Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 45, e20230095 (2023)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0095

Artigos Gerais

Função exponencial generalizada complexa para argumento real

Complex generalized exponential function for real argument

Paulo Sérgio Adami[*1,2], Suzielli Martins Mendonça[2], Olavo Henrique Menin[1], Alexandre Henrique de Martini[3], Alexandre Souto Martinez[2]

[1]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Sertãozinho, 14269-163, Sertãozinho, SP, Brasil.
[2]Universidade de São Paulo, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, 14040-901, Ribeirão Preto, SP, Brasil.
[3]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus São João da Boa Vista, 13871-298, São João da Boa Vista, SP, Brasil.

Recebido em 10 de abril de 2023. Aceito em 18 de maio de 2023.

Desde que introduzidas por Tsallis no final dos anos oitenta, as funções generalizadas têm sido amplamente estudadas e utilizadas em diferentes áreas do conhecimento. No entanto, a falta de analiticidade no plano complexo dessas funções tem sido um obstáculo para expandir sua aplicabilidade. Neste contexto, apresentamos aqui uma breve revisão sobre as funções logaritmo e exponencial generalizadas e propomos uma generalização para a segunda que a torna analítica no plano complexo. Essa nova generalização abre possibilidades para novas aplicações e ampliações dessa teoria.
Palavras-chave: Função exponencial generalizada no plano complexo, Função logaritmo generalizada, Analiticidade no plano complexo, Resolução de equações cúbicas.

Since their introduction by Tsallis in the late 1980s, generalized functions have been widely studied and used in different areas of knowledge. However, the non-analyticity in the complex plane of these functions has been an obstacle to expand their applicability. In this context, we present here a brief review of the generalized logarithm and exponential functions and propose a generalization for the latter that makes it analytic in the complex plane. This new generalization opens possibilities for new applications and extensions of this theory.
Keywords: Generalized exponential function in complex plane, Generalized logarithm function, Analytic exponential function in complex plane, Solution of cubic equations.

1. Introdução

A generalização de funções matemáticas produz famílias de funções que possuem características e propriedades comuns, ampliando seu campo de aplicação e possibilitando avanços e simplificações nos mais variados contextos. Em 1988, C. Tsallis generalizou a função exponencial no contexto da mecânica estatística para considerar situações que não podiam ser tratadas pela formulação tradicional de Boltzmann-Gibbs, como em sistemas com tamanho finito ou com potenciais de longo alcance, por exemplo [1]. Em 1994, ele apresentou a generalização da função logaritmo, e de sua inversa, a função exponencial, para se ter uma descrição mais concisa da mecânica estatística não-extensiva e de modo similar a de Boltzmann-Gibbs [2].

A aplicabilidade das funções logaritmo e exponencial generalizadas se estenderam além da mecânica estatística não-extensiva para as mais diversas áreas, como na modelagem da dinâmica de populações [3, 4], na econofísica [5, 6], na resolução de problemas inversos [7, 8], além de contribuir para a simplificação de manipulações algébricas. No entanto, a função exponencial generalizada pode assumir valores complexos e foi conveniente defina-la como sendo nula nessas regiões. Esse procedimento pode ser interessante para descrever mudanças de regimes, como exemplo a transição para extinção em sistemas ecológicos [4].

Nesse contexto, apresentamos aqui uma nova formulação da função exponencial para argumentos reais que a torna analítica no plano complexo [9]. Mostramos como as soluções de equações polinomiais podem ser expressas em função dessa exponencial generalizada, possibilitando a aplicação de nossa proposta. Para tal, fazemos inicialmente uma breve revisão sobre a formulação de Arruda et al. [10] e González [11] das funções logaritmo e exponencial generalizadas que, diferentemente da proposta original de Tsallis [1], é baseada em argumentos puramente geométricos. Adicionalmente,

*Endereço de correspondência: adami.paulo@ifsp.edu.br

descrevemos suas derivadas sucessivas e expansões em séries de potência (série de Taylor).

Além das possibilidades de aplicação de tais funções em diferentes áreas de pesquisa, seu ensino pode abrir oportunidades de aprendizagens significativas para os estudantes do ensino superior. De fato, parte das dificuldades apresentadas pelos alunos está ligada à falta de conhecimentos nem sempre adquiridos na Educação Básica, como o de resolver problemas, validar soluções, generalizar ideias, abstrair, compreender e manipular representações matemáticas [12].

O restante do presente trabalho está organizado da seguinte maneira: na Seção 2, apresentamos uma breve revisão sobre as premissas da generalização das funções logaritmo e exponencial baseada em argumentos geométricos. Em seguida, nas Seções 3 e 4, apresentamos as definições das funções logaritmo e exponencial generalizadas [10, 11], respectivamente, bem como algumas de suas propriedades, derivadas e integrais e expansões em série de potências. Na Seção 5, expandimos o escopo da função exponencial generalizada para o plano complexo [9]. Na Seção 6, aplicamos nossa proposta escrevendo as soluções das equações polinomiais de segundo e terceiro graus em termos de exponenciais generalizadas, permitindo o calculo de raízes reais e complexas. Finalmente, na Seção 7, concluímos e mostramos as perspectivas para a continuidade dos estudos apresentados.

2. Caminhos para Generalização

A generalização da função logaritmo proposta por Tsallis [1] baseia-se em argumentos da termo-estatística não extensiva. Aqui, apresentamos uma generalização equivalente [10, 11], mas que é baseada em argumentos puramente geométricos. Antes disso, no entanto, vamos fazer uma breve recapitulação sobre as funções logaritmo natural e exponencial tradicionais [13, 14].

Dado um número $t \in \mathbb{R}_+^*$, seu logaritmo na base e, com $e = 2,71828\ldots$ sendo o número de Euler, é definido por

$$\ln(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\,dx, \tag{1}$$

que pode ser interpretado como sendo a área sob a hipérbole $1/x$ no intervalo $x \in [1, t]$, tal que para $0 < t < 1$, $\ln(t) < 0$, para $t = 1$, $\ln(t) = 0$ e para $t > 1$, $\ln(t) > 0$. Têm-se que $\ln(e) = 1$ e, portanto, e é o limite superior da integral dada pela equação (1) que fornece uma área unitária sob a hipérbole $y = 1/x$, ou seja, $\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$. O número e, por outro lado, é a base da função exponencial natural, que pode ser definida por

$$e^t = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \tag{2}$$

e cuja propriedade fundamental é ter sua derivada igual a própria função, ou seja, $de^t/dt = e^t$.

Após essa recapitulação, passemos para os fundamentos da generalização geométrica [10, 11]. Para tanto,

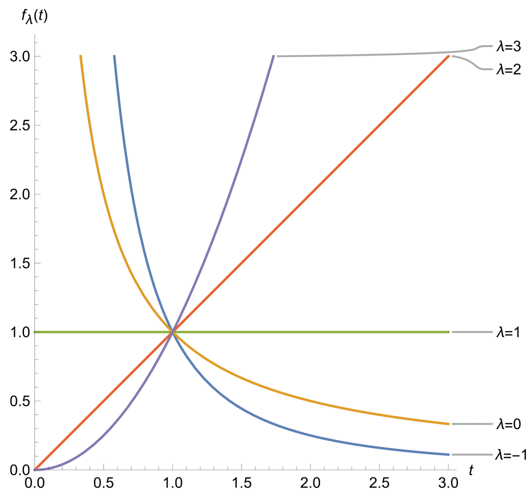

Figura 1: Família de funções $f_\lambda(t)$ para valores inteiros de $-3 \leq \lambda \leq 3$. Note que $f_\lambda(t)$ tem comportamento hiperbólico para $\lambda < 1$, de lei de potência para $\lambda > 1$ e uma função constante para $\lambda = 1$.

considere a família de funções $f_\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$, dada por

$$f_\lambda(t) = \frac{1}{t^{1-\lambda}}, \tag{3}$$

cujo comportamento para alguns valores de λ é mostrado na Figura 1. Para $\lambda > 1$, obtém-se curvas que seguem leis de potência, enquanto que para $\lambda < 1$, hipérboles. Já para $\lambda = 0$, obtém-se a hipérbole $1/x$ presente na equação (1).

A família de funções dada pela equação (3) abre caminho para a generalização da função logaritmo, que será discutida na próxima seção.

3. Função Logaritmo Generalizado

A generalização da função logaritmo pela via geométrica [10, 11] apoia-se em um raciocínio análogo ao usado para a função logaritmo natural tradicional. No entanto, ao invés da hipérbole tradicional $1/x$, como na equação (1), utiliza-se a família de hipérboles giradas em torno do ponto $(1, 1)$, dadas pelas funções da equação (3). Define-se, assim, a função logaritmo generalizada por

$$\ln_\lambda(t) = \int_1^t f_\lambda(t')dt' = \lim_{\lambda'\to\lambda} \frac{t^{\lambda'} - 1}{\lambda'}, \tag{4}$$

com $t \in \mathbb{R}_+^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Uma definição similar pode ser encontrada no sétimo capítulo do trabalho de J. Naudts [15].

Desse modo, obtém-se uma generalização a partir de argumentos geométricos [11, 16] na qual, a partir das áreas determinadas sob cada curva $f_\lambda(t)$, determina-se um logaritmo generalizado com parâmetro λ (destaca-se que λ não é a base do logaritmo). Particularmente para

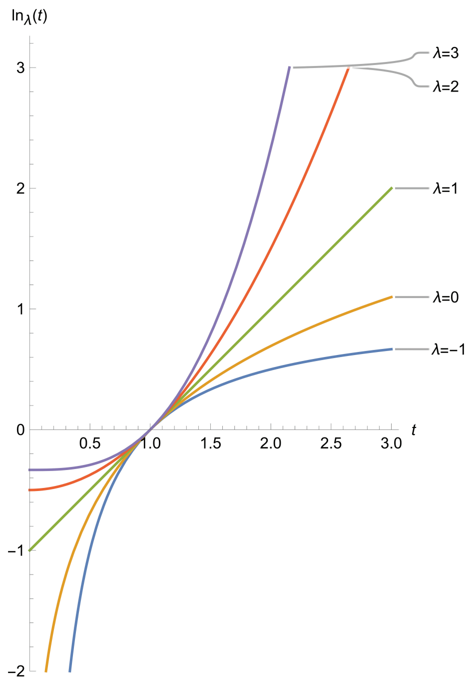

Figura 2: Função logaritmo generalizado $\ln_\lambda(t)$ para os valores de λ iguais a $-1, 0, 1, 2$ e 3. Curvas mantém importantes características da função $\ln(t)$ tradicional, tais como, ser estritamente negativa para $0 < t < 1$, nula em $t = 1$ e positiva para $t > 1$.

$\lambda = 0$, recupera-se a função logaritmo original dada pela equação (1). O comportamento da função $\ln_\lambda(t)$ para alguns valores de λ é mostrado na Figura 2.

Pode-se verificar que muitas características e propriedades da função $\ln(t)$ original também estão presentes na generalização, como o fato de todas as funções se anularem para $t = 1$, serem positivas para $t > 1$ e negativas no intervalo $0 < t < 1$. A partir da definição dada pela equação (4), a área sob a curva da função $f_\lambda(t) = 1/t^{1-\lambda}$ no intervalo $[1, t]$ equivale numericamente a $\ln_\lambda(t)$. Já a área sob a mesma curva no intervalo $[1/t, 1], t > 1$, corresponde a $-\ln_\lambda(1/t)$. De fato,

$$\int_{1/t}^{1} \frac{1}{t'^{1-(-\lambda)}} dt' = \lim_{\lambda' \to \lambda} \frac{t^{-\lambda'} - 1}{-\lambda'} = \ln_{-\lambda}(t)$$

$$= -\frac{t^{-\lambda} - 1}{\lambda} = -\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda} - 1}{\lambda} = -\ln_\lambda\left(\frac{1}{t}\right). \quad (5)$$

Outro exemplo de propriedade pode ser observado tomando-se uma deformação $\alpha \neq 0$, tal que

$$\ln_\lambda(t^\alpha) = \frac{(t^\alpha)^\lambda - 1}{\lambda} = \alpha \left[\frac{t^{\alpha\lambda} - 1}{\alpha\lambda}\right] = \alpha \ln_{\alpha\lambda}(t). \quad (6)$$

Para $\alpha = -1$, especificamente, obtém-se $\ln_\lambda(t^{-1}) = -\ln_{-\lambda}(t)$. Para $\lambda = 0$ e α arbitrário, recupera-se a propriedade $\ln(t^\alpha) = \alpha \ln(t)$. Como consequência, tem-se

$$\ln_\lambda(t) + \ln_\lambda(1/t) = \frac{\lambda}{t^\lambda} [\ln_\lambda(t)]^2 . \quad (7)$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\ln_\lambda(t) + \ln_\lambda(1/t) \\ &\quad = \ln_\lambda(t) - \ln_{-\lambda}(t) = \frac{t^\lambda - 1}{\lambda} - \frac{t^{-\lambda} - 1}{-\lambda} \\ &\quad = \frac{t^{2\lambda} - 2t^\lambda + 1}{\lambda} = \frac{t^{2\lambda} - 2t^\lambda + 1}{\lambda} \frac{\lambda}{t^\lambda} \frac{t^\lambda}{\lambda} \\ &\quad = \left(\frac{t^\lambda - 1}{\lambda}\right)^2 \frac{\lambda}{t^\lambda} = [\ln_\lambda(t)]^2 \frac{\lambda}{t^\lambda}. \end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$, obtém-se o conhecido resultado $\ln(t) + \ln(1/t) = 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$, da função logaritmo tradicional.

Outra importante propriedade da função loga-ritmo generalizada está diretamente relacionada com a sua derivada. A partir da equação (3) e do teorema fundamental do cálculo, temos

$$\frac{d}{dt} \ln_\lambda(t) = t^{\lambda - 1} = f_\lambda(t), \quad (8)$$

de modo que, para $\lambda = 0$, obtém-se $d \ln_0(t)/dt = t^{-1}$, a conhecida derivada do logaritmo natural. Podemos ainda expandir este raciocínio para derivadas sucessivas de ordem superior para esta generalização, o que resulta em

$$\frac{d^n}{dt^n} \ln_\lambda(t) = \frac{(\lambda - 1)!}{[\lambda - (n+1)]!} t^{\lambda - n}. \quad (9)$$

A partir daí, podemos escrever a expansão em séries de potências (expansão de Taylor), de grande importância em diversos campos de estudo da física. Especificamente, expandindo o logaritmo generalizado em torno de $t = 1$, temos

$$\begin{aligned} \ln_\lambda(t) = &\ \ln_\lambda(1) + \frac{d}{dt} \ln_\lambda(1)(t-1) \\ &+ \frac{d^2}{dt^2} \ln_\lambda(1) \frac{(t-1)^2}{2!} + \frac{d^3}{dt^3} \ln_\lambda(1) \frac{(t-1)^3}{3!} + \ldots \\ = &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \ln_\lambda(1) \frac{(t-1)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (10)$$

Este polinômio, desenvolvido até a terceira ordem, resulta em

$$\begin{aligned} \ln_\lambda(t) = &\ \frac{1}{2}(\lambda + 1)(t - 1) + \frac{1}{2}(\lambda - 1)(\lambda - 2)(t - 1)^2 \\ &+ \frac{1}{6}(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(t - 1)^3 + \mathcal{O}(t^4), \end{aligned} \quad (11)$$

de onde se pode notar que $\ln_\lambda(1) = 0$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. Isso reforça a robustez dessa generalização e mostra uma importante propriedade da função usual preservada.

Após examinar as propriedades de derivação, é natural estudar a integração da função logaritmo generalizada, que resulta em

$$\int \ln_\lambda(t)dt = \frac{t}{1+\lambda}[\ln_\lambda(t) - 1] + c, \tag{12}$$

em que c é uma constante real. Novamente, quando $\lambda = 0$, reobtemos $t[\ln(t) - 1] + c$, a integral da função $\ln(t)$ convencional. Maiores detalhes sobre o cálculo diferencial e integral das funções generalizadas podem ser obtidas no Apêndice A.

Porém, nem todas as propriedades da função logaritmo original podem ser recuperadas diretamente com as operações de adição e multiplicação usuais. Uma importante propriedade que não temos diretamente é a relação que envolve a soma de logaritmos com o logaritmo do produto, já que $\ln_\lambda(a) + \ln_\lambda(b) \neq \ln_\lambda(ab)$. Desse modo surge a necessidade de outros operadores binários que tornem algumas propriedades possíveis e mantenham a validade das mesmas para o caso tradicional. A seguir, mostramos operadores apresentados por Borges [17] e Nivanen [18] que buscam validar estas operações. Informações complementares sobre estes operadores poderão ser consultadas no Apêndice B.

Inciamos com o operador denominado "soma generalizada" [17, 18], definida como

$$a \oplus_\lambda b = a + b + \lambda ab. \tag{13}$$

Este operador retoma a soma habitual quando $\lambda = 0$ e mantém válidas algumas importantes propriedades da adição usual, como a comutatividade, associatividade, elemento neutro e elemento inverso. Desse modo, passa a ter efetividade a propriedade

$$\ln_\lambda(a) \oplus_\lambda \ln_\lambda(b) = \ln_\lambda(ab). \tag{14}$$

Note que para $\lambda = 0$, retomamos a propriedade do logaritmo usual. Porém este operador não possui a propriedade distributiva em relação à multiplicação usual, o que implica a não obtenção de uma estrutura de anel e, consequentemente, dificulta a validação de outras propriedades importantes.

Assim, Borges [17] e Nivanen [18] apresentaram também um operador chamado produto generalizado,

$$a \otimes_\lambda b = (a^\lambda + b^\lambda - 1)^{1/\lambda}. \tag{15}$$

Este operador, quando $\lambda = 0$, retorna à multiplicação usual, além de possuir as propriedade de comutatividade, associatividade, elemento neutro unitário e elemento inverso. Porém, tem-se ainda um operador com restrições significativas, dentre as quais destaca-se a impossibilidade de validar a propriedade distributiva em relação à soma tradicional, uma vez que que $a \otimes_\lambda (b+c) \neq a \otimes_\lambda b + a \otimes_\lambda c$, e nem a soma generalizada, já que $a \otimes_\lambda (b \oplus_\lambda c) \neq (a \otimes_\lambda b) \oplus_\lambda (a \otimes_\lambda c)$, impedindo a criação de uma estrutura algébrica.

Uma outra proposta de generalização do produto, apresentada por Lobão [19] e utilizada por Kalogeropoulos [20, 21], é dada por

$$a \odot_\lambda b = \frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\frac{\ln[1+\lambda a]\cdot\ln[1+\lambda b]}{[\ln(1+\lambda)]^2}} - 1\right]. \tag{16}$$

Este operador atende à propriedade distributiva, criando uma estrutura algébrica de anel $(\mathbb{R}_\lambda, \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$ para qualquer λ [19, 20, 22]. Além disso, recupera o produto usual para $\lambda = 0$ e possui as propriedades da comutatividade, associatividade, elemento neutro e elemento inverso. Mesmo com os avanços desta proposta, ainda não se pode validar a relação entre a soma de logaritmos com o logaritmo do produto.

A estrutura $(\mathbb{R}, \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$ constitui um anel de integridade para qualquer $\lambda \neq 0$. Já para $\lambda = 0$ tem-se uma estrutura de corpo, pois nesse caso trata-se do conjunto dos números reais com as operações usuais de adição e multiplicação. Desse modo, abre-se a expectativa de validação de muitas propriedades inerentes a estes operadores e de ampliação dessas estruturas algébricas generalizadas.

Na sequência, apresentamos exemplos da aplicabilidade desses operadores generalizados também na função inversa à dos logaritmos generalizados, a função exponencial generalizada.

4. A Função Exponencial Generalizada

A função exponencial generalizada proposta por Tsallis [2] é definida como

$$e_\lambda(t) = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda' \to \lambda} (1+\lambda' t)^{1/\lambda'}, \text{ se } \lambda' t \geq -1 \\ 0, \text{ caso contrário}, \end{cases} \tag{17}$$

para $t, \lambda \in \mathbb{R}$. Esta é, de fato, a função inversa da função logaritmo generalizada, uma vez que, sendo esta última bijetora para cada valor de λ, é invertível e temos

$$\begin{aligned} \ln_\lambda[e_\lambda(t)] &= \frac{[e_\lambda(t)]^\lambda - 1}{\lambda} = \frac{[(1+\lambda t)^{1/\lambda}]^\lambda - 1}{\lambda} \\ &= \frac{[1+\lambda t - 1]}{\lambda} = t, \end{aligned} \tag{18}$$

bem como

$$e_\lambda[\ln_\lambda(t)] = [1 + \lambda \ln_\lambda(t)]^{1/\lambda} = (t^\lambda)^{1/\lambda} = t. \tag{19}$$

As curvas mostradas na Figura 3 representam a função exponencial generalizada para alguns valores de λ. Nessa generalização, o caso usual é resgatado para $\lambda = 0$. Também é possível observar que a definição de $e_\lambda(t)$ exige que $e_\lambda(t) = 0$ se, e somente se $\lambda t < -1$, o que a torna não bijetora na região nula, fato que pode trazer algumas limitações em determinadas aplicações. Apesar deste inconveniente, esta generalização cumpre importante papel ao preservar características fundamentais da função exponencial usual, como o fato de ser

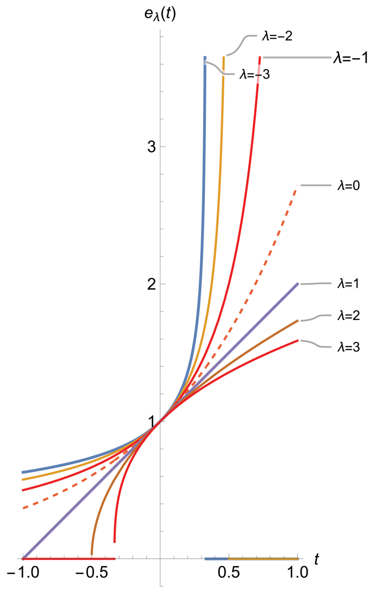

Figura 3: Função exponencial generalizada $e_\lambda(t)$ e seus comportamentos para valores inteiros de $-3 \leq \lambda \leq 3$. Nota-se que para $\lambda = -3$, $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$, obtém-se, respectivamente, uma função hiper exponencial com divergência em $t = 1/3$, a exponencial convencional, a função raiz quadrada e a função raiz cúbica.

estritamente não-negativa e $e_\lambda(t) = 1$ se, e somente se $t = 0$.

Notamos ainda nessa generalização outras propriedades importantes da função usual que são preservadas. Seja uma deformação $\alpha \neq 0$, tem-se

$$[e_\lambda(t)]^\alpha = (1 + \lambda t)^{\alpha/\lambda} = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\alpha t\right]^{\alpha/\lambda} = e_{\lambda/\alpha}(\alpha t). \tag{20}$$

Em particular, se $\alpha = -1$,

$$[e_\lambda(t)]^{-1} = e_{-\lambda}(-t), \tag{21}$$

de onde, para $\lambda = 0$, obtêm-se a conhecida propriedade $[e_0(t)]^{-1} = e_0(-t)$.

Outras propriedades da função exponencial tradicional, por outro lado, só são recuperadas na função generalizada a partir do uso de operadores generalizados. A propriedade $e^a e^b = e^{a+b}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, por exemplo, torna-se

$$e_\lambda(a)\lambda(b) = e_\lambda(a + b + \lambda ab) = e_\lambda(a \oplus_\lambda b), \tag{22}$$

em que $\oplus_\lambda$ é a soma generalizada apresentada na equação (13). Outra relação pode ser obtida mediante o uso do operador produto generalizado $\otimes_\lambda$ apresentado na equação (15),

$$e_\lambda(a + b) = e_\lambda(a) \otimes_\lambda e_\lambda(b). \tag{23}$$

Novamente, para $\lambda = 0$, reobtemos as propriedades usuais da função usual.

O fato de a função exponencial usual ter a sua derivada igual a si própria é fundamental para a solução de uma enormidade de problemas, propriedade altamente desejável em qualquer generalização. Para a generalização apresentada aqui, temos

$$\frac{d}{dt}e_\lambda(t) = \frac{1}{1 + \lambda t}[e_\lambda(t)], \tag{24}$$

o que, como esperado, recupera a propriedade original quando $\lambda = 0$. A partir da equação (24), por sua vez, pode-se mostrar que a exponencial generalizada é a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^{1-\lambda}, \tag{25}$$

que é frequentemente encontrada em dinâmica de populações e cinética química [23].

As derivadas sucessivas da função exponencial generalizada em relação à variável t são dadas por [9, 11]

$$\frac{d^n e_\lambda(t)}{dt^n} = \left[\prod_{k=0}^{n-1}(1 - k\lambda)\right] e_\lambda(t)^{1-n\lambda}. \tag{26}$$

Novamente, podemos aqui realizar a expansão da função exponencial generalizada em termos de series de potências (Taylor). Expandindo-a em torno de $t = 0$, temos

$$e_\lambda(t) = e_\lambda(0) + \frac{d}{dt}e_\lambda(0)(t) + \frac{d^2}{dt^2}e_\lambda(0)\frac{t^2}{2!} + \frac{d^3}{dt^3}e_\lambda(0)\frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n}{dt^n}e_\lambda(0)\frac{t^n}{n!}. \tag{27}$$

Desenvolvendo este polinômio, por exemplo, até a quarta ordem, resulta em

$$e_\lambda(t) = 1 + t + \frac{1}{2}(1-\lambda)t^2 + \frac{1}{6}(1-\lambda)(1-2\lambda)t^3 + \frac{1}{24}(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)t^4 + \mathcal{O}(t^5), \tag{28}$$

de onde se pode notar que $e_\lambda(0) = 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Também aqui ressaltamos a robustez dessa generalização, que preserva essa característica importante da função usual.

Quanto à sua integração, tem-se

$$\int e_\lambda(t)dt = \frac{1 + \lambda t}{1 + \lambda}\, e_\lambda(t) + c, \tag{29}$$

com c sendo uma constante real. Para $\lambda = 0$, reencontra-se o caso usual. Como já mencionado, maiores detalhes sobre o cálculo diferencial e integral das funções generalizadas são apresentados no Apêndice A.

Outro fato notável surge a partir da relação

$$(e^t)^{-1}\frac{d}{dt}e^t + e^t\frac{d}{dt}(e^t)^{-1} = 0, \tag{30}$$

uma vez que a mesma também é valida no contexto generalizado em relação a t,

$$[e_\lambda(t)]^{-1}\frac{d}{dt}e_\lambda(t) + e_\lambda(t)\frac{d}{dt}[e_\lambda(t)]^{-1} = 0, \tag{31}$$

e em relação a λ,

$$[e_\lambda(t)]^{-1}\frac{d}{d\lambda}e_\lambda(t)+e_\lambda(t)\frac{d}{d\lambda}[e_\lambda(t)]^{-1}=0. \tag{32}$$

Esta generalização desperta uma análise importante, pois o fato da relação dada pela equação (30) ter um núcleo da forma $(e^t)^\omega = (e^\omega)^t = e^{\omega t}$ faz com que tenhamos algumas possibilidades distintas em sua generalização. Ou seja, poderemos encontrar na forma generalizada expressões não necessariamente equivalentes como $e_\lambda(\omega t)$ ou $[e_\lambda(t)]^\omega$. Essa discussão no campo complexo ganha ainda mais contornos pois devemos analisar as possibilidades de generalização para $e^{i\omega t}$ como, por exemplo, $e_\lambda(i\omega t)$, $[e_\lambda(it)]^\omega$ ou $[e_\lambda(t)]^{i\omega}$ [24]. Uma possibilidade de generalização de funções circulares e hiperbólicas foi proposta por Borges [25] considerando $e_\lambda(i\omega t)$. Outra generalização destas funções foi proposta por Martini [9], considerando $[e_\lambda(t)]^{i\omega}$, o que permitiu a escrita da relação de Euler como

$$[e_\lambda(t)]^{i\omega}=\cos\left[\frac{\omega}{\lambda}\ln(1+\lambda t)\right]+i\sin\left[\frac{\omega}{\lambda}\ln(1+\lambda t)\right]. \tag{33}$$

Na seção seguinte, apresentamos uma nova proposta de generalização da função exponencial [9] que preserva as propriedades da generalização de Tsallis [1, 2], mas que garante a sua analiticidade no plano complexo.

5. A Função Exponencial Generalizada no Plano Complexo para Argumento Real

Para ampliar o escopo da função exponencial generalizada tornando-a analítica também no plano complexo, Martini [9] propôs a generalização

$$e_\lambda(t)=\lim_{\lambda'\to\lambda}|1+\lambda' t|^{1/\lambda'}\,e^{i\frac{\pi}{\lambda}[1-\theta(1+\lambda t)]}, \tag{34}$$

em que

$$\theta(1+\lambda t)=\begin{cases}1, & \text{se } 1+\lambda t\geq 0,\\ 0, & \text{se } 1+\lambda t<0.\end{cases} \tag{35}$$

Esta generalização mantém as propriedades e características da generalização anterior, além de tornar possível sua análise no plano complexo para qualquer $z\in\mathbb{C}$. De fato, a equação (34) é equivalente a

$$e_\lambda(t)=e^{\ln\left[\lim_{\lambda'\to\lambda}|1+\lambda' t|^{1/\lambda'}\right]}e^{i\frac{\pi}{\lambda}[1-\theta(1+\lambda t)]}=e^z \tag{36}$$

em que

$$z=\ln\left[\lim_{\lambda'\to\lambda}|1+\lambda' t|^{1/\lambda'}\right]+i\frac{\pi}{\lambda}[1-\theta(1+\lambda t)]. \tag{37}$$

Com isso, temos

$$\mathrm{Re}(z)=\ln\left(\lim_{\lambda'\to\lambda}|1+\lambda' t|^{1/\lambda'}\right) \tag{38}$$

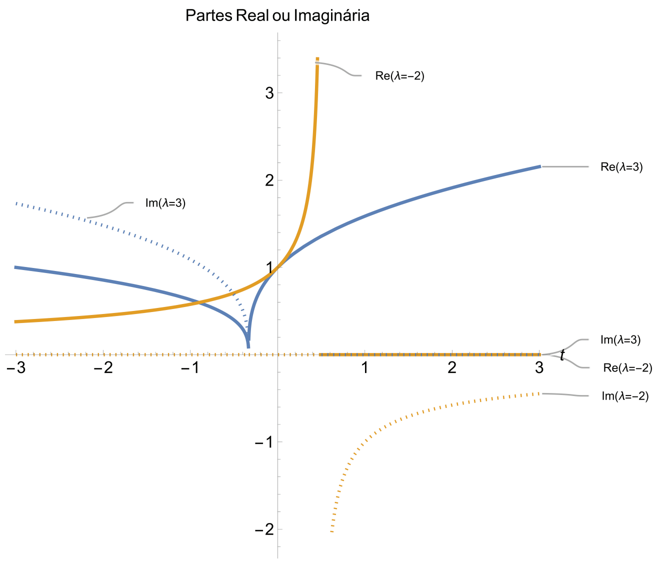

Figura 4: Representação da função exponencial generalizada para $\lambda=-2$ e $\lambda=3$. Para $t>1/2$, temos que $\mathrm{Re}(\lambda=-2)=0$ e $\mathrm{Im}(\lambda=-2)<0$. Para $t\leq 1/2$, $\mathrm{Re}(\lambda=-2)>0$ e $\mathrm{Im}(\lambda=-2)=0$. Para $t\geq 1/3$, temos que $\mathrm{Re}(\lambda=3)\geq 0$ e $\mathrm{Im}(\lambda=3)=0$. Para $t<1/3$, $\mathrm{Re}(\lambda=3)>0$ e $\mathrm{Im}(\lambda=3)>0$.

e

$$\mathrm{Im}(z)=\frac{\pi}{\lambda}[1-\theta(1+\lambda t)]. \tag{39}$$

As representações gráficas das partes reais e imaginárias da função exponencial generalizada no campo complexo para $\lambda=-2$ e $\lambda=3$, denotadas por $\mathrm{Re}(\lambda=-2)$, $\mathrm{Re}(\lambda=3)$, $\mathrm{Im}(\lambda=-2)$ e $\mathrm{Im}(\lambda=-2)$, respectivamente, podem ser vistas na Figura 4.

Esta ampliação na generalização da função exponencial para o campo complexo oferece um importante avanço no desenvolvimento de generalizações de outras estruturas, tais como funções trigonométricas, hiperbólicas ou log-periódicas e na transformada de Fourier, ampliando suas aplicabilidades e abrindo espaços para novas pesquisas. Uma maneira de explorar esta generalização, por exemplo, relaciona-se às soluções de equações polinomiais, que abordamos na próxima seção.

6. Resolução de Equações Polinomiais por Meio da Função Exponencial Generalizada no Plano Complexo

Como uma maneira de aplicar a nossa proposta de ampliação da função exponencial generalizada para o corpo dos complexos, nesta seção a utilizamos na obtenção das raízes reais e complexas de equações polinomiais.

6.1. Equação polinomial do primeiro grau

Seja uma equação polinomial do primeiro grau na variável x dada por $ax+b=0$, com $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, temos a raiz $\tilde{x} = -b/a$. Rescrevendo $\tilde{x}$ de modo conveniente, temos

$$\tilde{x} = 1 - \frac{a}{b} - 1 = -1 + e_1\left(-\frac{a}{b}\right). \tag{40}$$

Fazendo $\gamma = -a/b$, temos de modo mais simplificado $\tilde{x} = \gamma = e_1(\gamma - 1)$. Assim, a solução de uma equação do primeiro grau pode ser dada a partir de uma função exponencial generalizada com $\lambda = 1$.

6.2. Equação polinomial do segundo grau

Existem suspeitas de que as buscas por fórmulas resolutivas para o que chamamos modernamente de equação do segundo grau datem, aproximadamente, de 1700 a.C. [26]. Atualmente é bem difundida a fórmula herdada pelos hindus, muito conhecida no Brasil como *fórmula de Bhaskara*. Para uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$, temos que suas raízes são dadas por $\tilde{x}_\pm = \left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right]/2a$. Para equações incompletas, em que b ou c são nulos, pode-se evitar o uso desta fórmula resolutiva com simples manipulação algébrica.

Considerando uma equação quadrática completa e novamente reescrevendo $\tilde{x}_\pm$ de modo conveniente, temos

$$\tilde{x}_\pm = -\frac{b}{2a}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right]. \tag{41}$$

Fazendo $\alpha = b/2a$ e $\beta = -c/(\alpha b)$, têm-se

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_\pm &= -\alpha\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{c/a}{\alpha^2}}\right] \\
&= -\alpha\left\{1 \pm \left[1 + 2\left(-\frac{c/a}{2\alpha^2}\right)\right]^{1/2}\right\} \\
&= -\alpha\left[1 \pm e_2\left(-\frac{c}{\alpha b}\right)\right] \\
&= \alpha\left[-1 \pm e_2(\beta)\right].
\end{aligned} \tag{42}$$

Aqui, novamente encontramos as raízes da equação do segundo grau relacionadas à função exponencial generalizada. Para se obter as soluções complexas, além das reais, é imperativo usar a equação (34). Deste modo, valida-se numericamente nossa ampliação para o corpo dos complexos da função exponencial generalizada. Esse procedimento pode ser levado adiante para equações algébricas de ordem superiores.

6.3. Equações polinomiais do terceiro grau

Passemos agora a analisar a resolução da equação cúbica relacionada à parte real da função exponencial generalizada. Seguiremos nos baseando, em parte, no raciocínio do matemático italiano Niccolò Fontana (1500–1557 aprox.), conhecido como Tartaglia. Apesar de não ter sido o primeiro a obter um método para a resolução de equações cúbicas e nem a publicá-lo, devido à forma como o descobriu e todo o enredo que se desenrolou em torno dessa descoberta, Tartaglia teve seu nome definitivamente ligado a tal método [27].

Considere a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$. Inicialmente, podemos escrever a equação mais simplificadamente $x^3 + (b/a)x^2 + (c/a)x + (d/a) = 0$. Fazendo $\gamma = b/3a$ e $x = t - \gamma$, transformamos a equação inicial na equivalente em t,

$$t^3 + t\left(\frac{c}{a} - 3\gamma^2\right) + 2\gamma^3 - \frac{\gamma c}{a} + \frac{d}{a} = 0. \tag{43}$$

Tomando $p = c/a - 3\gamma^2$ e $q = 2\gamma^3 - \gamma c/a + d/a$, temos a equação simplificada

$$t^3 + pt + q = 0. \tag{44}$$

A partir desta equação, fazendo $t = u + v$, encontramos

$$u^3 + v^3 + q + (u + v)(p + 3uv) = 0, \tag{45}$$

cuja resolução pode ser transformada em um problema de soma e produto dado por

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27}, \end{cases} \tag{46}$$

o qual pode ser resolvido com o auxílio da equação quadrática na variável δ

$$\delta^2 + q\delta - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{47}$$

Assim, considerando novamente o caso em que a equação quadrática é completa, temos

$$\begin{aligned}
\delta_\pm = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} &= -\frac{q}{2} \pm \frac{q}{2}\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}} \\
&= -\frac{q}{2} \pm \frac{q}{2}\left[1 + 2\left(\frac{2p^3}{27q^2}\right)\right]^{1/2} \\
&= -\frac{q}{2}\left[1 \pm e_2\left(\frac{2p^3}{27q^2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{48}$$

A partir daqui, realizando as operações inversas, obtemos a solução na variável x. Considerando que $u = \sqrt[3]{\delta_+}$ e $v = \sqrt[3]{\delta_-}$, temos $t = u + v = \sqrt[3]{\delta_+} + \sqrt[3]{\delta_-}$. Com isso, as raízes da equação cúbica tem a forma

$$\tilde{x} = \sqrt[3]{\delta_+} + \sqrt[3]{\delta_-} - \gamma. \tag{49}$$

Porém, as expressões $\sqrt[3]{\delta_\pm}$ podem ser dadas como

$$\begin{aligned}
\alpha_\pm &= \left\{-\frac{q}{2}\left[1 \pm e_2\left(\frac{2p^3}{27q^2}\right)\right]\right\}^{1/3} \\
&= \left(-\frac{q}{2}\right)^{1/3} e_3\left[\pm\frac{1}{3}e_2\left(\frac{2p^3}{27q^2}\right)\right] \\
&= \sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\; e_3\left[\pm\frac{1}{3}e_2\left(\frac{2p^3}{27q^2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{50}$$

Considerando

$$\Delta_{\pm} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\, e_3 \left[\pm\frac{1}{3} e_2 \left(\frac{2p^3}{27q^2} \right) \right] \tag{51}$$

e sendo as raízes cúbicas complexas de -1 iguais a -1 e $\chi_{\pm} = (1 \pm i\sqrt{3})/2$, podemos denotar as raízes da equação cúbica como

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= -\gamma - \Delta_+ - \Delta_-, \\ \tilde{x}_2 &= -\gamma + \chi_+\Delta_+ + \chi_+\Delta_-, \\ \tilde{x}_3 &= -\gamma + \chi_-\Delta_+ + \chi_-\Delta_-. \end{aligned} \tag{52}$$

Aqui, novamente encontramos as raízes da equação do terceiro grau relacionadas à função exponencial generalizada. Para obter as soluções complexas, além das reais, é imperativo usar a equação (34). No Apêndice C, apresentamos códigos na linguagem Phyton [28] para a determinação das raízes dessas equações polinomiais de segundo e terceiro graus.

Deste modo, aplica-se numericamente nossa ampliação para o corpo dos complexos da função exponencial generalizada. As resoluções apresentadas até aqui também dão indícios de que o maior valor de λ da função exponencial generalizada que surge em cada caso está associado ao grau da equação polinomial em questão.

7. Discussão e Conclusão

As funções generalizadas têm sido amplamente estudadas e aplicadas nas mais diversas áreas do conhecimento. No entanto, algumas aplicações ainda não eram possíveis devido à falta de analiticidade de tais funções no plano complexo. O presente trabalho visa apresentar a proposta de funções generalizadas analíticas no plano complexo, bem como um estudo aprofundado acerca destas funções e a sua divulgação no meio científico.

A partir da generalização da função logaritmo, mostramos a generalização de sua inversa, a função exponencial generalizada, no campo real e posteriormente sua ampliação para o corpo complexo. Apresentamos ainda algumas propostas de operadores generalizados que permitem a aplicação destas funções generalizadas, validando algumas propriedades e operações, além de contribuírem para a construção de uma álgebra cada vez mais consistente e abrangente neste campo. Isto reforça a ideia de que as generalizações são importantes pois atendem às necessidades inerentes a seus contextos de criação, mas a partir delas novos campos de pesquisas surgem e outros contextos passam a ser contemplados e, dessa forma, podem contribuir sobremaneira com o desenvolvimento científico e acadêmico.

A novidade trazida por este trabalho, referente à expansão da função exponencial generalizada para o campo complexo, é um exemplo de uma grande abertura para novas descobertas nessa área, pois muitas outras estruturas importantes poderão também ter seus limites de aplicação ampliados, como por exemplo a transformada de Fourier, as funções trigonométricas, log-periódicas ou hiperbólicas ou ainda na reescritura do método de Análise Multifractal, onde ambas funções logaritmo e exponencial generalizadas são empregadas para escrever a função de flutuação do método em termos de uma média generalizada. Esta média é escrita como a inversão da média da transformada de Box-Cox de um determinado conjunto de dados, que ganha novas possibilidades com a analiticidade da função exponencial generalizada no campo complexo.

Mostramos ainda uma aplicação destas funções generalizadas na resolução de equações polinomiais de primeiro, segundo e terceiro graus, o que dá mostras do quanto se pode explorá-las para a simplificação e ampliação de aplicações de diversas estruturas algébricas.

Apêndices

Apêndice A: Derivação e integração das funções logaritmo e exponencial generalizadas

A derivada da função exponencial generalizada no campo real é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e_\lambda(t) &= \frac{d}{dt}(1+\lambda t)^{1/\lambda} = (1+\lambda t)^{(1-\lambda)/\lambda} \\ &= \frac{(1+\lambda t)^{1/\lambda}}{(1+\lambda t)} = \frac{1}{(1+\lambda t)}e_\lambda(t) = e_\lambda(t)^{(1-\lambda)}. \end{aligned} \tag{53}$$

A partir disto, podemos calcular as derivadas de ordem superior, como por exemplo

$$\frac{d^2 e_\lambda(t)}{dt^2} = (1-\lambda)e_\lambda(t)^{(1-2\lambda)}, \tag{54}$$

ou,

$$\frac{d^3 e_\lambda(t)}{dt^3} = (1-\lambda)(1-2\lambda)e_\lambda(t)^{(1-3\lambda)}. \tag{55}$$

Assim, as derivadas sucessivas da função exponencial generalizada em relação à variável t podem ser dadas por [9],

$$\frac{d^n e_\lambda(t)}{dt^n} = \left[\prod_{k=0}^{n-1} (1-k\lambda) \right] e_\lambda(t)^{(1-n\lambda)}. \tag{56}$$

De modo análogo ao que fizemos com as funções exponenciais generalizadas, podemos determinar as derivadas de ordem superior para a função logaritmo generalizada. Assim,

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln_\lambda(t) = (\lambda-1)t^{\lambda-2}, \tag{57}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\ln_\lambda(t) = (\lambda-2)(\lambda-1)t^{\lambda-3}, \tag{58}$$

$$\frac{d^4}{dt^4}\ln_\lambda(t) = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)t^{\lambda-4}, \tag{59}$$

e, as derivadas sucessivas da função logaritmo generalizada em relação à variável t podem ser dadas por

$$\frac{d^n}{dt^n}\ln_\lambda(t) = \frac{(\lambda-1)!}{[\lambda-(n+1)]!}t^{\lambda-n}. \tag{60}$$

A integração da função exponencial generalizada é dada por

$$\int e_\lambda(t)dt = \int (1+\lambda t)^{1/\lambda}dt, \tag{61}$$

que pela substituição $u = (1+\lambda t)$, temos

$$\frac{1}{\lambda}\int u^{1/\lambda}du = \frac{(1+\lambda t)}{(1+\lambda)}e_\lambda(t) + c, \forall c \in \mathbb{R}. \tag{62}$$

Note que, se $\lambda = 0$, retoma-se que a integral da exponencial convencional é a própria função acrescido de uma constante.

A integração da função logaritmo generalizada é dada por

$$\begin{aligned}\int \ln_\lambda(t)dt &= \int \frac{(t^\lambda-1)}{\lambda}dt\\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} - t\right] + c\\ &= \frac{t}{\lambda+1}\left[\frac{t^\lambda}{\lambda} - \frac{\lambda+1}{\lambda}\right] + c\\ &= \frac{t}{\lambda+1}\left[\frac{t^\lambda-1}{\lambda} - 1\right] + c\\ &= \frac{t}{\lambda+1}\left[\ln_\lambda(t) - 1\right] + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}\tag{63}$$

Apêndice B: Operadores generalizados

O operador binário denominado "soma generalizada" de Borges [17] e Nivanen [18] com a seguinte descrição

$$a \oplus_\lambda b = a + b + \lambda ab, \tag{64}$$

retoma a soma habitual quando $\lambda = 0$, ou seja, $a \oplus_0 b = a+b$ e mantém válida algumas importantes propriedades da soma comum:

1. Comutatividade: $a \oplus_\lambda b = b \oplus_\lambda a$;
2. Associatividade: $(a \oplus_\lambda b) \oplus_\lambda c = a \oplus_\lambda (b \oplus_\lambda c)$;
3. Zero como elemento neutro: $a \oplus_\lambda 0 = 0 \oplus_\lambda a = a$;
4. Elemento oposto: $-a/(1+\lambda a)$, já que $a \oplus_\lambda [-a/(1+\lambda a)] = 0$, $\forall \lambda, a \in \mathbb{R}$;

Como este operador não satisfaz a propriedade distributiva em relação à multiplicação tradicional, Borges [17] e Nivanen [18] apresentaram um outro operador denominado "produto generalizado".

$$a \otimes_\lambda b = (a^\lambda + b^\lambda - 1)^{1/\lambda}, \tag{65}$$

Este operador, quando $\lambda = 0$, retorna à multiplicação tradicional, ou seja, $a \otimes_0 b = ab$. Além disso, este operador possui as seguintes propriedades:

1. Comutatividade: $a \otimes_\lambda b = b \otimes_\lambda a$;
2. Associatividade: $(a \otimes_\lambda b) \otimes_\lambda c = a \otimes_\lambda (b \otimes_\lambda c)$;
3. Elemento Neutro unitário: $a \otimes_\lambda 1 = 1 \otimes_\lambda a = a$;
4. Elemento inverso: $a^{-1} = (2-a^\lambda)^{1/\lambda}$, já que $a \otimes_\lambda (2-a^\lambda)^{1/\lambda} = (2-a^\lambda)^{1/\lambda} \otimes_\lambda a = 1$.

Este operador apresenta um elemento inverso e um elemento neutro com restrições significativas e ainda não satisfaz a propriedade distributiva em relação à soma tradicional e tão pouco quanto à soma generalizada. Neste sentido, uma alternativa a essa generalização do produto foi apresentada por Lobão [19] e utilizada, mais tarde, por Kalogeropoulos [20, 21] dado por

$$a \odot_\lambda b = \frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\frac{\ln[1+\lambda a]\cdot\ln[1+\lambda b]}{[\ln(1+\lambda)]^2}} - 1\right]. \tag{66}$$

Esta nova generalização do produto atende à propriedade distributiva, criando uma estrutura algébrica ($\mathbb{R}_\lambda$, $\oplus_\lambda$, $\odot_\lambda$) que é, pelo menos, um anel de integridade para qualquer λ [19, 20, 22], além de possuir as seguintes propriedades:

1. Comutatividade: $a \odot_\lambda b = b \odot_\lambda a$;
2. Associatividade: $(a \odot_\lambda b) \odot_\lambda c = a \odot_\lambda (b \odot_\lambda c)$;
3. Elemento neutro unitário: $a \odot_\lambda 1 = 1 \odot_\lambda a = a$;
4. Elemento inverso dado por

$$a^{-1} = \frac{e^{\frac{[\ln(1+\lambda)]^2}{\ln(1+\lambda a)}} - 1}{\lambda}, \tag{67}$$

   já que $a \odot_\lambda a^{-1} = a^{-1} \odot_\lambda a = 1$.
5. Elemento nulo 0: $a \odot_\lambda 0 = 0 \odot_\lambda a = 0$, $\forall\, \lambda, a \in \mathbb{R}$.

Além disto, este operador generalizado é distributivo em relação à soma generalizada, ou seja, $a \odot_\lambda (b \oplus_\lambda c) = (a \odot_\lambda b) \oplus_\lambda (a \odot_\lambda c)$. Estas generalizações do produto, embora apresentem algumas limitações para características e propriedades desejáveis em relação às funções logaritmo e exponencial generalizadas, atenderam muito bem às necessidades nos contextos em que foram criadas.

Na generalização da soma observa-se que oposto de um elemento a é dado por $-a/(1+\lambda a)$, já que $a \oplus_\lambda [-a/(1+\lambda a)] = 0$. De forma simplificada pode-se escrever $a \oplus_\lambda (\ominus_\lambda a) = 0$ e definir o operador diferença generalizado como

$$a \ominus_\lambda b = \frac{a-b}{1+\lambda b}, \tag{68}$$

que quando $\lambda = 0$ retorna o operador diferença usual.

Muito interessante notar uma propriedade que surge a partir do operador diferença generalizado em relação aos logaritmos generalizados, que resgata a importante propriedade da função usual $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$. E temos, na versão generalizada

$$\ln_\lambda(a) \ominus_\lambda \ln_\lambda(b) = \ln_\lambda\left(\frac{a}{b}\right). \tag{69}$$

A partir da primeira generalização do produto podemos definir sua inversa, ou seja a divisão generalizada como

$$a \oslash_\lambda b = \left(a^\lambda - b^\lambda + 1\right)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{70}$$

Note que no limite de $\lambda \to 0$, temos a divisão convencional a/b. E com este novo operador podemos obter uma propriedade relevante dos logaritmos

$$\ln_\lambda(a \oslash_\lambda b) = \ln_\lambda(a) - \ln_\lambda(b), \tag{71}$$

que nos remete a $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ no limite de $\lambda \to 0$.

Em relação ao operador produto apresentado como alternativo ($\odot_\lambda$) na equação (66) a operação inversa é:

$$a \circledast_\lambda b = \frac{1}{\lambda}\left[(1+\lambda)^{\frac{\ln(1+\lambda a)}{\ln(1+\lambda b)}} - 1\right]. \tag{72}$$

Aqui também notamos características e propriedades importantes como o fato de, quando $\lambda = 0$ reobtermos a divisão tradicional, de não ser comutativo pois $a \circledast_\lambda b \neq b \circledast_\lambda a$ e nem associativo já que $(a \circledast_\lambda b) \circledast_\lambda c \neq a \circledast_\lambda (b \circledast_\lambda c)$. Nota-se, ainda, que a exemplo da divisão comum, $a \circledast_\lambda 1 = a$ e $1 \circledast_\lambda a$ é o elemento inverso do produto $\odot_\lambda$ da equação (66).

Concluímos que cada uma das generalizações contribuem de modo significativo aos contextos de suas criações com propriedades próprias e às vezes próximas entre si. Daí a necessidade de pesquisas nessas generalizações para aproximá-las às necessidades geradas em contextos diversos e para a contribuição da construção de uma estrutura algébrica de operadores generalizados cada vez mais ampla e, consequentemente, com mais aplicações.

Apêndice C: Códigos em Python para resolução de equações quadráticas e cúbicas

Para a implementação da generalização da função exponencial, utilizamos a linguagem de programação Python [28], como a seguir

```
import numpy as np
# Definindo a funcao exponencial generalizada
    em funcao do parametro de generalizacao
    lambda (l) e do conjunto de dados escolhido
def expd(q, t):
    # Numero pequeno em Python
    tiny = 10.*np.finfo(np.float64).eps
    # Tamanho do conjunto de dados
    N = np.size(t)
    # Inicializacao da parte real
    rpart = np.zeros(N)
    # Inicializacao da parte imaginaria
    ipart = np.zeros(N)
    aux = 1. + q*t
    # Inicio do calculo
    if aux >=0.:
       rpart = np.power((aux), 1/q)
       ipart = np.zeros(N)
       return rpart
    else:
       rpart = (np.power(np.absolute(aux), 1/q)
    )
       ipart = np.exp((np.pi*1j)/2.)
    # Fim do calculo com o resultado das partes
     imaginaria e real
    return rpart*ipart
```

Uma vez implementada a função $\text{expd}(q, t)$, podemos utilizá-la para calcular as raízes de equações quadráticas e cúbicas. A seguir apresentamos exemplos para uma equação quadrática de coeficientes $a = 1$, $b = 5$ e $c = 6$,

```
import numpy as np
# Define os coeficientes a, b e c
a = 1
b = 5
c = 6
# Calcula alpha e beta em termos dos
    coeficientes a, b e c
alpha = b/(2.*a)
beta = -c/(alpha*b)
# Calcula as raizes
raiz1 = alpha*(-1. + expd(2,beta))
raiz2 = alpha*(-1. - expd(2,beta))
# Mostra o resultado das raizes
print('Os coeficientes escolhidos foram {0},
    {1} e {2}'.format(a, b, c))
print('As raizes da equacao de grau 2 foram {0}
     e {1}'.format(raiz1, raiz2))
```

e, para uma cúbica de coeficientes $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = -27$:

```
import numpy as np
# Define os coeficientes a, b, c e d
a = 1
b = 0
c = 0
d = -27
z1 = 0.5 + (np.sqrt(3)/2)*1j
z2 = 0.5 - (np.sqrt(3)/2)*1j
# Calcula p, q, gamma e beta em termos dos
    coeficientes
gama = b/(3*a)
p = c/a - 3*np.power(gama,2)
q = 2*np.power(gama,3) -(gama*c)/a + d/a
beta = 2*np.power(p,3)/(27*np.power(q,2))
# Calcula as exponenciais
expo1 = expd(2,beta)
expo20 = expd(3,expo1/3)
expo21 = expd(3,expo1/-3)
# Calcula os deltas
delta1 = np.cbrt(q/2)*expo20
delta2 = np.cbrt(q/2)*expo21
# Calcula as raizes
raiz1 =-gama + z1*delta1 + z1*delta2
raiz2 =-gama + z2*delta1 + z2*delta2
raiz3 = -gama - delta1 - delta2
# Mostra o resultado das raizes
print('Os coeficientes escolhidos foram ', a, b
    , c,' e ',d)
print('As raizes da equacao de grau 3 foram
    {0}, {1} e {2}'.format(raiz1, raiz2, raiz3)
    )
```

Referências

[1] C. Tssalis, Journal of statistical physics **52**, 479 (1988).

[2] C. Tsallis, Química Nova **17**, 468 (1994).

[3] A.S. Martinez, R.S. González e A.L. Espíndola, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **388**, 2922 (2009).

[4] B.C.T. Cabella, A.S Martinez e F. Ribeiro, Physical Review E **83**, 061902 (2011).

[5] N. Destefano e A.S. Martinez, Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications **390**, 1763 (2011).

[6] L.S. dos Santos, N. Destefano e A.S. Martinez, Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications **490**, 250 (2018).

[7] O.H. Menin, A.S. Martinez e A.M. Costa, Applied Radiation and Isotopes **111**, 80 (2016).

[8] O.H. Menin e C.T. Bauch, Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications **490**, 1513 (2018).

[9] A.H. de Martini, *Analiticidade da função exponencial generalizada para argumentos complexos e suas implicações*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto (2020).

[10] T.J. Arruda, R.S. González, C.A.S. Terçariol e A.S. Martinez, Physics Letters A **372**, 2578 (2008).

[11] R.S. González, *Funções generalizadas, modelos de crescimento contínuos e discretos e caminhadas estocásticas em meios desordenados*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto (2011).

[12] W.J. Masola e N.S.G. Allevato, Revista Brasileira de Ensino Superior **1**, 64 (2016).

[13] G.B. Thomas, M.D. Weir, J. Hass e F.R. Giordano, *Cálculo* (Pearson Addison Wesley, São Paulo, 2009), v. 1.

[14] E.L. Lima, P.C.P. Carvalho, E. Wagner e A.C. Morgado *A Matemática do Ensino Médio* (Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2004), v. 1.

[15] J. Naudts, *Generalised thermostatistics* (Springer, Londres, 2011).

[16] R.S. González, *Difusão anômala: transição entre os regimes localizado e estendido na caminhada do turista unidimensional*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto (2006).

[17] E.P. Borges, Physica A: Statistical Mechanics And Its Applications **340**, 95 (2004).

[18] L. Nivanen, A. Le Méhauté e Q.A. Wang, Reports on mathematical physics **52**, 437 (2003).

[19] T.C.P. Lobão, P.G.S. Cardoso, S.T.R. Pinho e E.P. Borges, Brazilian Journal of Physics **39**, 402 (2009).

[20] N. Kalogeropoulos, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **391**, 3435 (2012).

[21] N. Kalogeropoulos, Modern Physics Letters B **32**, 1850149 (2018).

[22] N. Kalogeropoulos, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **391**, 1120 (2012).

[23] W.E. Boyce e R.C. DiPrima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno* (LTC, Rio de Janeiro, 2012), 10 ed.

[24] G.M. Nakamura, A.H. Martini e A.S. Martinez, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **524**, 106 (2019).

[25] E. Borges, Journal of Physics A: Mathematical and General **31**, 5281 (1998).

[26] W.C. Fragoso, Revista do Professor de Matemática **43**, 20 (2000).

[27] F.C.P. Milies, Revista do Professor de Matemática **25**, 15 (1994).

[28] G. Rossum, *The Python Language Reference Manual (version 2.5)*, disponível em: https://docs.python.org/release/2.5/ref/ref.html, acessado em 10/04/2023.