

# O papel do amortecimento e das condições iniciais nas oscilações subamortecidas

The role of damping and initial conditions in underdamped oscillations

Cléssio Leão Silva Lima<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pernambuco, Núcleo de Tecnologia, Centro Acadêmico do Agreste, Nova Caruaru, PE, Brasil.

Recebido em 04 de agosto de 2022. Revisado em 26 de outubro de 2022. Aceito em 07 de novembro de 2022.

O problema do movimento harmônico clássico subamortecido através de uma força linearmente proporcional à velocidade é revisitado. Diversas propriedades do sistema usualmente não estudadas são abordadas como o papel das constantes do deslocamento, os instantes de tempo de retorno, as posições de retorno, os instantes de tempo de velocidade máxima, as posições de velocidade máxima, as energias, as potências e a distância total percorrida. Expressões para estas quantidades são obtidas mostrando a influência das condições iniciais do movimento e a influência do amortecimento.

**Palavras-chave:** Oscilador harmônico, oscilador amortecido, mecânica clássica.

The problem of underdamped classical harmonic motion through a force linearly proportional to velocity is revisited. Several properties of the system not usually studied are discussed, such as the role of constants of the displacement, the return time instants, the return positions, the maximum velocity time instants, the maximum velocity positions, the energies, the powers, and the total distance travelled. Expressions for these quantities are obtained showing the influence of the initial conditions of motion and the influence of damping.

**Keywords:** Harmonic oscillator, damped oscillator, classical mechanics.

## 1. Introdução

Estudantes de engenharia e de ciências naturais geralmente analisam a física dos movimentos harmônicos amortecidos (MHA) nos seus cursos regulares. Estes movimentos são reproduções do que acontece na natureza, onde algum amortecimento reduz gradualmente o deslocamento da partícula em questão. A função que descreve o amortecimento depende da natureza da fricção e de parâmetros geométricos do sistema envolvido. Supondo um sistema que se comporta por realizar oscilações amortecidas na coordenada  $x$ , cuja força de fricção é linearmente proporcional à velocidade da partícula, a força resultante é dada por

$$F = -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}, \quad (1)$$

onde  $k$  e  $b$  são respectivamente a constante elástica e de amortecimento, e  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$  referem-se à primeira e à segunda derivada temporal da coordenada  $x$ . Dividindo a equação (1) pela massa do corpo  $m$  obtém-se a equação diferencial que rege o comportamento do sistema

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (2)$$

Na equação (2),  $\beta = b/2m$  e  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  são definidos como o termo de amortecimento e a frequência angular

natural, respectivamente. A solução da equação (2) no regime subamortecido é bem conhecida [1–3]:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t \pm \delta), \quad (3)$$

onde  $A$  e  $\delta$  são constantes e  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  a frequência do sistema.  $\beta$  pode ser escrito em função de  $\omega_0$  como  $\beta = \alpha\omega_0$ , se  $\alpha$  é constante ( $0 < \alpha < 1$ ) e definido como parâmetro de amortecimento. A solução da equação (2) para os casos criticamente amortecidos ( $\alpha = 1$ ) e sobre-amortecidos ( $\alpha > 1$ ) geram funções distintas da equação (3).

Apesar do modelo acima inicialmente parecer uma simplificação extrema do problema real, a dependência linear da força viscosa com a velocidade tem boa aplicabilidade visto que é o modelo mais confiável, por exemplo, para objetos que se movem em um fluido a velocidades baixas, onde turbulência é desprezível. Essa dependência, em particular, resulta no menor tempo de convergência possível em que o corpo alcança a sua posição de equilíbrio [4]. Mais ainda, esta dependência gera soluções analíticas, o que é didaticamente atraente.

A maioria dos livros textos que analisam MHA com força viscosa linearmente proporcional à velocidade [2, 5–7] procuram focar na dependência temporal do deslocamento da partícula. Baseado nisto, este artigo pretende mostrar alguns resultados diferentes como tempos e intervalos de tempo característicos, energias, potências e distâncias percorridas, enfatizando o papel das condições iniciais e do amortecimento nestes valores.

\* Endereço de correspondência: [clessio.slima@ufpe.br](mailto:clessio.slima@ufpe.br)

## 2. MHA Unidimensional: Características Raramente Abordadas

### 2.1. As constantes da equação do deslocamento

Os valores das constantes  $A$  e  $\delta$  existentes na equação (3) podem ser expressos em função das condições iniciais do problema  $x(t=0) = x_0$ ,  $v(t=0) = v_0$  e do parâmetro de amortecimento  $\alpha$ . Assim,

$$A = \frac{x_0}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \sqrt{\left(\frac{v_0}{x_0}\right)^2 + 2\alpha\omega_0 \left(\frac{v_0}{x_0}\right) + \omega_0^2} \quad (4)$$

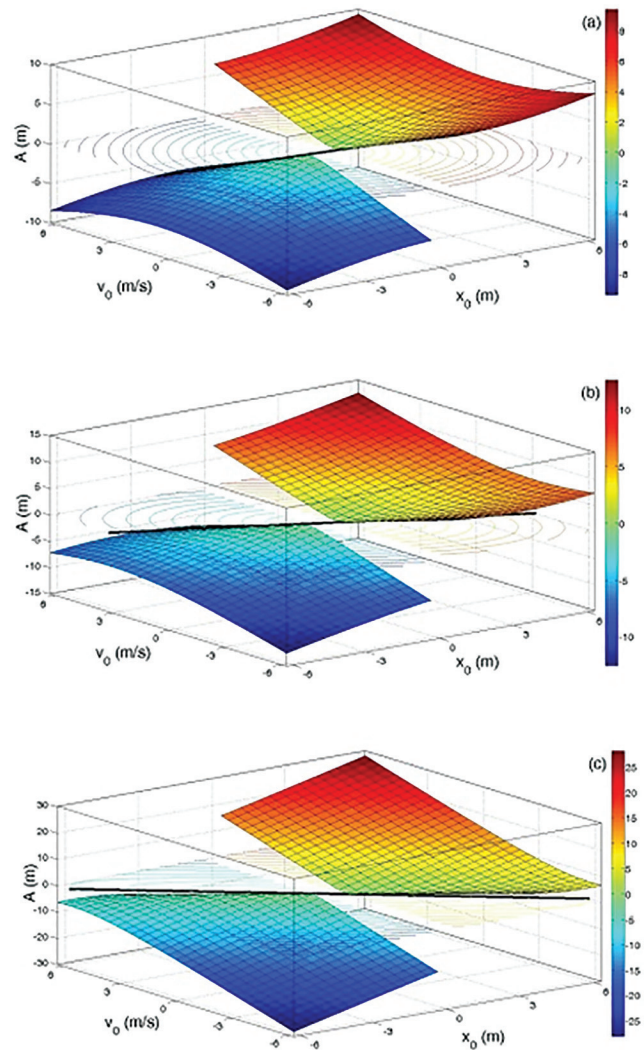
e

$$\delta = \tan^{-1} \left[ \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \left( \alpha\omega_0 + \frac{v_0}{x_0} \right) \right]. \quad (5)$$

Das equações (4) e (5) obtêm-se respectivamente que  $\lim_{x_0 \rightarrow 0^{+(-)}} A = \pm \frac{|v_0|}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}}$  e  $\lim_{x_0 \rightarrow 0^{+(-)}} \delta = \pm \text{sgn}(v_0) \frac{\pi}{2}$  e, logo, há descontinuidades para ambas as constantes no plano  $x_0 = 0$ . Se  $v_0 = 0$ ,  $A = \frac{x_0}{\sqrt{1-\alpha^2}}$  e  $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$ . Desta forma, imaginando o sistema físico como um sistema massa-mola simples, com deslocamento nulo na origem, a amplitude  $A$  é determinada pela posição em que o objeto é solto no instante de tempo  $t = 0$  se  $v_0 = 0$ , independente de  $\omega_0$  (ou seja, independente da massa  $m$  e da constante elástica  $k$ ). Quando o objeto inicia seu movimento a uma velocidade não nula e em  $x = 0$ , porém, sua amplitude  $A$  depende da velocidade inicial e de  $\omega_0$  e, logo neste caso, das propriedades da mola e do bloco. Para ambos os casos, a dependência com o amortecimento é a mesma. Também, o ângulo de fase  $\delta$  é independente das condições iniciais e independente (dependente) de  $\alpha$  se  $x_0 = 0$  ( $v_0 = 0$ ).

O comportamento da superfície  $A(x_0, v_0)$  descrita pela equação (4) para diversos valores de amortecimento  $\alpha$  pode ser observado na Figura 1 nos casos  $\alpha = 0, 1$ ,  $\alpha = 0, 5$  e  $\alpha = 0, 9$  com  $\omega_0 = 1$  rad/s.

Na Figura 1a, com baixo valor de amortecimento ( $\alpha = 0, 1$ ) a constante  $A$  é tal que para todos os valores de  $x_0$  e  $v_0$ ,  $A(x_0, v_0) \approx A(x_0, -v_0) \approx -A(-x_0, v_0)$ . Esta relação é melhor observada nas curvas de nível da superfície. Nelas, encontramos elipses de excentricidade próximas a zero e logo, curvas próximas a circunferências. Esta simetria, válida para o movimento harmônico simples (MHS) ou sistemas com atenuação baixa, é quebrada para valores mais altos de parâmetro  $\alpha$ . Nestes casos, como mostram as Figura 1b ( $\alpha = 0, 5$ ) e Figura 1c ( $\alpha = 0, 9$ ), nos pontos da superfície em que a condição  $\frac{v_0}{x_0} = -\alpha\omega_0$  é satisfeita (acima da reta de referência inserida no plano  $A = 0$ ),  $A = x_0$ , mínimo. As curvas de nível das superfícies são elipses rotacionadas de um ângulo  $\phi = \tan^{-1}(-\alpha\omega_0)$  com excentricidade crescente. Para  $\omega_0 = 1$  rad/s e  $\alpha \rightarrow 1$  a constante  $A$  é mínima próximo a bissetriz que corta o segundo e o quarto quadrante do plano  $x_0 v_0$ . Independentemente

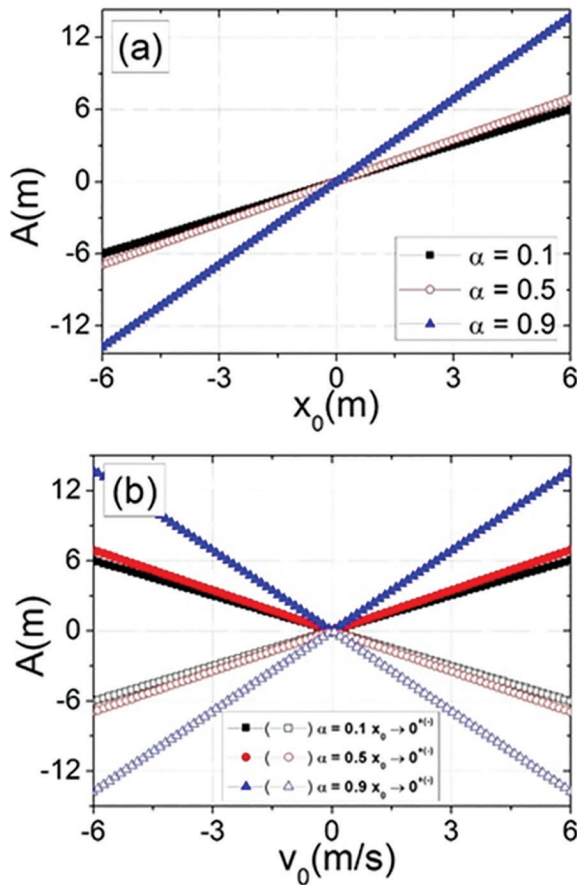


**Figura 1:** Superfícies da constante  $A$  e curvas de nível correspondente em função das condições iniciais de posição  $x_0$  e velocidade  $v_0$  para  $\omega_0 = 1$  rad/s e parâmetro de amortecimento (a)  $\alpha = 0, 1$ , (b)  $\alpha = 0, 5$  e (c)  $\alpha = 0, 9$ . No plano  $A = 0$ , reta de referência  $v_0 = -\alpha\omega_0 x_0$ .

do valor da frequência natural do sistema, se posição e velocidade inicial possuem sinais contrários (segundo e quarto quadrantes), o valor de  $|A|$  é menor que nos demais quadrantes mostrando claramente o efeito do amortecimento nos casos em que o vetor velocidade inicial aponta para  $x = 0$ . Em geral, para todas as figuras, nota-se que  $|A|$  cresce quando  $|x_0|$  e/ou  $|v_0|$  cresce e possui centro de inversão (simetria  $S_2$ ) na origem ( $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ ).

A dependência da constante  $A$  com a posição inicial, em velocidade inicial nula, ou com a velocidade inicial, em posição inicial aproximadamente nula, pode ser obtida cortando a superfície da Figura 1 nos planos  $v_0 = 0$  e  $x_0 \rightarrow 0$ , respectivamente. Os resultados podem ser observados na Figura 2.

Na Figura 2, nota-se que a constante  $A$  possui dependência linear para ambos os casos, Figura 2a e 2b.

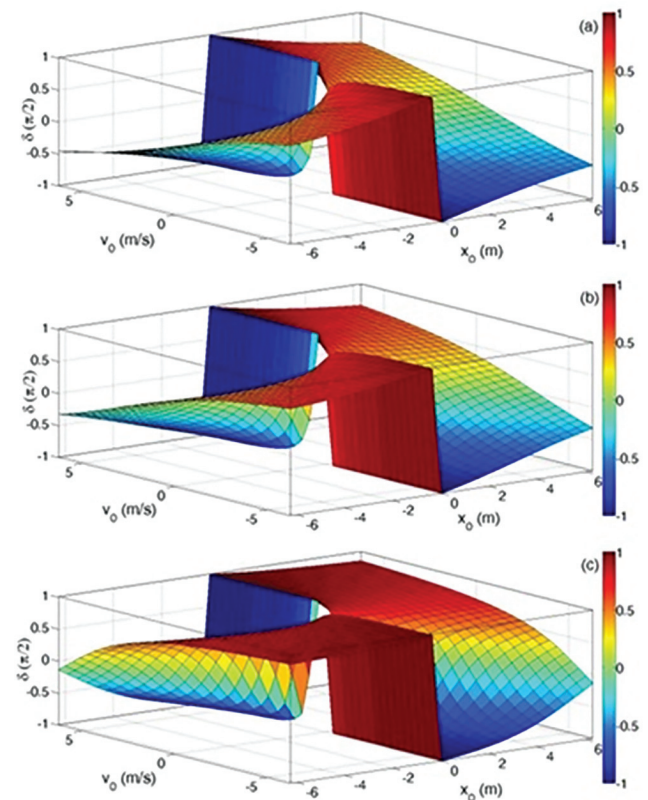


**Figura 2:** Amplitude de movimento  $A$  em função da posição inicial (a), se  $v_0 = 0$ , e da velocidade inicial (b), se  $x_0 \rightarrow 0^{+(-)}$ , para  $\omega_0 = 1$  rad/s e  $\alpha = 0, 1$ ,  $\alpha = 0, 5$  e  $\alpha = 0, 9$ .

A inclinação das curvas é crescente para valores crescentes de amortecimento. Na Figura 2a,  $A(-x_0) = -A(x_0)$ , simétrico com relação a origem, como era de se esperar. Por haver descontinuidade de  $A$  em  $x_0$ , na Figura 2b o gráfico depende da forma que se aproxima da origem, em virtude da descontinuidade em  $x_0 = 0$ .

O comportamento da superfície  $\delta(x_0, v_0)$  descrita pela equação (5) para diversos valores de amortecimento  $\alpha$  pode ser observado na Figura 3 nos casos  $\alpha = 0, 1$ ,  $\alpha = 0, 5$  e  $\alpha = 0, 9$  com  $\omega_0 = 1$  rad/s.

Na Figura 3a, para amortecimento baixo,  $\alpha = 0, 1$ ,  $\delta > 0$  ( $\delta < 0$ ) se  $x_0$  e  $v_0$  são ambos positivos ou negativos (possuem sinais trocados), ou seja, se as condições iniciais forem de afastamento (aproximação) à  $x = 0$ . Para todos os valores de  $x_0$  e  $v_0$ ,  $\delta(x_0, v_0) \approx -\delta(-x_0, v_0) \approx -\delta(x_0, -v_0)$  com simetria de rotação  $C_2$ . Para os casos de amortecimento maior ( $\alpha = 0, 5$  na Figura 3b e  $\alpha = 0, 9$  na Figura 3c),  $\delta$  tem variações mais abruptas e a simetria encontrada para valores baixos de  $\alpha$  é quebrada. Note que na condição  $\frac{v_0}{x_0} = -\alpha\omega_0$ ,  $\delta = 0$  sempre (veja equação (5)). Isto é mais facilmente visto quando  $\alpha = 0, 9$  (Figura 3c). Nesta figura,  $\delta \approx \pm \frac{\pi}{2}$ , exceto próximo aos pontos da superfície em que a condição  $\frac{v_0}{x_0} = -0, 9\omega_0$  é satisfeita. Para  $\omega_0 = 1$  rad/s



**Figura 3:** Constante  $\delta$ , em unidades de  $\frac{\pi}{2}$ , em função das condições iniciais de posição  $x_0$  e velocidade  $v_0$  para  $\omega_0 = 1$  rad/s e (a)  $\alpha = 0, 1$ , (b)  $\alpha = 0, 5$  e (c)  $\alpha = 0, 9$ .

e  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\delta$  torna-se nulo nos pontos da bissetriz que corta o segundo e o quarto quadrante do plano  $x_0v_0$ , nos mesmos casos em que  $A$  é mínimo.

### 2.2. Tempos de retorno

Da equação (3), a velocidade é facilmente obtida por

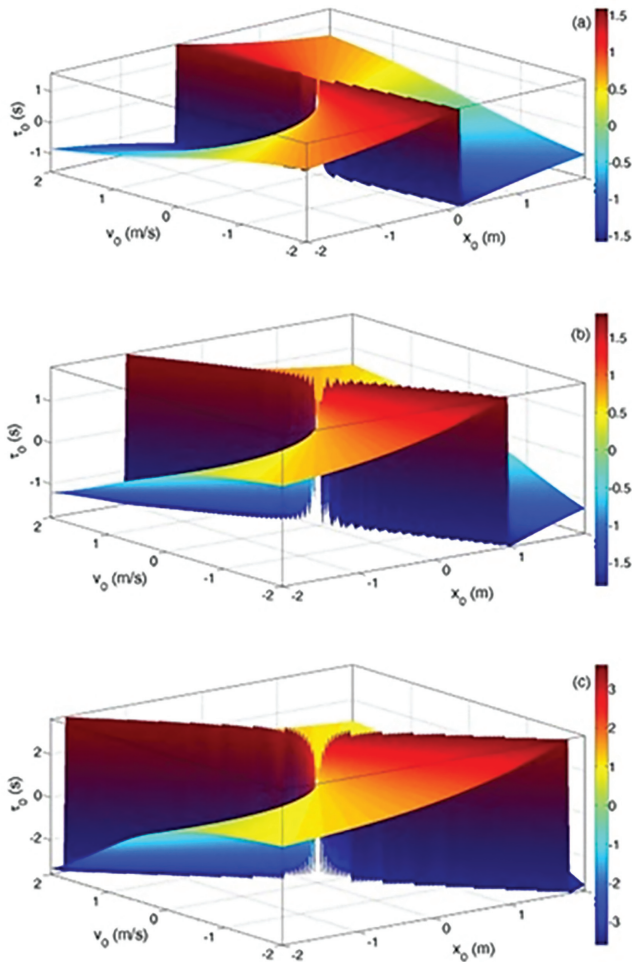
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A(\beta \cos \phi + \omega_1 \sin \phi)e^{-\beta t}, \quad (6)$$

sendo  $\phi = \omega_1 t - \delta$ . Escrever a velocidade através de uma expressão similar ao deslocamento (equação (3)), diferente apenas por uma fase, mostra que as duas quantidades estão fora de fase uma em relação à outra por  $\tan^{-1}(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha})$  [6]. Nos  $n$  instantes de tempo em que a partícula retorna (os instantes de retorno  $\tau_n$ ), o deslocamento máximo é alcançado, a velocidade é zero e da equação (6)

$$\tau_n = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \left[ n\pi - \tan^{-1} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) + \delta \right]. \quad (7)$$

Usando o ângulo de fase  $\delta$  obtido na equação (5)

$$\tau_n = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \left[ n\pi + \tan^{-1} \left( \frac{v_0 \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha v_0 + x_0 \omega_0} \right) \right]. \quad (8)$$



**Figura 4:** Primeiro instante de tempo de retorno  $\tau_0$  em função das condições iniciais de posição  $x_0$  e velocidade  $v_0$  para  $\omega_0 = 1$  rad/s e (a)  $\alpha = 0,1$ , (b)  $\alpha = 0,5$  e (c)  $\alpha = 0,9$ .

O primeiro instante de tempo de retorno ( $\tau_0$ ) é então obtido quando  $n = 0$  e pode ser observado na Figura 4 para os casos (a)  $\alpha = 0,1$ , (b)  $\alpha = 0,5$  e (c)  $\alpha = 0,9$  com  $\omega_0 = 1$  rad/s.

A superfície  $\tau_0(x_0, v_0)$  é similar a Figura 3a se  $\alpha = 0,1$  (Figura 4a). Para este valor de amortecimento,  $\tau_0 > 0$  aproximadamente para todas as situações em que o vetor velocidade inicial aponta se afastando de  $x = 0$ . Caso contrário, o intervalo de tempo entre o instante de retorno anterior e  $t = 0$  é menor que  $t = 0$  e o próximo instante de retorno, fazendo com que o primeiro instante de retorno se torne negativo.

Observando todos os casos, o valor máximo (mínimo) de  $\tau_0$  é maior (menor) para valores maiores de amortecimento  $\alpha$ , como era de se esperar.

A superfície  $\tau_0(x_0, v_0)$  possui descontinuidade nos pontos que satisfazem a condição  $\frac{v_0}{x_0} = -\frac{\omega_0}{\alpha}$ , situação esta que pode ser vista observando a equação (8). Sendo assim, para valores crescentes de  $\alpha$ , a superfície parece gradualmente rotacionar no plano  $x_0 v_0$ . Este resultado sugere a gradual antecipação do ponto de retorno, até que em  $\alpha \rightarrow 1$  a rotação é de  $+\frac{\pi}{4}$ . Neste

limite, se  $\omega_0 = 1$  rad/s, a descontinuidade da curva localiza-se na bissetriz que corta o segundo e o quarto quadrante do plano  $x_0 v_0$ .

Note pela equação (8) que se  $x_0 = 0$ ,  $\tau_0 = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)$ , independente da velocidade inicial  $v_0$ , e nos limites  $\tau_0(\alpha \rightarrow 0) = \frac{\pi}{2\omega_0}$  e  $\tau_0(\alpha \rightarrow 1) = \frac{1}{\omega_0}$ , o que mostra o quanto o amortecimento pode diminuir o tempo de retorno. Também se  $v_0 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$ , como era de se esperar, pois  $x_0 = 0$  é propriamente o ponto de retorno.

O intervalo de tempo entre dois pontos de retorno consecutivos é dado por

$$\Delta\tau = \tau_{n+1} - \tau_n = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{9}$$

Este intervalo de tempo não depende da posição ou velocidade inicial da partícula, informações estas impostas por um agente externo, mas sim da frequência natural do sistema  $\omega_0$  e do parâmetro de amortecimento  $\alpha$ , informações naturais do sistema. Este resultado é similar ao que se observa no MHS e pode ser entendido como a conservação do intervalo de tempo de um semi-período [8, 9]. Logo, período é sempre uma quantidade intrínseca, mesmo em sistemas dissipativos.

Os pontos de retorno definem as amplitudes do movimento dadas por  $x(t = \tau_n)$ . Usando as equações (3) e (8) temos que

$$x(\tau_n) = (-1)^n A \sqrt{1-\alpha^2} e^{-\beta\tau_n} \tag{10}$$

e então o primeiro ponto de retorno é dado por

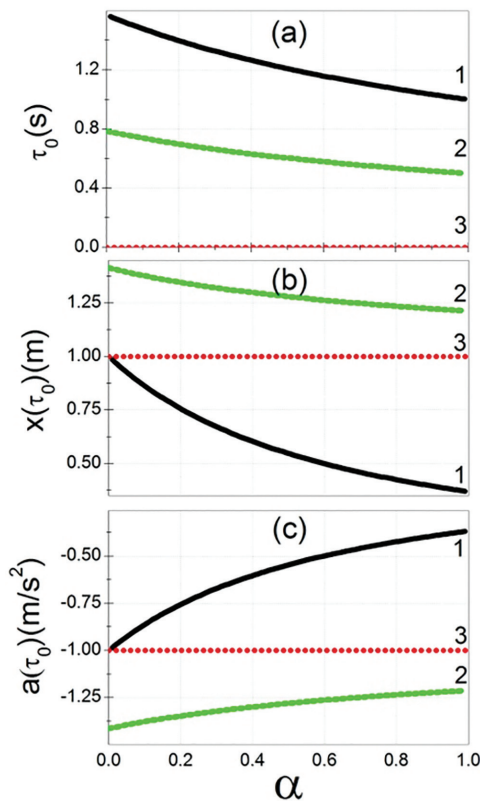
$$x(\tau_0) = A \sqrt{1-\alpha^2} e^{-\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tan^{-1}\left(\frac{v_0 \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha v_0 + x_0 \omega_0}\right)\right)}. \tag{11}$$

A equação (11) mostra que a primeira posição de retorno possui dependência exponencial com o parâmetro de amortecimento  $\alpha$  [9]. Nesta condição, se  $x_0 = 0$ ,  $x(\tau_0) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)\right)}$ , com limites  $x(\tau_0) = \frac{v_0}{\omega_0}$  para  $\alpha \rightarrow 0$  e  $x(\tau_0) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-1}$  para  $\alpha \rightarrow 1$ . Também, se  $v_0 = 0$ , a posição  $x(\tau_0)$  é o próprio valor inicial  $x_0$ , como era de se esperar. A superfície  $x(\tau_0)$  em função de  $x_0$  e  $v_0$  tem qualitativamente comportamento similar à Figura 1a se  $\alpha = 0,1$ . Para valores crescentes de  $\alpha$ , porém, a dependência com  $A$  e com o tempo de retorno no termo exponencial induz que  $x(\tau_0)$  tenha, além da descontinuidade em  $x_0 = 0$ , uma descontinuidade nos pontos em que  $\frac{v_0}{x_0} = -\frac{\omega_0}{\alpha}$ . Desta maneira, a antecipação do ponto de retorno sugerida pela superfície  $\tau_0(x_0, v_0)$  é confirmada.

As acelerações nos pontos de retorno são obtidas usando  $\ddot{x}(\tau_n) = a(\tau_n)$ . No primeiro instante de retorno, a aceleração é dada por  $a(\tau_0) = -\omega_0^2 x(\tau_0)$  e logo

$$\ddot{x}(\tau_0) = -A \omega_0^2 \sqrt{1-\alpha^2} e^{-\alpha \omega_0 \tau_0}. \tag{12}$$

O comportamento da superfície  $\ddot{x}(\tau_0)(x_0, v_0)$  é similar ao comportamento da superfície  $-A(x_0, v_0)$  se  $\alpha = 0,1$



**Figura 5:** (a) Primeiro instante de tempo de retorno  $\tau_0$ , (b) primeira posição de retorno  $x(\tau_0)$  e (c) aceleração no primeiro instante de tempo de retorno  $a(\tau_0)$  para  $\omega_0 = 1$  rad/s e  $x_0 = 0$  m,  $v_0 = 1$  m/s (curvas 1),  $x_0 = 1$  m,  $v_0 = 1$  m/s (curvas 2), e  $x_0 = 1$  m,  $v_0 = 0$  m/s (curvas 3).

(Figura 1a). Para valores de amortecimento mais alto, como acontece com  $x(\tau_0)$ , a curva possui descontinuidades nos pontos em que  $x_0 = 0$  e  $\frac{v_0}{x_0} = -\frac{\omega_0}{\alpha}$ .

A dependência de  $\tau_0$ ,  $x(\tau_0)$  e  $a(\tau_0)$  com o parâmetro de amortecimento  $\alpha$  é representado na Figura 5, se  $\omega_0 = 1$  rad/s, para os casos particulares  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 1$  m/s (curvas 1),  $x_0 = 1$  m e  $v_0 = 1$  m/s (curvas 2), e  $x_0 = 1$  m e  $v_0 = 0$  m/s (curvas 3). Como esperado, se  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 1$  m/s (curvas 1),  $\tau_0$  e  $x(\tau_0)$  caem com o aumento de  $\alpha$ , e  $a(\tau_0)$  aumenta. Se  $v_0 = 0$  m/s e  $x_0 = 1$  m (curvas 3), todos os valores são constantes já que a posição de retorno é a própria posição inicial da partícula. E se  $x_0 = 1$  m e  $v_0 = 1$  m/s (curvas 2) as curvas assumem um comportamento intermediário entre as curvas 1 e 3.

A distância e a razão entre pontos de retorno consecutivos bem como a comparação do  $n$ -ésimo ponto de retorno com o primeiro ponto de retorno pode ser respectivamente expressos por

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(\tau_{n+1}) - x(\tau_n) = -x(\tau_n)(1 + e^{-\frac{\alpha\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}}) \\ &= -x(\tau_n)(1 + e^{-\eta}), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{x(\tau_{n+1})}{x(\tau_n)} = -e^{-\eta}, \tag{14}$$

se  $\eta = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$  e

$$x(\tau_n) = (-1)^n x(\tau_0) e^{-n\eta}. \tag{15}$$

A quantidade dada pela equação (14) é chamada de decremento de movimento e  $\eta$  o decremento logarítmico [10]. O decremento de movimento mede o quanto o sistema é amortecido pela força viscosa. Como no subamortecimento as amplitudes das oscilações caem exponencialmente, o termo logarítmico destaca apenas o expoente. Note que a definição de decremento logarítmico  $\eta$  pode ser usada para reescrever diversos resultados anteriores, como as equações (5), (16) e (11). Ela também pode ser usada em diversos resultados que serão mostrados mais adiante neste trabalho.

### 2.3. Velocidade máxima

Usando a equação (3), a aceleração  $\ddot{x}$  é definida por

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = A[(\beta^2 - \omega_1^2)\cos\phi + 2\beta\omega_1\sin\phi]e^{-\beta t}. \tag{16}$$

Escrever  $\ddot{x}$  através de uma expressão similar ao deslocamento (equação (3)), diferente apenas por uma fase, mostra que as duas quantidades estão fora de fase uma em relação à outra por  $\tan^{-1}(\frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{1-2\alpha^2})$ . No primeiro instante de tempo ( $t = 0 = t_0$ ),  $\ddot{x}(t_0) = a_0 = -2\alpha\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0$ . Assim, para sistemas amortecidos ( $0 < \alpha < 1$ ) a informação da posição inicial da partícula  $x_0$  não é suficiente para determinar a aceleração inicial  $a_0$ , como acontece no MHS, exceto nos casos em que a partícula é liberada do repouso ( $v_0 = 0$ ), pois nesta condição  $a_0 = -x_0\omega_0^2$ .

Os instantes de tempo de velocidade máxima  $\tau_n^*$  são obtidos quando  $\ddot{x} = 0$ . Usando a equação (16) esta condição é satisfeita por

$$\tau_n^* = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}} \left[ \delta + \tan^{-1} \left( \frac{1-2\alpha^2}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \right) + n\pi \right] \tag{17}$$

ou

$$\begin{aligned} \tau_n^* &= \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}} \\ &\times \left[ \tan^{-1} \left( \frac{(\omega_0 + 2\alpha\frac{v_0}{x_0})\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha\omega_0 + \frac{v_0}{x_0}(2\alpha^2 - 1)} \right) + n\pi \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

O primeiro instante de tempo de velocidade máxima ( $\tau_0^*$ ) é então obtido quando  $n = 0$ . A equação (18) mostra que a superfície  $\tau_0^*(x_0, v_0)$  tem descontinuidade quando a condição  $\frac{v_0}{x_0} = \alpha\frac{\omega_0}{(1-2\alpha^2)}$  é satisfeita. Se  $x_0 = 0$ ,  $\tau_0^* = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}} \tan^{-1}(\frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha^2-1})$  de modo que  $\tau_0^* = 0$  para os casos limites  $\alpha \rightarrow 0$  (no MHS) e  $\alpha \rightarrow 1$ . Se  $v_0 = 0$ ,  $\tau_0^* = \tau_0(x_0 = 0) = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}} \tan^{-1}(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}) = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}} \tan^{-1}(\frac{\pi}{\eta})$ . Das equações (8) e (18) nota-se que

o intervalo de tempo entre instantes sucessivos de velocidade máxima é igual ao intervalo de tempo entre instantes de retorno sucessivos de modo que

$$\begin{aligned} \tau_n^* - \tau_n &= \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\pi}{\eta} \right) \\ &= \tau_0^*(v_0 = 0) = \tau_0(x_0 = 0). \end{aligned} \tag{19}$$

Ou seja, o intervalo de tempo entre a velocidade nula e a velocidade máxima não depende das condições iniciais. Mais, o intervalo de tempo necessário para que uma partícula partindo do repouso chegue à velocidade máxima (intervalo de tempo de aproximação  $\Delta t_{apr} = \tau_n^* - \tau_n = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \right)$ ) é menor (se  $0 < \alpha < 1$ ) ou igual (se  $\alpha = 0$ ) que o intervalo de tempo necessário para a partícula retornar a velocidade nula (intervalo de tempo de afastamento,  $\Delta t_{afas} = \tau_{n+1} - \tau_n^* = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} - \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \right)$  [9].

As posições da partícula com velocidade máxima  $x(\tau_n^*)$  são obtidas usando as equações (3) e (17)

$$x(\tau_n^*) = A(-1)^n 2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} e^{-\alpha \omega_0 \tau_n^*}, \tag{20}$$

mostrando claramente que se  $\alpha \neq 0$  esta posição cai exponencialmente e localiza-se sempre antes da origem relativa a última posição de retorno.

Devido a igualdade entre os intervalos de tempo de retorno sucessivos e velocidades máximas sucessivas, a dependência de  $\tau_{n+1}^*$  com  $\tau_n^*$  e a razão  $\frac{x(\tau_{n+1}^*)}{x(\tau_n^*)}$  são iguais as equações (9) e (14), respectivamente. Também, a relação  $\Delta x^* = x(\tau_{n+1}^*) - x(\tau_n^*)$  e a relação entre  $x(\tau_n^*)$  e  $x(\tau_0^*)$  são similares às equações (13) e (15), respectivamente.

Por fim, o valor extremo de velocidade no primeiro instante  $\tau_0^*$  pode ser obtido por

$$\dot{x}(\tau_0^*) = -\sqrt{v_0^2 + 2\alpha \omega_0 v_0 x_0 + x_0^2 \omega_0^2} e^{-\alpha \omega_0 \tau_0^*}, \tag{21}$$

o que sugere uma queda exponencial com relação ao caso MHS.

Note que se  $v_0 = 0$ ,  $\dot{x}(\tau_0^*) = -\omega_0 x_0 e^{-\alpha \omega_0 \tau_0^*}$  e se  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}(\tau_0^*) = -v_0 e^{-\alpha \omega_0 \tau_0^*}$ .

#### 2.4. Energia e potência do sistema

Usando as equações (3) e (6), os valores instantâneos da energia cinética  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ , energia potencial  $U = \frac{1}{2} k x^2$  e da energia mecânica  $E_{mec} = U + E_c$  são obtidos. Os valores destas energias instantâneas são dados por

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 [\alpha^2 \cos(2\phi) + \sin^2 \phi \\ &\quad + \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \sin(2\phi)] e^{-2\alpha \omega_0 t}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$U = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2 \phi e^{-2\alpha \omega_0 t}, \tag{23}$$

se a constante elástica  $k = m \omega_0^2$  e

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 [1 + \alpha^2 \cos(2\phi) \\ &\quad + \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \sin(2\phi)] e^{-2\alpha \omega_0 t}. \end{aligned} \tag{24}$$

Note que na expressão (24) a energia mecânica instantânea em  $t = 0$  para os casos particulares em que  $x_0 = 0$  ou  $v_0 = 0$  são respectivamente  $\frac{1}{2} m v_0^2$  e  $\frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2$ , como era esperado, pois são estas energias dadas por um agente externo.

Para valores de  $t \neq 0$  e  $\alpha \neq 0$ , a energia mecânica  $E_{mec}(t)$  é, em função do tempo, representada por um decaimento exponencial modulado por uma sucessão de vales de amplitude dependentes do amortecimento  $\alpha$  [11]. O gráfico  $E_{mec} x t$  tem derivada nula nos instantes de tempo de retorno da partícula e as menores derivadas nos instantes de tempo de velocidade máxima. Como a potência  $P = \frac{dE}{dt}$ , estes instantes correspondem respectivamente aos instantes de menor e maior perda de energia [9, 12].

Os valores médios das energias podem ser calculados da média temporal dos seus valores instantâneos. Se a média for feita entre pontos de retorno consecutivos

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{\tau_{n+1} - \tau_n} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} E(t) dt \tag{25}$$

e então

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \frac{(1 - \alpha^2)^{3/2}}{4\pi\alpha} (1 - e^{-2\eta}) e^{-2\alpha \omega_0 \tau_n}, \tag{26}$$

$$\langle U \rangle = \langle E_c \rangle (4\alpha^2 + 1) \tag{27}$$

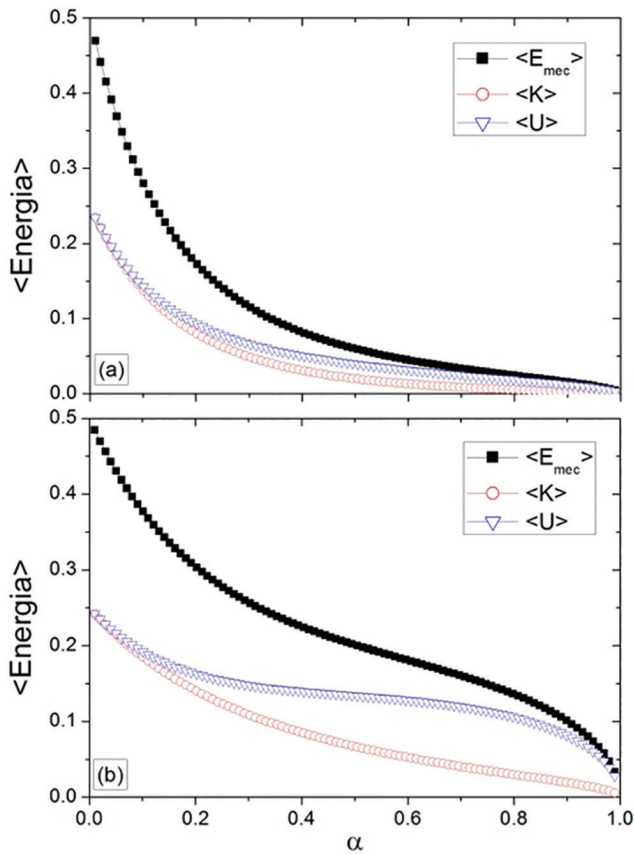
e

$$\langle E_{mec} \rangle = \langle E_c \rangle (4\alpha^2 + 2). \tag{28}$$

A Figura 6 mostra o comportamento da energia mecânica média  $\langle E_{mec} \rangle$ , energia cinética média  $\langle E_c \rangle$  e energia potencial média  $\langle U \rangle$  em função do parâmetro de amortecimento  $\alpha$  no primeiro instante de tempo de retorno ( $n = 0$ ) para os casos (a)  $x_0 = 0$  m,  $v_0 = 1$  m/s e (b)  $v_0 = 0$  m/s,  $x_0 = 1$  m, se a massa do corpo é  $m = 1$  kg e a frequência de oscilação natural  $\omega_0 = 1$  rad/s. Para o caso  $x_0 = 0$  m, as energias convergem para valores nulos mais rapidamente que no caso  $v_0 = 0$  m/s. Isto demonstra o efeito da força viscosa. Como o amortecimento é proporcional à velocidade, a perda da energia é maior nos casos em que a partícula já inicia em movimento do que nos casos em que a partícula inicia com velocidade nula (e energia total acumulada sob a forma de energia potencial).

As expressões (26), (27) e (28) não dependem explicitamente do tempo. A dependência temporal pode ser incluída usando a aproximação  $t \rightarrow \frac{\tau_n + \tau_{n+1}}{2}$ . Desta forma,

$$\langle E_c(t) \rangle = m A^2 \omega_0^2 \frac{(1 - \alpha^2)^{3/2}}{4\alpha\pi} \sinh(\eta) e^{-2\alpha \omega_0 t}, \tag{29}$$



**Figura 6:** Energias mecânica  $E_{mec}$ , cinética  $E_c$  e potencial  $U$  média para massa  $m = 1$  kg e frequência de oscilação natural  $\omega_0 = 1$  rad/s nos casos (a)  $x_0 = 0$  m,  $v_0 = 1$  m/s e (b)  $x_0 = 1$  m,  $v_0 = 0$  m/s.

com  $\langle U \rangle$  e  $\langle E_{mec} \rangle$  mantendo as relações (27) e (28).

A potência é obtida da expressão da energia mecânica ou mesmo observando que  $P = -b\dot{x}^2$ . A potência instantânea  $P(t)$  é dada por

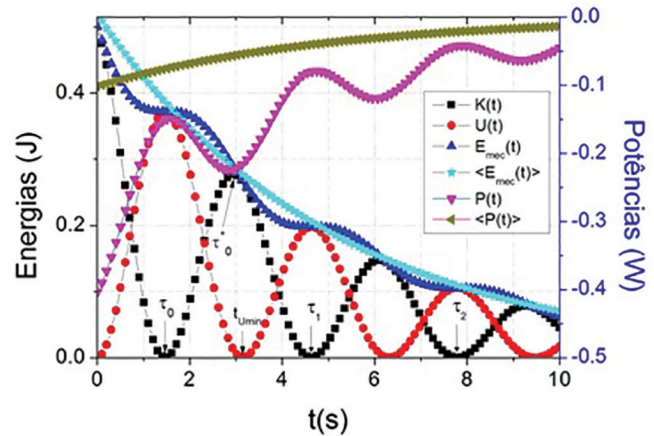
$$P(t) = -2m\alpha\omega_0^3 A^2 (\alpha \cos \phi + \sqrt{1 - \alpha^2} \sin \phi)^2 e^{-2\alpha\omega_0 t} \quad (30)$$

A equação (30) mostra que  $\frac{dP}{dt} = 0$  quando  $\frac{dE_c}{dt} = 0$  ( $E_c$  mínimo ou  $v = 0$  m/s e  $E_c$  máximo ou  $v$  máximo). Em  $t = 0$ , a potência instantânea é  $P(0) = -2m\alpha\omega_0 v_0^2$ , independentemente do valor de  $x_0$ . Como é de se esperar, a potência é nula sempre que não há amortecimento ( $\alpha = 0$ ).

A potência média obtida entre os primeiros instantes de retorno é dada por

$$\langle P(t) \rangle = mA^2\omega_0^3 (2\alpha^4 - \alpha^2 - 1) \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\pi} \sinh(\eta) e^{-2\alpha\omega_0 t} \quad (31)$$

Na Figura 7 podem-se comparar as energias instantâneas (potencial, cinética e mecânica), a energia mecânica média, a potência instantânea e a potência média para o caso  $\alpha = 0, 1$  e  $\omega_0 = 1$  rad/s. Observa-se que a energia potencial máxima  $U_{m\acute{a}x}$  corresponde à energia cinética mínima  $E_{c\acute{m}in}$ , no primeiro momento, no instante de



**Figura 7:** Energias cinética, potencial e mecânica instantânea, energia mecânica média, potências instantânea e média em função do tempo para  $\alpha = 0, 1$ . Em destaque, o primeiro  $\tau_0$ , segundo  $\tau_1$  e terceiro  $\tau_2$  instante de tempo de retorno, o primeiro instante de tempo de velocidade máxima  $\tau_0^*$  e o primeiro instante de tempo de energia potencial mínima  $t_{U\acute{m}in}$ .

tempo  $\tau_0$ . Mas a energia potencial mínima  $U_{m\acute{m}n}$ , no instante de tempo  $t_{U\acute{m}in}$ , não corresponde à energia cinética máxima  $E_{c\acute{m}áx}$ , no primeiro momento no instante de tempo  $\tau_0^*$ . Note também que o intervalo de tempo entre pontos de retorno ou de velocidade máxima é constante, como foi mostrado nas seções 2.2 e 2.3.

Em geral, pode-se demonstrar que o caso  $U_{m\acute{m}x}$  acontece no mesmo instante de tempo de  $E_{c\acute{m}in}$  ( $\frac{dP}{dt} = 0$ ), ou seja, nos instantes de retorno  $t = \tau_n$ . No segundo caso,  $E_{c\acute{m}áx}$  acontece nos instantes de tempo de velocidade máxima  $t = \tau_n^*$  e  $U_{m\acute{m}n}$  quando  $t = t_{U\acute{m}in} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} [\delta + (2n + 1) \frac{\pi}{2}]$ . Estas relações mostram então que  $U_{m\acute{m}n}$  e  $E_{c\acute{m}áx}$  acontecem nos mesmos instantes de tempo apenas no caso em que  $\alpha = 0$ . Ou seja, as posições de velocidade máxima diferenciam-se do ponto  $x = 0$  sempre que houver amortecimento ( $\alpha \neq 0$ ).

Por fim, pode-se definir o fator de qualidade ou o fator  $Q$  obtido por  $Q = 2\pi \frac{\langle E_{mec} \rangle}{\Delta \langle E_{mec} \rangle}$ . Se  $\Delta \langle E_{mec} \rangle = -(\tau_{n+1} - \tau_n) \frac{d \langle E_{mec} \rangle}{dt}$ , o fator  $Q$  é descrito por

$$Q = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} = \frac{\pi}{\eta} \quad (32)$$

onde  $\eta = \frac{1}{n} \log \frac{x(\tau_0)}{x(\tau_n)}$  é o logaritmo de decaimento definido na seção 2.2.

### 2.5. Distância total percorrida

Usando a equação (3), a distância total percorrida  $\Delta S$  pode ser definida por [13]

$$\Delta S = |\Delta S_1| + \sum_{i=2}^{\infty} |\Delta S_i| \quad (33)$$

onde

$$\Delta S_1 = Ae^{-\beta\tau_0} \cos(\omega_1\tau_0 - \delta) - A \cos \delta \quad (34)$$

é a distância entre o ponto inicial do movimento ( $\mathbf{x}_0$ ) e o primeiro ponto de retorno ( $\mathbf{x}(\tau_0)$ ) e

$$\Delta S_i = A[e^{-\beta\tau_{i-1}} \cos(\omega_1\tau_{i-1} - \delta) - e^{-\beta\tau_{i-2}} \times \cos(\omega_1\tau_{i-2} - \delta)] \quad (35)$$

são as próximas distâncias entre pontos de retorno subsequentes.

Baseado na equação (9),  $\omega_1\tau_{i-1} - \delta = \omega_1\tau_{i-2} + \pi - \delta$  e logo  $\cos(\omega_1\tau_{i-1} - \delta) = -\cos(\omega_1\tau_{i-2} - \delta)$ . Usando este resultado e a equação (6), a equação (35) pode ser reescrita por

$$\Delta S_i = -(-1)^{i-2} A\sqrt{1-\alpha^2} \left(1 + e^{-\frac{\beta\pi}{\omega_1}}\right) e^{-\beta\tau_{i-2}} \quad (36)$$

de modo que

$$\sum_{i=2}^{\infty} |\Delta S_i| = A\sqrt{1-\alpha^2} \left(1 + e^{-\frac{\beta\pi}{\omega_1}}\right) \sum_{i=2}^{\infty} e^{-\beta\tau_{i-2}}. \quad (37)$$

Na equação (37),

$$\sum_{i=2}^{\infty} e^{-\beta\tau_{i-2}} = e^{-\beta\tau_0} + e^{-\beta\tau_1} + \dots + e^{-\beta\tau_n}, \quad (38)$$

para  $n \rightarrow \infty$ . Usando a equação (9)

$$\sum_{i=2}^{\infty} e^{-\beta\tau_{i-2}} = e^{-\beta\tau_0} \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-\beta\pi/\omega_1})^i. \quad (39)$$

A soma do lado direito da equação (39) é uma série geométrica infinita, convergente, cujo resultado é dado por  $\frac{1}{1 - e^{-\beta\pi/\omega_1}}$ .

A equação (37) torna-se

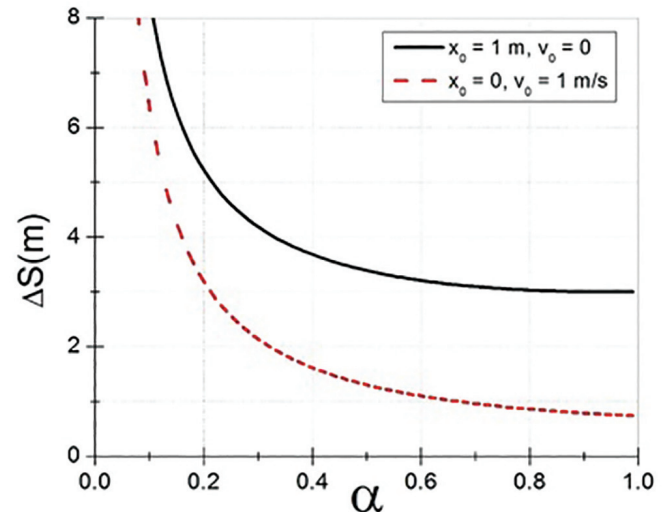
$$\sum_{i=2}^{\infty} |\Delta S_i| = A\sqrt{1-\alpha^2} \left(1 + e^{-\frac{\beta\pi}{\omega_1}}\right) e^{-\beta\tau_0} \times \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\pi/\omega_1}}\right). \quad (40)$$

Usando as equações (34) e (40) temos da equação (33), enfim:

$$\Delta S = x_0 + A\sqrt{1-\alpha^2} \left(1 + \frac{1}{\tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right) e^{-\beta\tau_0} \quad (41)$$

representada na Figura 8 se  $\omega_0 = 1$  rad/s para os casos  $x_0 = 0$  m,  $v_0 = 1$  m/s e  $x_0 = 1$  m,  $v_0 = 0$  m/s.

Na Figura 8, para todos os valores de parâmetro de amortecimento  $\alpha$ , a distância total percorrida por partículas que partem do repouso em  $x_0 = 1$  m é maior que a distância total percorrida nos casos em que a partícula parte na origem com velocidade  $v_0 = 1$  m/s. Também é fácil observar que se o amortecimento é mínimo ( $\alpha \rightarrow 0$ ) o sistema se comporta como harmônico simples e  $\Delta S \rightarrow \infty$ . Para  $0 < \alpha < 1$  a distância total percorrida é finita. E se o amortecimento é máximo ( $\alpha \rightarrow 1$ ),  $\Delta S = 2\frac{v_0}{\omega_0}e^{-1} = 2x(\tau_0)$  quando  $x_0 = 0$  m e  $\Delta S = 3x_0$  quando  $v_0 = 0$  m/s.



**Figura 8:** Distância total percorrida em função do parâmetro de amortecimento  $\alpha$  se  $\omega_0 = 1$  rad/s para os casos  $x_0 = 1$  m,  $v_0 = 0$  m/s e  $v_0 = 0$  m/s,  $x_0 = 1$  m.

### 3. Conclusões

O problema do movimento harmônico subamortecido com força viscosa dependente da velocidade da partícula foi revisitado. Quantidades usualmente não abordadas em livros textos foram obtidas, como constantes da expressão do deslocamento, instantes de tempos de retorno, posições de retorno, intervalo de tempo de retorno, velocidades máximas, instantes de tempo e posições de velocidade máxima, intervalos de tempo de velocidade máxima, energias cinética, potencial e mecânica nas formas instantâneas e médias, potências média e instantânea e a distância total percorrida. Em todas as grandezas obtidas foi explicitada a dependência com as condições iniciais do problema (posição  $x_0$  e velocidade inicial  $v_0$ ) e o parâmetro de amortecimento  $\alpha$ .

Alguns resultados podem ser destacados: a amplitude de movimento  $A$  independe da frequência natural  $\omega_0$  (e, logo, das características da massa e da mola em um sistema massa-mola) se o objeto é largado do repouso ( $v_0 = 0$ ). Nestas condições,  $A$  tem dependência linear com a posição inicial  $x_0$ . O intervalo de tempo entre pontos de retorno ou pontos de velocidade máxima são iguais (meio período) e independe do tempo e das condições iniciais  $x_0$  e  $v_0$ , similar ao que acontece no MHS. Em cada meio período, o intervalo de tempo de afastamento à origem é maior, quando  $\alpha > 0$ , ou igual, quando  $\alpha = 0$ , ao intervalo de tempo de aproximação. Deste modo, apesar de constar com dois intervalos de tempo diferentes, o semi-período é uma quantidade constante, intrínseca, mesmo em sistemas dissipativos.

A existência de amortecimento no sistema impede que a aceleração inicial da partícula seja determinada apenas usando a posição inicial, como no MHS, sendo necessárias posição e velocidade inicial, bem como  $\alpha$ .



Apesar da coincidência no instante de tempo entre energia cinética mínima e energia potencial máxima, existe uma diferença nos instantes de tempo de energia cinética máxima (velocidade máxima) e energia potencial mínima (posição  $x = 0$ ), fruto da antecipação do local de maior velocidade em relação à origem que pode ser determinada em função das condições iniciais e do amortecimento. A antecipação deste ponto resulta na descontinuidade de algumas grandezas estudadas em condições específicas, como nos instantes e nas posições de retorno  $\tau_0$  e  $x(\tau_0)$ .

O estado de movimento da partícula no instante inicial influencia na dependência das energias e da distância total percorrida com relação ao parâmetro de amortecimento. Em particular, partículas que iniciam em movimento ( $v_0 \neq 0$ ) possuem decaimento mais abrupto com relação àquelas que iniciam em repouso.

Os resultados obtidos neste artigo podem ser reproduzidos experimentalmente utilizando artefatos simples cujos modelos se assemelham ao movimento amortecido proporcional à velocidade, como pêndulos [14], sistema massa-mola [15] e trilhos de ar [16]. Por exemplo, a amplitude de movimento pode ser obtida para o casos simples de massa largada inicialmente do repouso. Os instantes de tempo e posições de retorno e de velocidade máxima podem ser obtidos por vídeo análise utilizando até mesmo celulares [17].

## Referências

- [1] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Edgard Blucher, São Paulo, 2002), v. 2, 4 ed.
- [2] S.T. Thornton e J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Cengage Learning, São Paulo, 2011).
- [3] J. Lenz, *Physics Education* **14**, 45 (1979).
- [4] G.D. Quiroga e P.A. Ospina-Henao, *European Journal of Physics* **38**, 065005 (2017).
- [5] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, Bristol, 2007), v. 1, 2 ed.
- [6] D. Morin, *Introduction to Classical Mechanics* (Cambridge University Press, New York, 2007), v. 1, 2 ed.
- [7] M. Hazavy, *Classical and Quantum Dissipative Systems* (Imperial College Press, London, 2005), v. 1, 1 ed.
- [8] D.J. Inman, *Engineering Vibrations* (Pearson, New Jersey, 2014), v. 1, 4 ed.
- [9] T. Corridoni, M. D'Anne e H. Tuchs, *The Physics Teacher* **52**, 88 (2014).
- [10] P. Hinrichsen, *The Physics Teacher* **57**, 250 (2019).
- [11] E.A. Karlow, *American Journal of Physics* **62**, 634 (1994).
- [12] Y. Kraftmakher, *European Journal of Physics* **39**, 567 (2009).
- [13] E.M. Diniz, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, 0195 (2020).
- [14] M.I. González e A. Bol, *European Journal of Physics* **27**, 257 (2006).
- [15] B. Lakhiani e H. Yadav, *Procedia Engineering* **173**, 1808 (2017).
- [16] J.C. Castro-Palacio, L. Velázquez-Abad, M.H. Giménez e J.A. Monsoriu, *American Journal of Physics* **81**, 472 (2013).
- [17] V.L.B. de Jesus e D.G.G. Sasaki, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **36**, 3503 (2014).