

# Configurações centrais planares encaixantes

(Nested planar central configurations)

Luis Fernando Mello<sup>1</sup> e Antonio Carlos Fernandes

Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil

Recebido em 12/4/2007; Aceito em 25/5/2007

Neste artigo estudamos configurações centrais planares para o problema de seis corpos, mostrando a existência de uma família de tais configurações com as seguintes propriedades: os seis corpos estão sobre os vértices de dois triângulos equiláteros com baricentros coincidentes, estando o triângulo equilátero de lado menor girado de  $\pi/3$  em relação ao triângulo equilátero de lado maior.

**Palavras-chave:** problema de  $n$  corpos, configurações centrais planares.

In this paper we show the existence of a family of planar central configurations for the 6-body problem with the following properties: the six bodies are on the vertices of two equilateral triangles with common barycenters and the smaller triangle is rotated of  $\pi/3$  with respect to the larger one.

**Keywords:**  $n$ -body problem, planar central configurations.

Dedicado ao professor Sdnei de Brito Alves (*in memoriam*)

## 1. Introdução

O clássico problema de  $n$  corpos em mecânica celeste consiste no estudo da dinâmica de  $n$  massas interagindo de acordo com lei da gravitação universal proposta por Newton [1]. Considere  $n$  partículas de massas positivas  $m_i$  ocupando posições  $q_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Deste modo, as equações diferenciais que regem o problema de  $n$  corpos são dadas por

$$\ddot{q}_i = - \sum_{j \neq i} m_j \frac{q_i - q_j}{|q_i - q_j|^3}, \quad (1)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Em (1) estamos adotando um referencial em relação ao qual a constante de gravitação universal tem 1 unidade.

Dizemos que as  $n$  massas formam uma *configuração central* se o vetor aceleração de cada partícula é proporcional ao seu vetor posição relativo ao centro de massa do sistema, ou seja, se existir  $\lambda$  positivo tal que  $\ddot{q}_i = \lambda q_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim, da Eq. (1), as equações que regem o problema de  $n$  corpos numa configuração central são dadas por

$$\lambda q_i = - \sum_{j \neq i} m_j \frac{q_i - q_j}{|q_i - q_j|^3}, \quad (2)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

O estudo das configurações centrais remonta de longa data e existe uma vasta literatura a esse respeito,

como, por exemplo, os livros de Wintner [2] e Hagi-hara [3]. Recomendamos o artigo de Moeckel [4] e as referências lá citadas para um estudo abrangente das configurações centrais. As soluções colineares encontradas por Euler [5] para o problema de três corpos bem como as soluções triangulares encontradas por Lagrange [6] para o problema de três corpos de massas iguais são exemplos clássicos de configurações centrais.

As configurações centrais permitem obter as únicas soluções explícitas do problema de  $n$  corpos conhecidas até hoje, que são as chamadas *soluções homogêneas*, para as quais as razões das distâncias mútuas entre os corpos permanecem constantes. Além do mais, as configurações centrais estão relacionadas com algumas modificações topológicas dos conjuntos de nível de energia  $h$  e de momento angular  $c$  do problema de  $n$  corpos [7].

Pouco se sabe a respeito das configurações centrais para  $n \geq 4$ . Para o caso colinear, Moulton [8] mostrou que existem  $n!/2$  possíveis configurações centrais, uma para cada ordenação das massas, para qualquer escolha de massas positivas. Para o caso das configurações centrais *planares*, onde as partículas estão num mesmo plano, sabe-se, dentre outras coisas, que  $n$  partículas de massas iguais sobre os vértices de um  $n$ -ágono regular formam uma configuração central, generalizando assim o resultado de Lagrange quando  $n = 3$ . Vale observar que uma configuração central planar dá origem a uma família de órbitas na qual cada partícula descreve uma

<sup>1</sup>E-mail: lfmelo@unifei.edu.br.

cônica com um foco no centro de massa.

Motivado pelos estudos de Euler e Lagrange, o sexto dos problemas propostos por Smale [9] como desafios matemáticos para o século XXI cita uma questão colocada por Wintner para as configurações centrais planares: para um dado conjunto de  $n$  massas positivas, o número de configurações centrais planares não equivalentes (módulo rotações, translações e dilatações) é finito? Recentemente, Hampton e Moeckel [10] responderam afirmativamente a questão acima para  $n = 4$ , mostrando que, neste caso, o número de configurações centrais planares não equivalentes está entre 32 e 8472.

Uma notável família de configurações centrais planares foi obtida recentemente por Hampton [11] para o caso de cinco corpos: três massas (sendo duas iguais) estão sobre os vértices de um triângulo equilátero (como no caso de Lagrange) e as outras duas massas (iguais) estão simetricamente posicionadas no interior do triângulo. Em outras palavras, Hampton obteve exemplos de configurações centrais planares com a seguinte propriedade: um subconjunto das massas ainda forma uma configuração central planar, no caso a solução equilátera de Lagrange.

Neste artigo, caminhamos na mesma direção apontada por Hampton, obtendo uma família de configurações centrais planares para o problema de seis corpos tendo as seguintes características: três corpos de massas iguais  $M$  estão sobre os vértices de um triângulo equilátero de lado 1 (como no caso de Lagrange) enquanto que os outros três corpos de massas iguais  $m$  estão sobre os vértices de um outro triângulo equilátero de lado  $0 < a < 0.41388$  (como no caso de Lagrange). Os dois triângulos equiláteros têm baricentros coincidentes e o segundo está rotacionado de  $\pi/3$  em relação ao primeiro (Fig. 1).

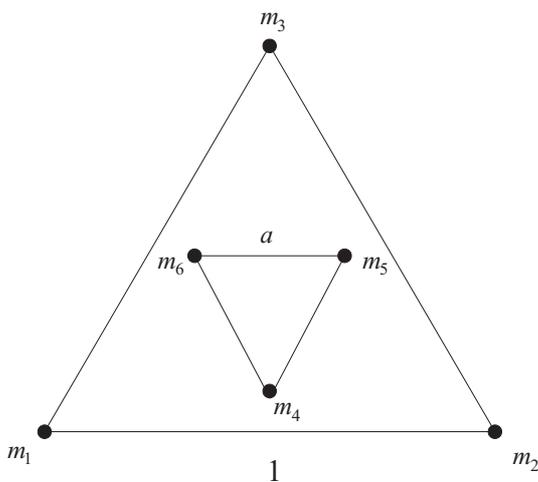


Figura 1 - Configurações centrais encaixantes.

<sup>2</sup>Ref. [3], p. 241.

## 2. Configurações centrais planares para o problema de seis corpos

As Eqs. (1) formam um conjunto de  $2n$  equações para o caso de configurações planares. Alternativamente, vamos trabalhar aqui com um sistema equivalente de  $n(n - 1)/2$  equações proposto por Dziobek.<sup>2</sup>

$$f_{ij} = \sum_{k \neq i,j} m_k (R_{ik} - R_{jk}) \Delta_{ijk} = 0, \quad (3)$$

onde

$$R_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} = \frac{1}{|q_i - q_j|^3}, \quad \Delta_{ijk} = (q_i - q_j) \wedge (q_i - q_k).$$

Observe que  $\Delta_{ijk}$  é o dobro da área orientada do triângulo com vértices em  $q_i, q_j$  e  $q_k$ , nesta ordem. Assim,  $\Delta_{ijk} = \Delta_{kij}$  e  $\Delta_{ijk} = -\Delta_{ikj}$ , para todo  $i, j, k$ . É claro que  $R_{ij} = R_{ji}$ , para todo  $i, j$ .

Para o nosso caso, onde temos seis corpos de acordo com a Fig. 1, valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} R_{12} = R_{13} = R_{23} = 1, \quad R_{45} = R_{46} = R_{56} = a^{-3}, \\ R_{34} = R_{15} = R_{26}, \\ R_{14} = R_{16} = R_{24} = R_{25} = R_{35} = R_{36}, \\ \Delta_{124} = \Delta_{163} = \Delta_{235}, \quad \Delta_{146} = \Delta_{254} = \Delta_{365}, \quad (4) \\ \Delta_{125} = \Delta_{236} = \Delta_{234} = \Delta_{126} = \Delta_{143} = \Delta_{153}, \\ \Delta_{145} = \Delta_{156} = \Delta_{364} = \Delta_{345} = \Delta_{264} = \Delta_{256}. \end{aligned}$$

Portanto, devemos procurar massas positivas  $m_i, i = 1, \dots, 6$ , que satisfaçam as Eqs. (3) sob as hipóteses descritas pelas Eqs. (4). Estamos assumindo tacitamente que os triângulos são equiláteros, com baricentros coincidentes e que o triângulo de lado  $a$  está no interior da região limitada pelo triângulo de lado 1. Isto implica que  $0 < a < 1/2$ .

Das Eqs. (3) e (4), temos

$$\begin{aligned} f_{12} = 0 &\iff (R_{15} - R_{25})\Delta_{125}(m_5 - m_6) = 0 \\ &\iff m_5 = m_6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{13} = 0 &\iff (R_{35} - R_{15})\Delta_{134}(m_4 - m_5) = 0 \\ &\iff m_4 = m_5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{23} = 0 &\iff (R_{25} - R_{15})\Delta_{234}(m_4 - m_6) = 0 \\ &\iff m_4 = m_6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{45} = 0 &\iff (R_{25} - R_{15})\Delta_{145}(m_1 - m_3) = 0 \\ &\iff m_1 = m_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{46} = 0 &\iff (R_{25} - R_{15})\Delta_{246}(m_2 - m_3) = 0 \\ &\iff m_2 = m_3; \end{aligned}$$

$$f_{56} = 0 \iff (R_{15} - R_{25})\Delta_{156}(m_1 - m_2) = 0$$

$$\iff m_1 = m_2.$$

Das considerações acima resulta que devemos ter

$$m_1 = m_2 = m_3 = M, \quad m_4 = m_5 = m_6 = m. \quad (5)$$

Substituindo as Eqs. (5) e (4) nas nove equações restantes da Eq. (3), resulta ou em igualdades da forma  $0 = 0$  ou na seguinte equação

$$M[(1 - R_{25})\Delta_{142} + (1 - R_{15})\Delta_{143}] + m[(R_{15} - R_{45})\Delta_{145} + (R_{25} - R_{45})\Delta_{146}] = 0, \quad (6)$$

a qual pode ser escrita como

$$\frac{m}{M} = \frac{(1 - R_{25})\Delta_{142} + (1 - R_{15})\Delta_{143}}{(R_{45} - R_{15})\Delta_{145} + (R_{45} - R_{25})\Delta_{146}}, \quad (7)$$

visto que o denominador  $(R_{45} - R_{15})\Delta_{145} + (R_{45} - R_{25})\Delta_{146} > 0$ .

Temos o seguinte teorema.

**Teorema 2.1** *Seja  $r$  o raio da circunferência circunscrita ao triângulo com vértices em  $m_4, m_5$  e  $m_6$ , de acordo com a Fig. 1. Para cada*

$$0 < r < 0.23895... \quad (8)$$

*existem massas positivas  $M$  e  $m$  tais que as massas  $m_1 = m_2 = m_3 = M$  e  $m_4 = m_5 = m_6 = m$  estão numa configuração central planar encaixante conforme a Fig. 1.*

**Prova.** De acordo com as análises anteriores basta mostrarmos que para  $r$  satisfazendo (8) o numerador  $(1 - R_{25})\Delta_{142} + (1 - R_{15})\Delta_{143}$  de (7) é positivo. Sem perda de generalidade, podemos considerar um sistema ortogonal de coordenadas com o vértice  $m_1$  na origem, de tal modo que o vértice  $m_2$  esteja sobre o eixo horizontal e o vértice  $m_3$  esteja no primeiro quadrante. Assim,  $m_1 = (0, 0)$ ,  $m_2 = (1, 0)$ ,  $m_3 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ ,  $m_4 = (1/2, -r + \sqrt{3}/6)$ ,  $m_5 = ((1+r\sqrt{3})/2, (3r+\sqrt{3})/6)$  e  $m_6 = ((1-r\sqrt{3})/2, (3r+\sqrt{3})/6)$ . As distâncias  $r_{15}$  e  $r_{25}$  em função de  $r$  são facilmente obtidas a partir das coordenadas acima. As áreas orientadas  $\Delta_{142}$  e  $\Delta_{143}$  em função de  $r$  são dadas por

$$\Delta_{142} = \frac{6r - \sqrt{3}}{12}, \quad \Delta_{143} = \frac{3r + \sqrt{3}}{12}.$$

Observe que, para  $0 < r < \sqrt{3}/6$  (valores inicialmente permitidos para  $r$ ),  $\Delta_{142} < 0$  e  $\Delta_{143} > 0$ . Não é difícil vermos que para  $r$  dado em (8) a função  $g(r) = (1 - R_{25})\Delta_{142} + (1 - R_{15})\Delta_{143}$  é positiva. Na Fig. 2 apresentamos um esboço do gráfico da função  $g(r)$  em termos de  $r$ . Deste modo, para cada  $r$  satisfazendo (8) a razão  $m/M$  é positiva e o teorema está demonstrado.

Em termos do comprimento  $a$  do lado do triângulo equilátero menor, o teorema acima pode ser reescrito exigindo-se que

$$0 < a < 0.41388...$$

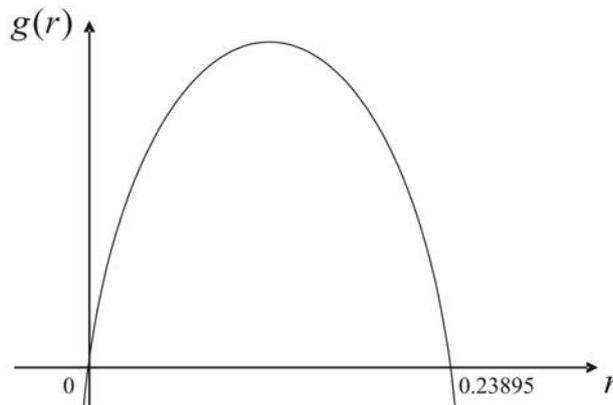


Figura 2 - Gráfico de  $(1 - R_{25})\Delta_{142} + (1 - R_{15})\Delta_{143}$  em função de  $r$ .

### 3. Observações finais

Um resultado similar ao Teorema 2.1 pode ser encontrado no Corolário 5, p. 2164 da Ref. [12]. Gostaríamos de salientar que na Ref. [12] hipóteses extras foram tomadas. De todo modo, acreditamos que a demonstração do Teorema 2.1 apresentada aqui é simples, elegante e independente.

Seguindo a mesma linha de trabalho apresentada neste artigo, é possível encontrar outra família de configurações centrais planares encaixantes para o problema de 6-corpos, de modo que o triângulo equilátero de lado menor não esteja rotacionado em relação ao triângulo equilátero de lado maior. Deixamos esta verificação a cargo do leitor.

### Agradecimentos

O primeiro autor desenvolveu este trabalho com auxílio do CNPq, projeto 473747/2006-5. O segundo autor é bolsista PIBIC CNPq. Este artigo foi escrito quando primeiro autor visitava a Universidade Autônoma de Barcelona, apoiado pelo CNPq, projeto 210056/2006-1. Os autores agradecem ao professor Jaume Llibre pelas conversas sobre o material deste artigo.

### Referências

- [1] I. Newton, *Philosophi Naturalis Principia Mathematica* (Royal Society, London, 1687).
- [2] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* (Princeton University Press, 1941).
- [3] Y. Hagihara, *Celestial Mechanics* (MIT Press, Massachusetts, 1970), v. 1.
- [4] R. Moeckel, *Math. Z.* **205**, 499 (1990).

- [5] L. Euler, *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* **11**, 144 (1767).
- [6] J.L. Lagrange, *Essai sur le Problème de Trois Corps* (Ouvres, Gauthier-Villars, Paris, 1873), v. 6.
- [7] S. Smale, *Invent. Math* **11**, 45 (1970).
- [8] F.R. Moulton, *Ann. of Math.* **12**, 1 (1910).
- [9] S. Smale, *Math. Intelligencer* **20**, 7 (1998).
- [10] M. Hampton and R. Moeckel, *Invent. Math.* **163**, 289 (2006).
- [11] M. Hampton, *Nonlinearity* **18**, 2299 (2005).
- [12] S. Zhang and Q. Zhou, *Proc. Am. Math. Soc.* **131**, 2161 (2002).