As Equações de Hamilton sem Transformação de Legendre

Hamilton Equations dispensing with Legendre Transformation

G.F. Leal Ferreira

guilherm@if.sc.usp.br

Instituto de Física de São Carlos, USP

CP 369, 13560-970, São Carlos, SP

Recebido em 10 de janeiro de 2001. Aceito em 05 de fevereiro de 2001

Maxwell, preparando sua abordagem dinâmica ao Eletromagnetismo (Treatise, Vol. II, Part IV, Cap.VI) alcança, no capítulo anterior, as equações de Hamilton pelo método das impulsões, que ele atribui a Thomson e Tait. O estado de movimento do sistema é dado em termos das coordenadas generalizadas e dos seus momentos, estes sendo vistos como resultado de impulsões convenientemente aplicadas a partir do repouso e da configuração atual do sistema. Esta abordagem é bem mais física do que a bem rápida baseada na transformação de Legendre e permite ver as equações de Hamilton como prescrevendo as mudanças temporais entre as grandezas de posição e de momento - entendidas como impulsos das forças aplicadas - e não como em Lagrange em que só grandezas associadas às massas, posição e velocidade, aparecem.

Maxwell, preparing his dynamical approach to the Electromagnetism (Treatise, Vol. II, Parte IV, Cap.VI), reaches in the previous chapter the Hamilton equations by the impulsive method, attributed by him to Thompson and Tait. The state of motion of the system is given in terms of the generalized coordinates and their momenta, these seen as a result of impulsive forces conveniently applied from rest and from the actual configuration of the system. This approach is much more physical than the one provided by the very rapid one through Legendre transformation and has the merit of allowing us to see the Hamilton equations as prescribing the mutual changes of positions and momenta - let them be understood as impulses of the applied forces - while in Lagrange's method deals only with quantities associated to the masses, position and velocities.

I Introdução

A passagem da formulação de Lagrange à de Hamilton é, nos dias de hoje, realizada através de transformações de Legendre. Da lagrangeana, expressa em termos das posições q_i e suas velocidades $\dot{q}_i$, constroi-se a função H, contendo a mesma informação, mas expressa em função dos q_i e dos p_i, definidos como $\partial L/\partial\dot{q}_i$. É um caminho rápido, mas que dificilmente consegue dar conteudo físico aos momentos p_i e às próprias equações de Hamilton que resultam da transformação. Maxwell, no seu *Treatise* [1], preparando sua *Dynamical Theory of Electromagnetism,* que aparece no capítulo 6° da Parte IV do Vol. II, apresenta tratamento, que atribui a Thomson e Tait, em que a energia cinética, inicialmente expressa em termos dos q_i e $\dot{q}_i$, é agora expressa em termos dos q_i e p_i, estes sendo definidos como os momentos resultantes de impulsões realizadas a partir de cada configuração q_i, do repouso ao estado atual do sistema, com as velocidades $\dot{q}_i$. É o que reproduzimos a seguir, com poucas modificações e alguns comentários adicionais. De passagem mencionamos que em sua teoria dinâmica os circuitos elétricos em interação são considerados como um sistema descrito por coordenadas de posição e suas velocidades, enquanto as correntes são descritas por velocidades 'elétricas' cujas posições são ignoráveis.

II Os momentos como impulsões

Sejam as equações de Lagrange para as coordenadas generalizadas i do sistema

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T_L}{\partial q}=Q_i \qquad (1)$$

em que a energia cinética T, escrita como T_L, significa a expressão de T em termos das variáveis lagrangeanas

q_i e $\dot{q}_i$. Q_i é a força generalizada correspondente à coordenada q_i e dada em termos das forças $\vec{F}_j$ aplicadas às j partículas do sistema, com posição $\vec{r}_j$, como

$$Q_i = \sum \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}. \qquad (2)$$

Quando for evidente a que índice o somatório se refere, ele não será exibido.

A energia cinética é, em geral, uma função quadrática das velocidades

$$T_L = \frac{1}{2} \sum a_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \qquad (3)$$

em que os coeficientes $a_{i,j}$ são funções das posições q's e satisfazem a relação $a_{i,j}(q) = a_{j,i}(q)$. Dada uma configuração do sistema, isto é, dadas as coordenadas q_i, qualquer estado de movimento do mesmo, isto é, qualquer conjunto de valores de velocidades $\dot{q}_i$, pode ser alcançado através de determinadas impulsões (impulsos instantâneos) [2]) $\vec{I}_j$ aplicadas às partículas a partir do repouso, naquela configuração. Os valores de $\dot{q}_i$ caracterizam, para cada configuração q_i, um conjunto de impulsões, que levariam o sistema do repouso àquele estado de movimento. Consideremos as impulsões $\vec{I}_j$ perpetradas no tempo t, ou melhor, entre t_- e t_+,

$$\vec{I}_j = \int_{t_-}^{t_+} \vec{F}_j dt. \qquad (4)$$

Integrando no tempo a Eq.(1) e tendo em conta a Eq.(4) temos

$$\frac{\partial T_L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j \vec{I}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + \sum_j \left(\frac{\partial a_{i,j}(q)}{\partial q_i} \right) \int_{t_-}^{t_+} \dot{q}_i \dot{q}_j dt \ . \qquad (5)$$

Vê-se que a contribuição da integral se anula porque, por exemplo, $\dot{q}_i dt = dq_i = 0$ e a variação máxima das velocidades, $\dot{q}_j$, é finita. Então, os $\partial T_L / \partial \dot{q}_i$ adquirem valores específicos p_i, os momentos, independentes agora da representação inicial lagrangeana. Temos então

$$p_i = \sum \vec{I}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum a_{i,j}(q) \dot{q}_j \ . \qquad (6)$$

Para um dado estado do sistema, q_i, $\dot{q}_i$, o emprego do 2º e do 3º termo da igualdade acima poderia ser usado para se calcular um conjunto de impulsões que levaria o sistema às velocidades desejadas, mas não necessitamos delas para determinar os p_i, dados pelo 1º e 3º termo da Eq.(6). Portanto, o conjunto dos p_i podem ser usados alternativamente aos $\dot{q}_i$ e a Eq.(6) indica como fazê-lo, isto é, invertendo-a com

$$\dot{q}_i = \sum b_{i,j} p_j \quad \text{com} \quad b_{i,j} = b_{j,i}. \qquad (7)$$

Embora as impulsões tenham sido usadas para caracterizar fisicamente os momentos p_i, e possam ser usadas livremente em deduções (veja, por exemplo, a obtenção da expressão da energia cinética na seção III), os momentos podem agora ser usados como variáveis contínuas no tempo. A substituição dos $\dot{q}_i$ pelos p_j com a Eq.(7) na Eq.(3) forneceria a energia cinética T_H em que ela é expressa em termos dos q_i e p_i. Note-se que T_H, em vez de expressar-se só através de grandezas associadas às partículas q_i e $\dot{q}_i$, usa as variáveis p_i associadas às forças, ou aos seus impulsos e as equações de Hamilton vão dizer como se dão as mudanças recíprocas.

III Obtenção da relação $\partial T_H / \partial p_i = \dot{q}_i$, precursora de $\partial H / \partial p_i = \dot{q}_i$

Com a representação T_H, estados com os mesmos q_i mas com variados p_i podem ser vistos como resultantes de aplicações de impulsões de magnitudes diferentes. Se a partir da mesma configuração dois conjuntos de impulsões, p_i e $p_i + dp_i$, são aplicados a partir do repouso, a diferença de energia cinética alcançada é claramente dada por

$$dT = \sum \frac{\partial T_H}{\partial p_i} dp_i. \qquad (8)$$

já que as posições não mudam. Vamos mostrar que dT também pode ser calculado como

$$dT = \sum \dot{q}_i dp_i \qquad (9)$$

e, então, concluiremos das Eqs.(8) e (9) que $\dot{q}_i = \partial T_H / \partial p_i$.

Para isto, vamos calcular primeiro a energia cinética comunicada nas impulsões que levam do repouso aos momentos p_i através do trabalho W realizado. Este vale

$$W = \int_{t_-}^{t_+} \sum_j \vec{F}_j \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dt = \int_{t_-}^{t_+} \sum_j \vec{F}_j \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \dot{q}_i dt \qquad (10)$$

que podemos escrever como

$$W = \sum_{i,j} \int_{t_-}^{t_+} \dot{q}_i \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dt = \sum_{i,j} \vec{I}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \bar{\dot{q}}_i, \qquad (11)$$

em que $\bar{\dot{q}}_i$ é a média das velocidades durante o impulso e que no caso presente é a metade da velocidade final $\dot{q}_i$. Pela Eq.(11) a energia cinética é então

$$T = W = \frac{1}{2} \sum p_i \dot{q}_i, \qquad (12)$$

expressão que, em vista das razões já apresentadas, é válida em geral, isto é, para qualquer tipo de movimento. Agora, das Eqs.(6) e (7), podemos concluir que, em vista da simetria dos coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$, temos

$$\sum p_i d\dot{q}_i = \sum \dot{q}_i dp_i. \qquad (13)$$

Retornando às impulsões p_i e $p_i + dp_i$, nas quais as velocidades passam de $\dot{q}_i$ a $\dot{q}_i + d\dot{q}_i$, tira-se das Eqs.(12) e (13) que

$$dT = \sum \dot{q}_i dp_i, \tag{14}$$

que comparada à Eq.(8) leva a

$$\frac{\partial T_H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \ , \tag{15}$$

que, praticamente, é uma das Equações de Hamilton.

IV Obtenção da outra equação de Hamilton, $\partial H/\partial q_i = -\dot{p}_i$

Seguindo [1], lembra-se primeiro que $dp = \dot{p}dt$ e que $dq = \dot{q}dt$ e usando a Eq.(15) temos que

$$\frac{\partial T_H}{\partial p_i} dp_i = \dot{q}_i \dot{p}_i dt = \dot{p}_i dq_i \ . \tag{16}$$

Como

$$dT = dT_H = \sum \left(\frac{\partial T_H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial T_H}{\partial q_i} dq_i \right) \ , \tag{17}$$

segue da Eq.(16) que

$$dT = dT_H = \sum \left(\dot{p}_i + \frac{\partial T_H}{\partial q_i} \right) dq_i \ . \tag{18}$$

Supondo que o sistema seja conservativo e que, assim, o trabalho elementar das forças dW_c se expressa através de uma energia potencial $U(q)$,

$$dW_c = -\sum \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} dq_i \ , \tag{19}$$

podemos igualar dT a dW_c, Eq.(19), e obter

$$dT_H = dT = dW_c = -\sum \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} dq_i$$

$$= \sum \left(\dot{p}_i + \frac{\partial T_H}{\partial q_i} \right) dq_i, \tag{20}$$

e sendo os dq_i independentes

$$\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} = \frac{\partial (T_H + U)}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \tag{21}$$

em que se definiu a hamiltoniana $H(q,p)$, reconhecida como a energia total do sistema. Como o potencial não depende das velocidades, a Eq.(15) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial H(q,p)}{\partial \dot{p}_i} = \dot{q}_i \tag{22}$$

que é a outra equação de Hamilton.

V Conclusões

Estamos agora convencidos de que na Mecânica de Hamilton, as forças, através de seus impulsos, tornam-se atores principais e não mero coadjuvantes como na de Lagrange. Sabemos também que o movimento contínuo de um sistema pode ser estudado como criado do repouso, na configuração atual, por impulsões, fornecendo um meio alternativo de abordagem.

Agradecimentos

O autor agradece a bolsa de produtividade ao CNPq.

References

[1] J. Clerk Maxwell, *A treatise on Electricity and Magnetism,* Vol.2, Dover Public., Nova York, 1954, Parte IV, Cap. V.

[2] S. W. McCuskey, *An Introduction to Advanced Dynamics,* Addison-Wesley Publ. Co., Reading, 1959, Cap. 2.