


Figura 1 - (a) desenho em corte de um alto-falante comum, mostrando as suas principais características; (b) circuito do amplificador usado. Na parte destacada pelos pontilhados está um circuito que pode ser usado para a ligação do sistema a uma caixa de som. Sugere-se que a alimentação do circuito seja feita através de duas baterias de 9 V, ligadas como mostrado.

O problema que surge agora é a intensidade de corrente gerada pela bobina do alto-falante: esta pode variar desde alguns microamperes até miliamperes, dependendo da intensidade do som captado. Quando o sinal é muito baixo, a detecção pelo osciloscópio fica prejudicada pela quantidade de ruído que aparece sobreposto ao sinal que nos interessa (esse ruído pode ser das mais variadas fontes, tais como a própria rede elétrica do prédio, ondas de rádio, ruídos causados por máquinas sendo ligadas e desligadas, motores elétricos, e assim por diante). Para minimizar este problema optamos por amplificar o sinal gerado pelo alto-falante através de um circuito muito simples baseado em um amplificador operacional de alto ganho (CA 3140). Este circuito é conhecido como amplificador diferencial por amplificar a diferença entre os sinais aplicados às entradas A e B sendo, portanto, muito sensível a qualquer

variação de corrente produzida pelo alto-falante. Na Fig. 1(b), vê-se o desenho que representa este circuito. Note que o sistema pode excitar uma caixa de som para proporcionar um efeito sonoro mais audível, que será útil na apresentação dos fenômenos de ressonância em uma sala de aula. Esta possibilidade é descrita pelo circuito destacado com a linha pontilhada e é baseado em um amplificador de potência do tipo LM386. A construção de um sistema como este, incluindo a etapa para uso com caixa de som, tem custo aproximado de R\$ 15,00 (os dois amplificadores, conectores, fios, resistores, placa de circuito impresso, alto-falantes). Apesar da simplicidade do sistema apresentado, eventuais dúvidas que possam surgir sobre o funcionamento e uso dos amplificadores (o operacional e o de potência) podem ser sanadas satisfatoriamente na Ref. [4] ou na Internet [5].

Os diapasões (ambos com frequências fundamentais em 440 Hz) foram montados em duas caixas de madeira como na Fig. 2 e cada um deles foi equipado com um alto-falante (ou o nosso detector). Duas configurações foram usadas para a realização dos experimentos que serão descritos a seguir. Na primeira delas, para a detecção do sinal gerado por cada diapásão e para a verificação do fenômeno da ressonância (ou não), cada um dos alto-falantes foi ligado independentemente às entradas do amplificador (A e B). Para os experimentos nos quais desejava-se observar o sinal relativo aos batimentos, os dois alto-falantes foram ligados em série para que os sinais gerados fossem somados (a soma de dois sinais de frequências próximas tem como resultado um batimento, como visto na seção anterior).

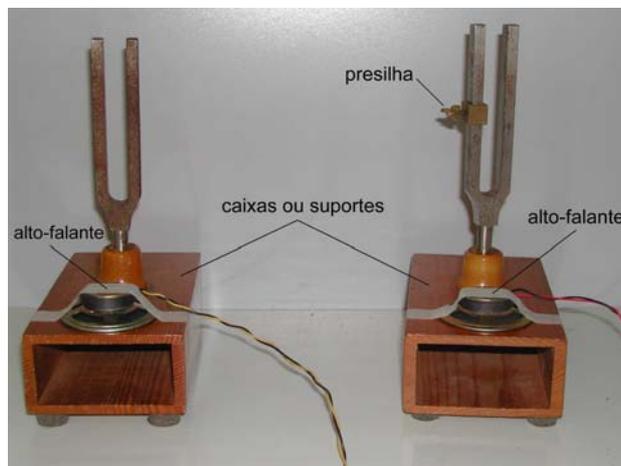


Figura 2 - Aspecto da montagem experimental com os dois diapasões. Note que um deles há uma presilha presa em um dos lados da forquilha. Esta presilha tem a função de alterar (abaixar) a frequência característica do diapásão.

### 3.2. Experimentos

Para verificar o funcionamento de nosso sistema e para caracterizar os diapasões, foi realizada uma experiência

inicial para a detecção apenas das frequências fundamentais de cada um deles. Um dos diapasões foi equipado com uma pequena presilha que, atarrachada a um dos lados da forquilha (veja a Fig. 2), altera a frequência característica do diapasão, diminuindo-a. Na Fig. 3 estão os resultados medidos para três configurações: na primeira, temos a frequência fundamental do diapasão usado, a saber, 439 Hz [Fig. 3(a)]; na segunda [Fig. 3(b)], a presilha foi colocada a 2.5 cm do topo do diapasão e a frequência observada foi 410 Hz; na terceira medida, a presilha foi colocada a 7.5 cm do topo do diapasão e a frequência observada foi de 429 Hz [Fig. 3(c)]. Estes resultados eram esperados, uma vez que quanto mais próximo da base do diapasão ficar a presilha, menor será a perturbação causada na frequência fundamental do sistema. Os valores das frequências apresentadas foram obtidas pela análise do período das oscilações mostradas na Fig. 3 e confirmadas através de um algoritmo que usa a transformada rápida de Fourier (ou FFT, *Fast Fourier Transform*) [6]. Para a obtenção dos valores de frequência, basta usar a expressão  $f = 1/T$ , onde  $T$  é o período da oscilação.

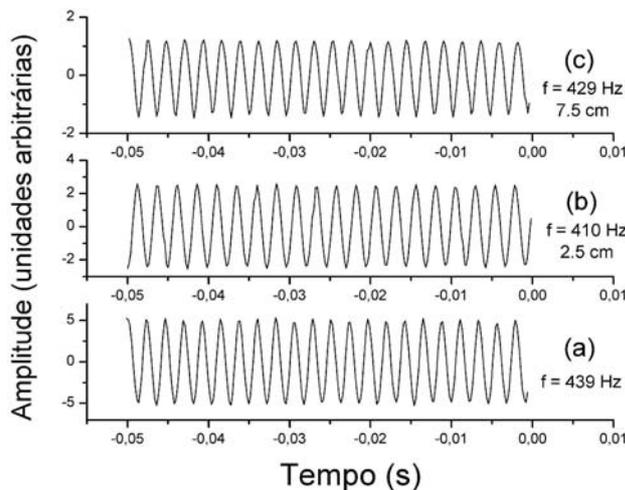


Figura 3 - Resultados obtidos para três configurações: (a) frequência fundamental do diapasão usado, 439 Hz; (b) a presilha foi colocada a 2.5 cm do topo do diapasão e a frequência observada foi 410 Hz e (c) a presilha foi colocada a 7.5 cm do topo do diapasão e a frequência observada foi de 429 Hz.

Caracterizado o sistema e os diapasões, partimos para a verificação dos fenômenos dos batimentos e da ressonância. Inicialmente, usamos um diapasão operado em sua frequência fundamental de 439 Hz e outro com a presilha a 2.5 cm do topo, portanto com frequência em 410 Hz. Na Fig. 4(a) está a oscilação observada, resultante do acoplamento das duas frequências anteriores. As frequências obtidas da curva apresentada foram de 420 Hz e de 15.6 Hz para os batimentos<sup>4</sup>. Estes valores estão bastante próximos dos calculados teoricamente, pois para o acoplamento de

duas ondas com  $f_1 = 439$  Hz e  $f_2 = 410$  Hz, obtemos

$$\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)_{\text{teórico}} = 424 \text{ Hz}$$

$$\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)_{\text{teórico}} = 14 \text{ Hz.}$$

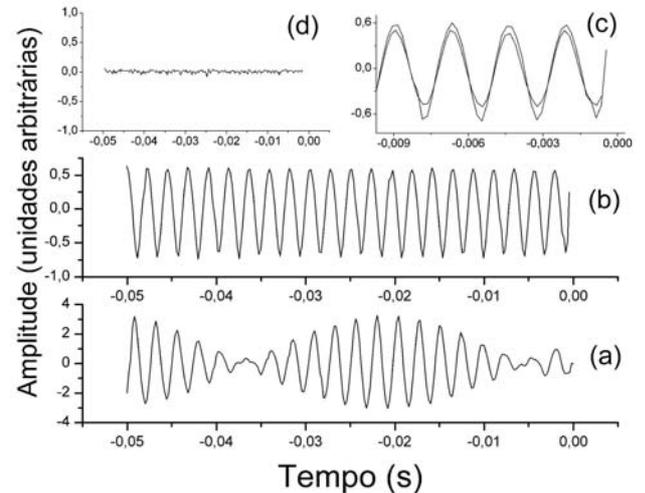


Figura 4 - Batimentos e ressonância: em (a), vê-se a oscilação obtida, resultante do acoplamento das frequências 439 Hz e 410 Hz, dando as frequências características de batimentos de 420 Hz e de 15.6 Hz, de acordo com a teoria; em (b) pode-se observar as oscilações obtidas pelo detector (o segundo diapasão) colocado a uma distância de 20 cm da fonte de excitação (439 Hz). Para efeito de comparação, em (c) são apresentadas em detalhe a oscilação obtida por ressonância e a oscilação do diapasão usado como fonte de excitação, tomados em tempos diferentes para evitar acoplamentos. Finalmente, em (d) colocamos a presilha a 2.5 cm do topo do diapasão detector, não sendo observada a ressonância!

Além da concordância entre experimento e teoria, um ponto importante que deve ser enfatizado aqui é o fato de que o efeito de batimento pode ser facilmente acompanhado pelos alunos, ao observar as oscilações na tela do osciloscópio. Além disso, um outro conceito de difícil fixação relacionado à questão de que os máximos percebidos pelos nossos *ouvidos* são relacionados à amplitude da modulação (batimento) ou da frequência fundamental, pode ser facilmente apresentado, pois podemos acompanhar as oscilações ao mesmo tempo, sonora e visualmente. Outros experimentos foram realizados colocando-se a presilha em várias posições, mostrando novas frequências de batimento, como esperado. Entretanto, por tratar-se de um sistema de detecção simples, quando as frequências de ambos os diapasões são muito próximas, a extração de dados numéricos do sinal observado no osciloscópio é difícil, levando a erros. Como um exemplo, quando usamos os diapasões com frequências de 439 e 429 Hz, deveríamos observar os valores de 434 e 5 Hz características do batimento gerado. No entanto, medimos apenas  $\frac{f_1 + f_2}{2} \sim$

<sup>4</sup>Para o cálculo da frequência de batimento  $(f_1 - f_2)/2$ , devemos observar que na Fig. 4(a) apenas aparece metade de um período e assim o tempo medido será  $t = T/2$ . A frequência experimental será  $f = 1/(2t)$ .

400 Hz; o valor da diferença de frequências não foi possível de ser obtido. Como todo aparato experimental, nosso sistema opera com ótimos resultados em uma determinada faixa de frequências, ou seja, os resultados são confiáveis dentro de uma *janela experimental*. Para resolver este problema e tornar o sistema mais flexível, a troca do alto-falante por uma cápsula piezo-elétrica pode ser uma solução, como indicaram alguns experimentos preliminares.

O próximo fenômeno ondulatório que pode ser demonstrado com o nosso sistema é o da ressonância. Quando um sistema é excitado por uma frequência igual ou próxima à sua frequência fundamental, ocorre a chamada ressonância, como abordado anteriormente. Em nosso caso, um dos diapasões foi usado como excitação e o outro como detector (somente este foi ligado às entradas do amplificador). Na Fig. 4(b) pode-se observar o resultado: nesta figura estão colocadas as oscilações obtidas pelo detector (o segundo diapasão) colocado a uma distância de 20 cm da fonte de excitação. Para efeito de comparação, na Fig. 4(c) são apresentadas em detalhe a oscilação obtida por ressonância e a oscilação do diapasão usado como fonte de excitação, tomados em tempos diferentes para evitar acoplamentos. Colocando a presilha a 2.5 cm do topo do diapasão detector, observa-se o comportamento apresentado na Fig. 4(d): não há ressonância!

Muitas outras experiências podem ser pensadas, como por exemplo o estudo da dependência da intensidade de uma onda com a distância onde é feita a detecção (sugestão: considere uma onda sonora como uma onda esférica). Assim, pode-se apresentar sem qualquer problema de visualização fenômenos oscilatórios de uma forma que consideramos sem custo, uma vez que qualquer laboratório de ensino em uma universidade possui os equipamentos usados. Uma outra proposta que pode

ser colocada em prática é a utilização de um micro-computador para a aquisição do sinal proveniente dos alto-falantes através de um conversor analógico-digital simples e de fácil construção, sistema que será objeto de um futuro trabalho voltado ao ensino.

#### 4. Conclusão

Através de um sistema simples baseado em um circuito amplificador para as oscilações produzidas por um diapasão, construímos um sistema que permite observar em um osciloscópio fenômenos ondulatórios como os batimentos e a ressonância. Este sistema foi utilizado em sala de aula, com resultados muito bons, propiciando aos alunos uma visão simples e direta dos fenômenos envolvidos. Os autores gostariam de agradecer Reginaldo da Silva e Alexandre J. de Castro Lanfredi pelo apoio e sugestões durante a montagem do sistema.

#### Referências

- [1] D. Halliday e R. Resnick, *Física 2* (LTC Editora, Rio de Janeiro, 1984).
- [2] H.M. Nussensveig, *Física Básica 2* (Edgard Blücher, São Paulo, 1981).
- [3] D. Halliday e R. Resnick, *Física 3* (LTC Editora, Rio de Janeiro, 1984).
- [4] James Brophy, *Eletrônica Básica para Cientistas* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978); ou qualquer outro livro de eletrônica básica (até mesmo revistas dedicadas a *hobbyistas*, disponíveis em bancas de jornais).
- [5] [www.national.com](http://www.national.com)
- [6] R.L. Burden and J.D. Faires, *Numerical Analysis* (PWS-Kent, Boston, 1989).