

Confecção de um modelo mecânico análogo para o estudo do Movimento Browniano e da Difusão Molecular

Confection of mechanical analog model for the study of Brownian motion and molecular diffusion

Enrique Arias^{*1}, Guilherme Morett¹

¹Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico, Nova Friburgo, RJ, Brasil.

Recebido em 14 de janeiro de 2023. Revisado em 01 de abril de 2023. Aceito em 12 de junho de 2023.

Neste artigo é descrita a montagem de um sistema mecânico que simula o processo de propagação estocástica de uma partícula browniana em um fluido. O sistema consta de um oscilador mecânico que agita constantemente um recipiente onde pequenas partículas de um “fluido” são depositadas e se mantêm em movimento. Dentro deste “fluido”, uma outra partícula browniana (maior) é inserida sobre a qual as pequenas partículas do fluido exercem forças estocásticas. O movimento em zigue-zague das partículas brownianas é analisado mediante a filmagem do movimento e pela utilização do software *Tracker* para o estudo das imagens. Os resultados denotam um excelente acordo entre as previsões da teoria do movimento browniano e o experimento proposto. A vantagem de induzir desta forma os conceitos do movimento browniano e da difusão molecular é que se pode observar ao olho nu este fenômeno acontecendo e sua visualização pode ajudar na melhor compreensão desses conceitos.

Palavras-chave: Movimento browniano, modelo mecânico análogo, processos estocásticos.

In this article we describe the setup of a mechanical system that simulate the stochastic propagation process of a brownian particle inside a fluid. Our system consist of a mechanical oscillator coupled to a recipient which is shacked constantly. Inside the recipient we deposit small “fluid particles” that remain in constant agitation. Inside this “fluid” we insert one bigger test Brownian particle (bigger than the fluid particles) over which the small fluid particles exert random stochastic forces. We analyze the zigzag movement of the Brownian particles by filming the motion and using the free software *Tracker* in order to realize the image analysis. Our results show an excellent qualitative agreement between the predictions of the brownian motion theory and our experimental results. The advantage of introducing in this way the concepts of brownian motion and molecular diffusion is that we can observe by the naked eye this phenomenon happening.

Keywords: Brownian motion, mechanical analog model, stochastic processes.

1. Introdução

O movimento Browniano é um marco importante no desenvolvimento da ciência que estabeleceu de forma categórica a evidência sobre a existência da estrutura descontínua da matéria. Na era moderna os principais autores foram A. Einstein e J. Perrin, que, respectivamente, desenvolveram o estudo teórico [1] e realizaram os experimentos necessários [2] para relacionar a natureza deste movimento estocástico como consequência da estrutura granular da matéria. Esses desenvolvimentos possibilitaram obter uma estimativa para o número de Avogadro e o raio atômico o que permitiu validar experimentalmente a existência dos átomos, cujo tema era ainda palco de discussões pela comunidade científica. A importância da ideia de uma estrutura discretizada da matéria é indiscutível. Por isso, levar a todos os níveis de ensino o entendimento e verificação de dita hipótese de forma didática e simples é o objetivo de nossa proposta neste artigo.

Nossa abordagem do estudo do movimento browniano é desde um ponto de vista experimental utilizando um sistema mecânico análogo. Neste trabalho recriamos as condições da interação estocástica de uma partícula browniana com os componentes microscópicos que compõem um fluido. Analisamos a estatística dos movimentos em zigue-zague de uma partícula browniana e encontramos bons resultados que se ajustam às previsões indicadas por A. Einstein para a difusão molecular e de P. Langevin sobre a estatística dos movimentos sujeitos a forças flutuantes.

Na literatura existem diversas simulações computacionais do movimento Browniano, que fornecem uma boa ilustração deste fenômeno. Uma simulação computacional do que o botânico Robert Brown [3] testemunhou por primeira vez pode ser acessada nesse site da universidade de Virgínia [4]. Nessa página há o registro do movimento de uma partícula browniana maior (soluto) bombardeada por partículas menores (solvente). No entanto a simples observação via uma simulação gráfica computacional ainda é insuficiente, pois a veracidade experimental dos fenômenos ainda fica discutível já que

*Endereço de correspondência: earias@iprj.uerj.br

não existe garantia de o que é simulado no computador seja de fato realizado no mundo físico.

Procurando uma abordagem experimental direta temos que o fenômeno foi visualizado pela primeira vez por R. Brown utilizando um microscópio [3]. Por seu lado, J. Perrin aproveitando ferramentas mais sofisticadas conseguiu realizar medições precisas deste fenômeno [2]. Estas técnicas e procedimentos experimentais não se encontram facilmente ao alcance de todos em escolas ou universidades e isto inviabiliza a popularização de práticas experimentais que recriem o realizado por Brown e Perrin.

Assim, tendo como objetivo a aproximação deste fenômeno a um público mais amplo, existe o trabalho de J. S. Figueira [5]. Neste trabalho se aproveitam vídeos de movimentos de partículas brownianas, captados em laboratórios especializados e disponibilizados na rede, para realizar a análise de dados e ajuste das medições com as predições teóricas acerca do movimento browniano. A análise dos movimentos é realizado utilizando-se o software livre *Tracker* [6]. Este trabalho se preocupa só de aproximar o leitor à análise do movimento browniano, sem se atentar com a realização experimental do fenômeno em si, evitando a necessidade de equipamento especializado.

Um seguinte passo é considerado no artigo de S. Perez et al. [7], onde se realiza uma proposta de prática mais completa. Nesse artigo se indica como montar o experimento com material de baixo custo, gravando vídeos dos movimentos e realizando a análise deles utilizando o software *Tracker*. Nesse artigo se monta um microscópio caseiro de gota de água utilizando um laser e se captura o movimento randômico de impurezas dentro da água. A vantagem das propostas de [5, 7] é que ao conhecer a temperatura aproximada do fluido onde as partículas brownianas se desenvolvem, assim como o tamanho médio delas, se pode aproximar o valor real do número de Avogadro. Nestes estudos se supõe um estado de equilíbrio termodinâmico e se realiza um ajuste linear do deslocamento quadrático médio em função do tempo. No entanto, a impossibilidade de modificar ou escolher as condições do fenômeno limita a análise experimental.

Neste artigo gostaríamos de apresentar uma proposta de sistema análogo de movimento browniano. Este modelo mecânico de movimento browniano possibilita uma maior manipulação de parâmetros que descrevem o fenômeno como temperatura, densidade ou viscosidade do fluido, assim como escolher diferentes tamanhos das partículas brownianas. No nosso sistema mecânico análogo, iremos simular um “fluido” como um conjunto de partículas em constante agitação que abarca o espaço de um determinado recipiente. A agitação constante do movimento das partículas do “fluido” é obtida por meio do acoplamento do recipiente a um oscilador mecânico no qual podemos regular a amplitude e frequência das oscilações. Desta forma, podemos indicar que, no sistema análogo proposto neste artigo,

temos uma maneira efetiva de modificar a energia de oscilação das partículas de “fluido” e, portanto, alterar a temperatura efetiva deste. Também, como no nosso sistema podemos escolher o número de partículas de “fluido” dentro do recipiente, podemos desta forma alterar a densidade efetiva do nosso “fluido”. Isso está relacionado também com a fase da matéria e, portanto, no sistema proposto se poderia estudar qualitativamente a diferença do movimento browniano em líquidos ou gases. Dentro do “fluido” considerado neste estudo, iremos inserir partículas brownianas, maiores que as partículas do fluido, sobre as quais iremos analisar o movimento em zigue-zague causado pelas colisões constantes com a moléculas do “fluido”. A possibilidade de escolher diferentes tipos de partículas brownianas, com massas e tamanhos diferentes, amplia as possibilidades de manipulação da experiência.

Desta forma, dadas certas condições de temperatura (frequência e amplitude das oscilações), densidade e viscosidade do fluido (número de moléculas de “fluido”), assim como tendo escolhido um tipo de partícula browniana (massa e raio) será realizada repetidas vezes a captura do movimento browniano no meio. A análise estatística dos movimentos das partículas brownianas será realizada utilizando-se o software *Tracker* e, como será visto, os resultados nos irão levar a uma confirmação qualitativa com a predições da teoria do movimento browniano. O software livre *Tracker* será utilizado devido a sua praticidade para analisar o movimento dos corpos [6]. Ele particiona um vídeo em frames e consegue identificar um objeto e suas diferentes posições em cada instante de tempo. Este software é de grande ajuda para realizar experimentos de cinemática de forma precisa em com recursos acessíveis ao grande público, sendo assim uma valiosa ferramenta para aulas de física experimental.

A teoria do movimento browniano tem sido apresentada e explicada em detalhe em várias referências, podemos citar por exemplo os artigos da presente revista [8, 9]. No presente artigo não pretendemos revisitar as diferentes abordagens e refazer todos os cálculos teóricos. Aqui nos limitaremos a apresentar a teoria necessária para a interpretação coerente dos nossos resultados experimentais. Desta forma, iremos nos basear no texto de Pathria [10], onde se descreve o movimento browniano no caso geral tridimensional e no qual se pode apreciar a tendência ao estado de equilíbrio termodinâmico para tempos longos de observação. Esta abordagem será necessária sobretudo no nosso estudo, pois ao termos um sistema com poucas partículas (quando comparado com um fluido real de $\sim 10^{23}$ partículas) estaremos em geral numa situação fora do limite termodinâmico. Apesar desta aparente dificuldade, gostaríamos de indicar, que no nosso sistema o acordo com a previsões teóricas é satisfatório, com alta qualidade de ajuste entre os dados experimentais e as previsões teóricas.

Finalmente, gostaríamos de ressaltar que a familiaridade e o entendimento dos fenômenos estocásticos é cada vez mais necessário para o desenvolvimento da ciência atual. Assim temos que os conceitos estatísticos presentes no estudo do movimento browniano também podem ser aplicados em outras áreas do conhecimento como matemática financeira [11] ou biomedicina [12].

A organização do trabalho é seguinte: na seção 2 é apresentada a teoria do movimento browniano do ponto de vista de Langevin e a equação da difusão. Na seção 3 é explicada nossa proposta experimental do modelo mecânico análogo. Este modelo está constituído principalmente por um agitador mecânico e um recipiente com pequenas partículas em movimento constante simulando um fluido. Na seção 4 são apresentados os principais resultados experimentais. Finalmente na seção 5 elaboramos as conclusões e discutimos perspectivas futuras.

2. Teoria do Movimento Browniano e a Equação da Difusão

2.1. Abordagem Microscópica

A abordagem da dinâmica do movimento browniano desenvolvida pelo físico Paul Langevin tem como objetivo analisar explicitamente as colisões moleculares por meio da visão microscópica do sistema. Segundo Langevin, esse fenômeno físico pode ser descrito por uma equação diferencial estocástica [8]. Esse sistema é composto por uma partícula de soluto de massa m se deslocando em um fluido solvente constituído por partículas menores. Utilizando a formulação geral tridimensional do sistema [10], temos que a equação estocástica de Langevin pode ser formulada da seguinte maneira

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\gamma \mathbf{v}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

no qual $\mathbf{v}(t)$ é o vetor que descreve a velocidade da partícula browniana (soluto) em função do tempo enquanto que $\mathbf{F}(t)$ designa o vetor da força flutuante devido as colisões moleculares. Na equação do movimento consideramos também a ação da força dissipativa representada pelo termo $\gamma \mathbf{v}$, onde γ é um parâmetro que depende da viscosidade do fluido. Temos que enquanto a força dissipativa é devida a fricção dinâmica, a força de caráter aleatório está atrelada as colisões moleculares das partículas do fluido solvente com a partícula do soluto.

Nesse trabalho, as seguintes hipóteses sobre a força estocástica são adotadas: a força estocástica apresenta média nula, além de obedecer as características de um ruído branco. Esta última característica garante a independência das colisões moleculares entre dois tempos arbitrários distintos t e t' . Essas propriedades são descritas por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}(t) \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t') \rangle &= \Gamma_F \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (2)$$

onde “ $\langle \dots \rangle$ ” indica a média sobre o ensemble,¹ o símbolo “ \cdot ” representa o produto escalar entre vetores, o termo Γ_F é uma constante que indicará a intensidade das forças estocásticas, enquanto que δ corresponde a função de distribuição conhecida como *Delta de Dirac*.

Ao aplicar a média na equação de movimento (1), a parcela referente ao vetor da força flutuante é anulada e se tem que

$$m \frac{d\langle \mathbf{v}(t) \rangle}{dt} = -\gamma \langle \mathbf{v}(t) \rangle, \quad (3)$$

ao integrar esta última equação de forma direta e ao considerar $\mathbf{v}(0)$ como a condição inicial da velocidade média encontra-se

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = \mathbf{v}(0) e^{-t/\tau}, \quad (4)$$

onde temos identificado o tempo característico $\tau = m/\gamma$. Percebe-se portanto, que o decaimento da velocidade média está vinculado a viscosidade do fluido. Essa propriedade dissipativa é responsável por conceder o caráter irreversível a esse fenômeno físico.

A aceleração da partícula browniana é determinada ao dividir a equação (1) pela massa m da partícula

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{v}(t)}{\tau} + \mathcal{A}(t), \quad (5)$$

similarmente com o que ocorre com o vetor da força flutuante, equação (2), os valores médios do vetor da aceleração flutuante $\mathcal{A}(t) = \mathbf{F}(t)/m$, obedecem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(t) \rangle &= 0, \\ \langle \mathcal{A}(t) \cdot \mathcal{A}(t') \rangle &= \Gamma_A \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (6)$$

onde $\Gamma_A = \Gamma_F/m^2$. Nessa etapa, a posição instantânea da partícula de soluto $\mathbf{r}(t)$ será introduzida por meio de relações que envolvem o produto escalar com a velocidade. A primeira relação é a identidade

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}^2(t)}{dt} \right), \quad (7)$$

ao derivar com respeito ao tempo a equação anterior também se obtém

$$\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}^2(t)}{dt^2} - \mathbf{v}^2(t). \quad (8)$$

A hipótese de independência entre as forças das colisões e a posição da partícula será admitida. Isto implica que não há correlação entre a posição instantânea e a força flutuante, o que também será válido para a aceleração

$$\langle \mathbf{r}(t) \cdot \mathcal{A}(t) \rangle = 0. \quad (9)$$

¹ O processo de média sobre o ensemble implica que temos um grande número de replicas idênticas do sistemas, sujeitas às mesmas condições, e que tomamos o valor médio sobre esta coleção, num certo dado instante de tempo “ t ”.

Ao multiplicar escalarmente a equação (5) por $\mathbf{r}(t)$ e introduzir as relações expostas nas equações (7) e (8), além de realizar as médias, se obtém a seguinte equação

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{v}^2(t) \rangle, \quad (10)$$

essa é a equação geral para a descrição do deslocamento quadrático médio da partícula de soluto em função do tempo.

A equação anterior pode ser resolvida para o caso particular de equilíbrio termodinâmico. Nesta situação a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{v}^2(t) \rangle$ pode ser substituída pelo seu valor estacionário indicado pelo *Teorema de Equipartição de Energia*. Considerando três graus de liberdade se tem que no estado de equilíbrio $m \langle \mathbf{v}^2 \rangle / 2 = 3k_B T / 2$, onde k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta do fluido. Dessa maneira, a solução da equação anterior é obtida

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = \frac{6k_B T \tau^2}{m} \left[\frac{t}{\tau} - (1 - e^{-t/\tau}) \right], \quad (11)$$

no qual se tem considerado as condições iniciais tais que o valor médio $\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle$ e sua primeira derivada são nulos no tempo $t = 0$.

Na equação (11), podemos identificar dois regimes de observação. O primeiro regime corresponde a tempos de observação pequenos comparados com o tempo de relaxação $t \ll \tau$. Neste regime o deslocamento quadrático é proporcional ao quadrado do tempo de observação

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle \simeq \frac{3k_B T}{m} t^2 = \langle \mathbf{v}^2(t) \rangle t^2, \quad (12)$$

sendo assim vemos que o processo é reversível e simétrico perante inversão temporal ($t \rightarrow -t$). No segundo regime o processo é irreversível e assimétrico perante a inversão temporal. O regime irreversível corresponde a tempos de observação longos comparados com o tempo característico $t \gg \tau$. Nesta situação a dependência do deslocamento quadrático médio será linear com o tempo

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle \simeq \frac{6k_B T \tau}{m} t, \quad (13)$$

este último resultado é conhecido como a *Relação de Einstein* da difusão $\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = 6Dt$, onde temos identificado o coeficiente de difusão como $D = k_B T / \gamma$.

Voltando ao caso geral em que a velocidade quadrática média é dependente do tempo e ainda não alcança seu valor estacionário, $3k_B T / m$, indicado pelo princípio de equipartição. Temos que, ao multiplicar a equação (5) por $\exp(t/\tau)$, em seguida organizar os termos e efetuar a integração, a lei da velocidade da partícula browniana é determinada como sendo

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0)e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} \int_0^t e^{t'/\tau} \mathcal{A}(t') dt'. \quad (14)$$

Com este resultado, a velocidade quadrática média $\langle \mathbf{v}^2(t) \rangle$ pode ser calculada. Assim pela aplicação da

média se obtém

$$\langle \mathbf{v}^2(t) \rangle = \mathbf{v}^2(0)e^{-2t/\tau} + e^{-2t/\tau} \int_0^t \int_0^t e^{(t'+t'')/\tau} \langle \mathcal{A}(t') \cdot \mathcal{A}(t'') \rangle dt' dt'',$$

agora ao considerar a equação (6) das propriedades dos valores médios e logo após realizar a integração, uma expressão de $\langle \mathbf{v}^2(t) \rangle$ que depende do parâmetro Γ_A é encontrada.

No entanto, ao assumir que no limite de tempos longos se alcança o equilíbrio termodinâmico e que o teorema de equipartição é aplicável, a constante pode ser identificada como sendo $\Gamma_A = 6k_B T / m\tau$. Logo

$$\langle \mathbf{v}^2(t) \rangle = \mathbf{v}^2(0) + \left(\frac{3k_B T}{m} - \mathbf{v}^2(0) \right) (1 - e^{-2t/\tau}), \quad (15)$$

neste ponto é importante notar a relação fundamental entre a velocidade quadrática média e a característica estatística da aceleração (força) flutuante. Este resultado, em última instância, associa o coeficiente de viscosidade do fluido com o caráter estatístico da aceleração flutuante, posto que $\gamma = m/\tau = m^2 \Gamma_A / 6k_B T$. Portanto vemos que o fenômeno responsável pela dissipação da energia no sistema depende diretamente da estatística das flutuações moleculares. Desse modo temos aqui o primeiro exemplo do *Teorema flutuação-dissipação*, ver [10, 13].

O comportamento da velocidade quadrática média para três condições iniciais distintas da velocidade média inicial, $\mathbf{v}(0)$ é exibido na Figura (1). Nesse gráfico se pode apreciar que independentemente da condição inicial, a velocidade quadrática média sempre irá tender ao seu valor estacionário estabelecido pelo teorema da equipartição.

A solução geral da velocidade quadrática média será substituída na expressão da lei do movimento definida pela equação (10), de tal forma que se tem a equação generalizada

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = 2\mathbf{v}^2(0)e^{-2t/\tau} + \frac{6k_B T}{m} (1 - e^{-2t/\tau}),$$

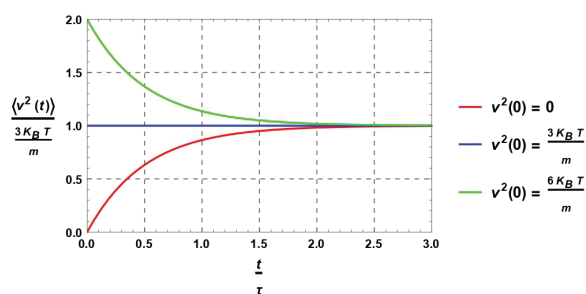


Figura 1: Curvas da velocidade quadrática média para diferentes condições iniciais da velocidade média.

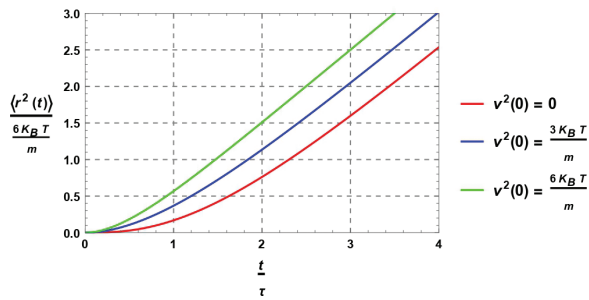


Figura 2: Deslocamento quadrático médio para diferentes valores iniciais da velocidade média.

resolvendo esta equação com a condição inicial $\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle$ como nula no tempo $t = 0$, consequentemente se obtém

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = \mathbf{v}^2(0)\tau^2(1 - e^{-t/\tau})^2 + \frac{6k_B T \tau}{m} t - \frac{3k_B T}{m} \tau^2(1 - e^{-t/\tau})(3 - e^{-t/\tau}), \quad (16)$$

da mesma maneira há também diferentes comportamentos para o deslocamento quadrático médio a depender do valor inicial $\mathbf{v}(0)$ como pode ser visto na Figura (2). Nessa figura vemos que o comportamento linear é atingido para tempos longos comparados com o tempo de relaxação do sistema.

2.2. Abordagem Macroscópica

Na seção anterior, a análise do movimento browniano foi estudada do ponto de vista microscópico por meio da utilização das forças flutuantes de Langevin. Nesta seção, uma outra abordagem será realizada ao adotar os princípios probabilísticos. O exemplo paradigmático desta abordagem é conhecido como o problema da caminhada aleatória ou “*problema do andar do bêbado*” [8]. A partir da análise desse problema a lei de Fick da difusão molecular pode ser alcançada [14]

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \eta(\mathbf{x}, t), \quad (17)$$

em que ∇^2 corresponde ao operador laplaciano. Esta equação expressa a evolução temporal da densidade de probabilidade $\eta(\mathbf{x}, t)$ de encontrar uma partícula próxima de determinada posição \mathbf{x} no instante t .

Neste trabalho, esta equação diferencial será solucionada ao adotar como condição inicial que todas as partículas partem concentradas da origem do sistema coordenado. A resolução dessa equação é feita por meio da aplicação da Transformada de Fourier, dessa forma tem-se

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \right)^3 e^{-\mathbf{x}^2/4Dt}. \quad (18)$$

Neste artigo, como veremos na metodologia experimental, uma geometria cilíndrica será adotada para o sistema

proposto. Explorando esta simetria axial, a conversão de coordenadas cartesianas (x, y, z) para coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) é adequada

$$\eta(r, \phi, z, t) = \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \right)^3 e^{-(r^2+z^2)/4Dt}. \quad (19)$$

Na nossa proposta a análise do movimento browniano será feita por captura de vídeos e análise de imagens captadas ao longo do eixo de simetria axial. As imagens portanto capturam o movimento no plano ortogonal ao eixo z . Considerando também a isotropia do movimento, temos que o único grau de liberdade será a posição radial da partícula. Conseqüentemente, nossos resultados serão descritos pela probabilidade de achar a partícula entre r e $r + dr$, no instante t , independentemente das coordenadas z e ϕ . Assim a densidade de probabilidade radial é dada por

$$p(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi r \eta(r, \phi, z, t),$$

ao realizar a integral gaussiana chega-se ao seguinte resultado

$$p(r, t) = \left(\frac{r}{2Dt} \right) e^{-r^2/4Dt}, \quad (20)$$

na Figura (3) se mostra a densidade de probabilidade radial para diferentes instantes de tempo, considerando um coeficiente de difusão $D = 1$. Na equação (20) o fator $l^2 = 4Dt$ dentro da exponencial pode ser identificado de forma direta como o deslocamento quadrático médio. Isto quer dizer que se calcularmos o valor médio do deslocamento se tem $\langle r^2 \rangle = l^2(t) = 4Dt$. Vemos assim que o deslocamento quadrático médio depende do tempo linearmente.

Um conceito especialmente útil para nossa análise é a noção de probabilidade acumulada. Esta probabilidade, $\mathcal{P}(R, t)$, indica as chances de que a partícula esteja dentro de uma área circular de raio R em determinado tempo t . Assim a probabilidade acumulada será dada por

$$\mathcal{P}(R, t) = \int_0^R p(r, t) dr,$$

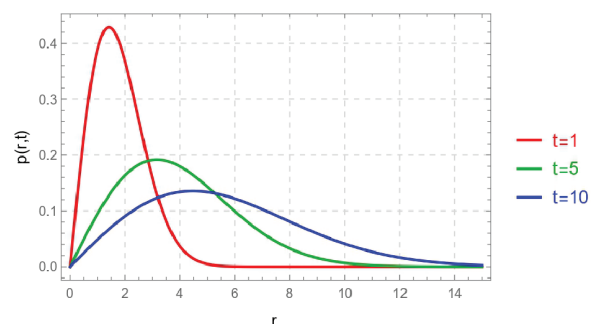


Figura 3: Densidade de Probabilidade radial para tempos distintos.

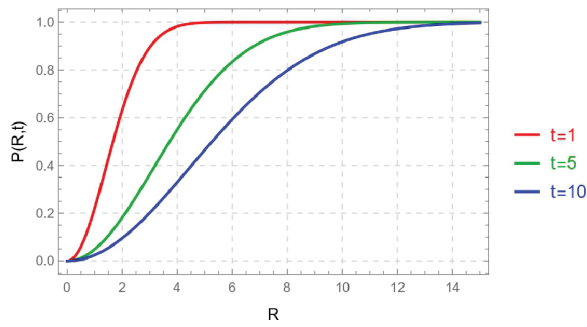


Figura 4: Probabilidade acumulada radial para distintos tempos.

realizando a integração se tem

$$\mathcal{P}(R, t) = 1 - e^{-R^2/l^2(t)}. \quad (21)$$

Essa última expressão exposta da probabilidade acumulada até certo raio de abrangência fornecerá a equação teórica com a qual os pontos experimentais serão comparados para a validação do modelo proposto. Na Figura (4) são mostradas probabilidades acumuladas para diferentes tempos, considerando um coeficiente de difusão $D = 1$.

3. Proposta Experimental

Nesta seção será descrito um experimento cuja finalidade é permitir a visualização macroscópica do movimento browniano. O modelo se baseia num sistema mecânico que consiste em um recipiente, sob constante oscilação, no qual são inseridas pequenas partículas que representarão o papel de partículas de um fluido. Uma outra partícula browniana, maior, também será inserida dentro desse fluido. Graças a fonte vibratória, as partículas estão submetidas a colisões frequentes o que concede o caráter aleatório do movimento da partícula browniana, que é a principal característica desse fenômeno. A validação desse modelo proposto será feita por meio da comparação dos dados experimentais com os resultados esperados pela teoria exposta em seções anteriores.

Para a realização desse experimento, os seguintes materiais e dispositivos eletrônicos são necessários:

- Um recipiente cilíndrico de diâmetro de 30 cm com borda elevada;
- Duzentos e cinquenta gramas de miçanga de vidro (partículas do fluido);
- Munições de airsoft de cor amarela (partículas brownianas);
- Agitador magnético permanente;
- Gerador de sinais;
- Amplificador de sinais;
- Câmera digital e suporte para sua fixação;
- Furadeira, régua de nível e protetor auditivo;
- Softwares *Tracker*, *Wolfram Mathematica* e *Excel*.

Inicialmente é essencial definir uma bancada firme sob a qual será montado o experimento. O próximo passo é

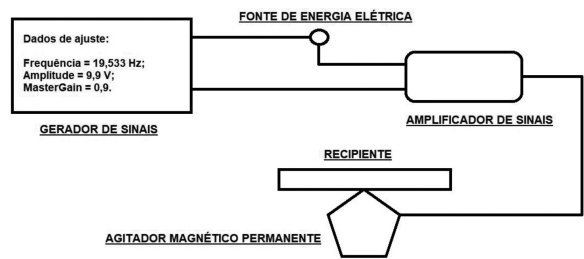


Figura 5: Esquema simplificado da montagem.

fazer um furo no centro do recipiente cilíndrico com o tamanho compatível com o diâmetro do parafuso que será acoplado a haste do agitador magnético permanente. Dessa maneira se tem a junção entre o recipiente e a fonte vibratória. Por sua vez, o agitador magnético será conectado ao amplificador que também está associado ao gerador de sinais. Nesse experimento foi utilizada a frequência de 19,533 Hz, amplitude de 9,9 V e *master gain* de aproximadamente 0,9 no gerador de sinais. A conexão desses dispositivos eletrônicos mencionados é mostrada na Figura (5).

Após essa configuração certifique-se que o recipiente está oscilando de maneira uniforme na vertical, inclusive empregue a régua de nível para verificar a inclinação da montagem do recipiente cilíndrico. O uso do protetor auditivo é indispensável para evitar danos na saúde. A câmera digital responsável pela realização das filmagens do experimento deverá ser colocada acima do recipiente, de forma que abrange todo o bordo com auxílio do suporte para sua devida fixação. Novamente, utilize a régua de nível para verificar se a câmera está posicionada horizontalmente. Logo, a etapa da montagem está finalizada.

Para a devida execução do experimento, primeiramente, coloque no recipiente as miçangas, que desempenham o papel de moléculas do fluido de maneira uniforme e bem distribuídas no interior. Note que as miçangas não possuem um formato esférico, mas essa questão da forma geométrica das partículas de solvente não é relevante como visto matematicamente, até porque na grande maioria dos experimentos que envolvem a observação microscópica do movimento browniano, o solvente adotado é a água. A molécula de água não é perfeitamente esférica. Por outro lado, a partícula maior de soluto deve ser esférica e apresentar um tamanho consideravelmente maior que as de solvente. Por isso, a munição de airsoft foi escolhida para cumprir essa função.

A Figura (6) exhibe a nomenclatura dos dispositivos presentes no modelo mecânico proposto neste trabalho. Ao ligar o sistema oscilatório com as miçangas sendo agitadas no interior e a filmagem pela câmera já iniciada, o próximo passo é colocar três munições de airsoft no centro do recipiente. O critério de parada da filmagem é estipulado quando alguma munição atingir a borda do recipiente. Sendo assim, os vídeos não possuem uma longa duração, a média é em torno de apenas

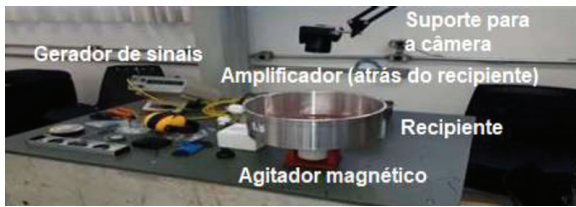


Figura 6: Modelo mecânico análogo ao movimento browniano.

seis segundos. No experimento relatado foram feitas seis filmagens cada uma contendo o movimento de três munições de airsoft através do solvente cujas moléculas são representadas pelas miçangas. Portanto, no total foram contabilizadas dezoito trajetórias da partículas brownianas para serem analisadas.

Após essa parte experimental, o tratamento dos dados obtidos será realizado. O software livre *Tracker* [6] permite destrinchar o vídeo em imagens sucessivas com intervalos de 0,04 segundos entre elas para o caso do vídeo registrado ser de 25 frames por segundo². Dessa maneira, o usuário pode mapear manualmente a posição de cada partícula browniana no tempo. Ao adotar a origem como sendo o centro do recipiente e a escala definida por meio do diâmetro de 30 cm do recipiente cilíndrico, cada movimento da bolinha de airsoft é analisado frame à frame pelo usuário. No final, o aplicativo *Tracker* exibe um gráfico da trajetória da partícula browniana no plano *xy*. Além disso uma tabela contendo o histórico da posição das partículas em cada instante de tempo (frame) é gerada conforme pode ser visto no canto inferior direito da Figura (7).

Os dados gerados no *Tracker* apresentados nas tabelas das dezoito trajetórias brownianas foram copiados e organizados para o *Excel* de forma a converter todas as posições iniciais das partículas para a origem no tempo igual à zero. A seguir na Tabela 1 é exposto um exemplo da organização dos dados em uma tabela no *Excel* somente para a primeira partícula. As coordenadas horizontal x_1 , vertical y_1 e a posição radial da primeira partícula $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ estão descritas em metros.

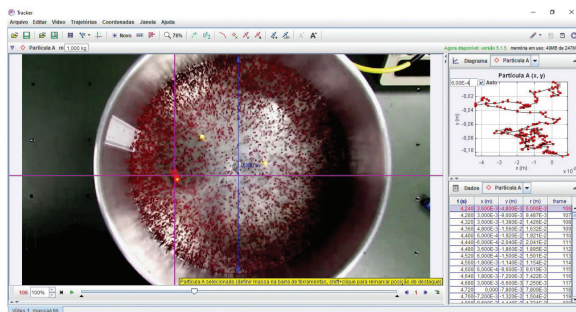


Figura 7: Layout do aplicativo Tracker.

² Com a disponibilidade de celulares de alta qualidade de vídeo, poderia ser possível obter vídeos de até 120 frames por segundo, aumentando a precisão das medições.

Tabela 1: Dados da posição da primeira partícula.

Frame	Tempo (s)	x_1	y_1	r_1
1	0	0	0	0
2	0,04	0,0012	-0,0018	0,0022
3	0,08	0,003	-0,0054	0,0062
.
.
137	5,44	-0,015	-0,0912	0,0924

O mesmo procedimento pode ser feito para a velocidade da primeira partícula. Os dados estão exibidos na Tabela 2. Os valores dos componentes da velocidade foram obtidas a partir do software *Tracker* cuja unidade é metro por segundo.

Os dados dos experimentos referentes as trajetórias e as velocidades das partículas foram organizadas no *Excel*. O software *Wolfram Mathematica* foi empregado para a determinação dos parâmetros de ajuste dos dados experimentais com a curva teórica e também para a plotagem dos gráficos referentes a probabilidade acumulada ao longo do tempo. Para tal feito, inicialmente, os dados do *Excel* foram importados para o *Wolfram Mathematica*.

Como visto anteriormente a probabilidade acumulada depende da posição radial R e do tempo t no qual se quer estimar esta quantidade. Esta probabilidade descreve a chance de encontrar uma partícula dentro de determinado raio de abrangência R no tempo t . Sendo assim é necessário conhecer as posições radiais de cada partícula em cada instante de tempo. Para o cálculo da probabilidade acumulada iremos ordenar estas posições radiais de forma crescente, de tal forma que o menor raio neste determinado tempo nos indica a probabilidade de encontrar uma partícula das dezoito dentro desde raio e terá portanto probabilidade acumulada $1/18$. O segundo raio irá indicar que temos duas partículas dentro deste domínio e terá associada uma probabilidade acumulada de $2/18$. Por sua vez o maior raio abrange todas as partículas dentro deste valor e terá então probabilidade acumulada igual a 1. Todo este procedimento é feito para um dado instante de tempo t . Se considerarmos outro instante de tempo teremos diferentes valores dos raios das partículas e uma outra distribuição da probabilidade acumulada. A Figura (8) exibe as posições radiais das dezoito partículas para os tempos fixos $t = 1s$ e $t = 5s$, respectivamente. As tabelas a seguir explicitam os

Tabela 2: Dados da velocidade da primeira partícula.

Frame	Tempo (s)	V_{x1}	V_{y1}	V_1
1	0	0	0	0
2	0,04	0,0375	-0,0675	0,0772
3	0,08	0,02	-0,08	0,0825
.
.
137	5,44	-0,0028	-0,0168	0,0170

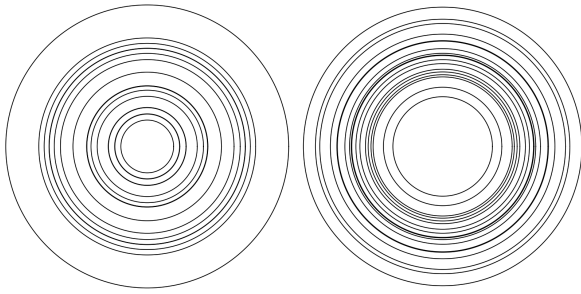


Figura 8: Posições radiais das partículas brownianas em dois instantes distintos $t = 1\text{ s}$ e $t = 5\text{ s}$, respectivamente.

valores experimentais dos raios das partículas para os tempos $t = 1\text{ s}$ na Tabela 3 e $t = 5\text{ s}$ na Tabela 4. Note que os valores da probabilidade acumulada são constantes, o que se altera com o tempo são os raios ordenados das dezoito partículas avaliadas. Agora, a equação (21) da curva teórica da probabilidade acumulada $\mathcal{P}(R, t) = 1 - e^{-R^2/l^2(t)}$ é empregada para estimar os melhores valores para o parâmetro $l^2(t)$ para cada instante de tempo t de acordo com os dados experimentais. O comando **FindFit** do *Wolfram Mathematica* permite realizar o ajuste.

A análise da regressão (\mathcal{R}^2) é um artifício matemático utilizado na área da estatística para avaliar matematicamente o ajuste dos dados experimentais com o modelo teórico proposto. A qualidade do ajuste é definida de maneira quantitativa por \mathcal{R}^2 dentro da faixa de valor entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1 for o valor de \mathcal{R}^2 melhor será a qualidade do ajuste.

O último passo é elaborar os gráficos da curva teórica da $\mathcal{P}(R, t)$ com os raios experimentais para cada instante

Tabela 3: Probabilidade acumulada a partir dos dados das trajetórias para $t = 1\text{ s}$.

Raio ordenado (m) Tempo = 1 s	Número de partículas	Probabilidade acumulada
0,0249	1	1/8
0,0305	2	2/18
0,03067	3	3/18
0,0366	4	4/18
0,0367	5	5/18
0,0472	6	6/18
0,0530	7	7/18
0,0569	8	8/18
0,0570	9	9/18
0,0571	10	10/18
0,0700	11	11/18
0,0818	12	12/18
0,0876	13	13/18
0,0923	14	14/18
0,0925	15	15/18
0,0971	16	16/18
0,1022	17	17/18
0,1332	18	18/18

Tabela 4: Probabilidade acumulada a partir dos dados das trajetórias para $t = 5\text{ s}$.

Raio ordenado (m) Tempo = 5 s	Número de partículas	Probabilidade acumulada
0,0600	1	1/18
0,0713	2	2/18
0,0838	3	3/18
0,0864	4	4/18
0,0900	5	5/18
0,0930	6	6/18
0,0997	7	7/18
0,1045	8	8/18
0,1010	9	9/18
0,1101	10	10/18
0,1122	11	11/18
0,1178	12	12/18
0,1269	13	13/18
0,1275	14	14/18
0,1353	15	15/18
0,1481	16	16/18
0,1533	17	17/18
0,1679	18	18/18

de tempo. O parâmetro \mathcal{R}^2 de qualidade de ajuste é exibido acima de cada gráfico. Graças ao comando FindFit de ajuste dos dados experimentais com a equação (21), o parâmetro $l^2(t)$ para cada tempo é obtido e poderá ser comparado com a equação teórica $4Dt$. Desta forma uma estimativa do coeficiente de difusão D desse sistema mecânico foi determinado. Os dados experimentais da velocidade da partícula também foram empregados para a realização do gráfico da velocidade quadrática média em função do tempo. Isso permite uma nova validação do modelo mecânico já que esse resultado pode ser comparado com a equação (15), que possui o comportamento característico mostrado na Figura (1), ver [10]. Temos organizado as nossas medidas experimentais (vídeos das partículas brownianas), assim como os artigos processando estas informações (Tracker, Excel e Wolfram) sobre os quais temos gerado os resultados nessa seção no drive do email: movimentobrowniano1905@gmail.com cuja senha é: Einstein1905MB.

4. Resultados Experimentais

Os gráficos das curvas de probabilidade acumulada com os dados experimentais para diversos instantes de tempo estão expostos à seguir. As Figuras (9 à 29) foram selecionadas dentre as 100 possíveis associadas a cada instante de tempo contido no intervalo de 0,04s à 4,00s, com incremento de 0,04s. Em todos os gráficos são mostrados os valores experimentais (em vermelho) da probabilidade acumulada e sua expressão teórica esperada, equação (21) (em azul). No experimento temos usado como partículas brownianas bolinhas de raio $\delta r_0 = 3\text{ mm}$. Este tamanho finito das partículas, será considerado como uma incerteza na localização das partículas. Assim, a

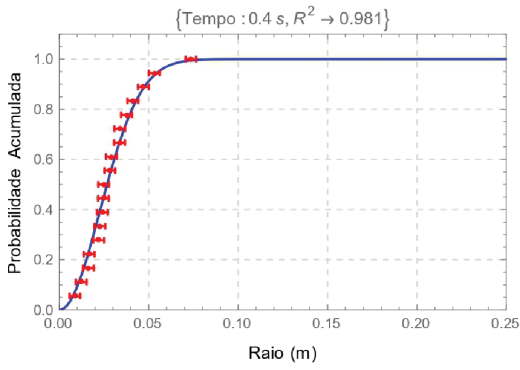


Figura 9: Probabilidade acumulada para $t = 0,04$ s.

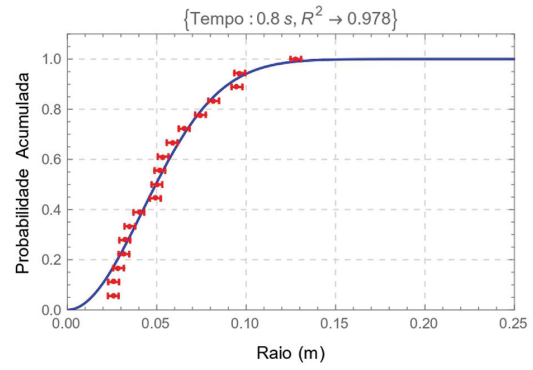


Figura 13: Probabilidade acumulada para $t = 0,80$ s.

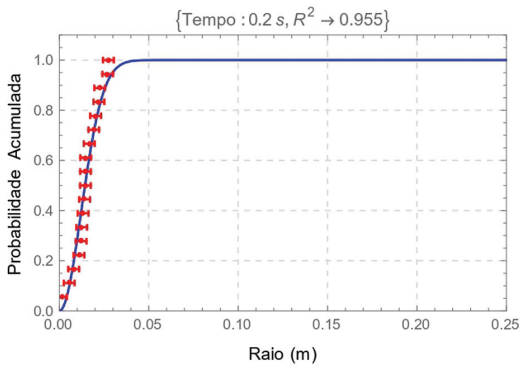


Figura 10: Probabilidade acumulada para $t = 0,20$ s.

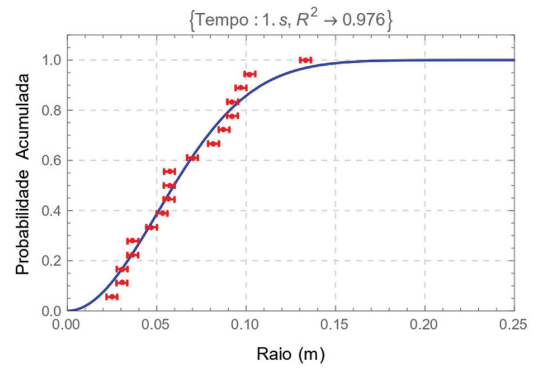


Figura 14: Probabilidade acumulada para $t = 1,00$ s.

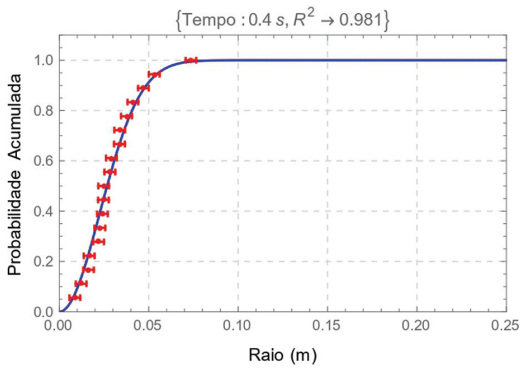


Figura 11: Probabilidade acumulada para $t = 0,40$ s.

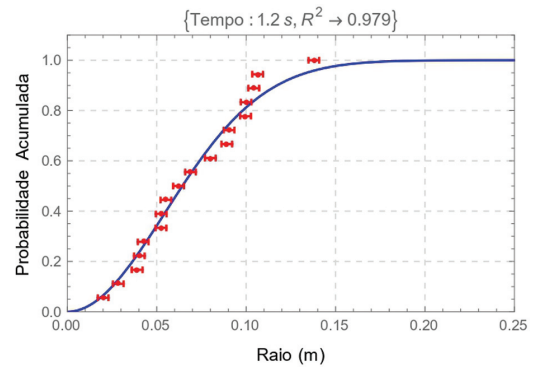


Figura 15: Probabilidade acumulada para $t = 1,20$ s.

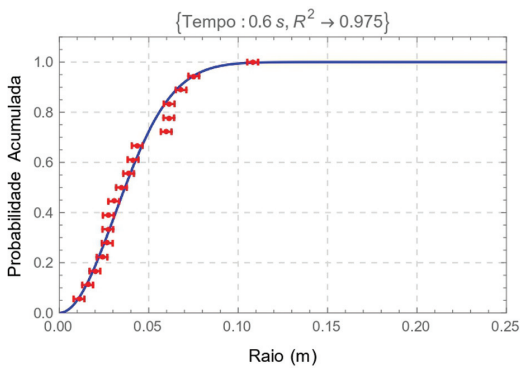


Figura 12: Probabilidade acumulada para $t = 0,60$ s.

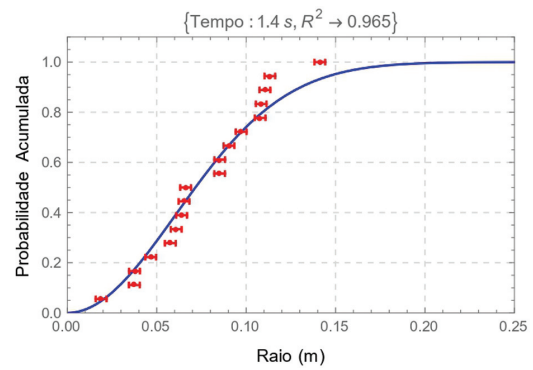


Figura 16: Probabilidade acumulada para $t = 1,40$ s.

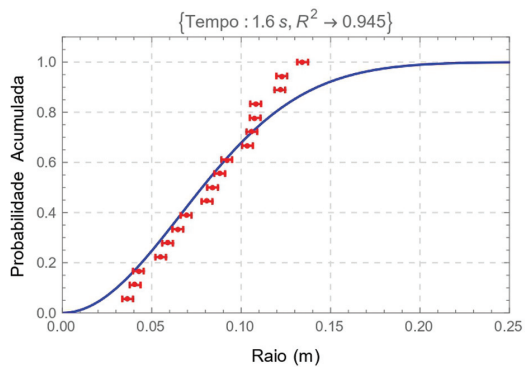


Figura 17: Probabilidade acumulada para $t = 1,60$ s.

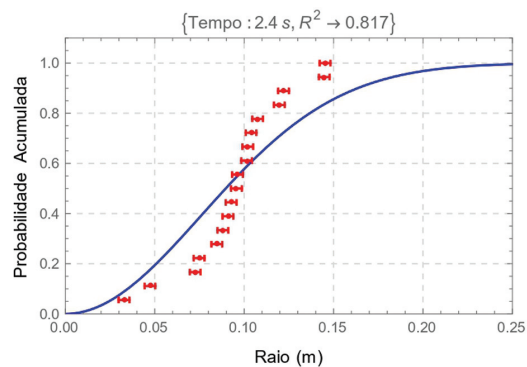


Figura 21: Probabilidade acumulada para $t = 2,40$ s.

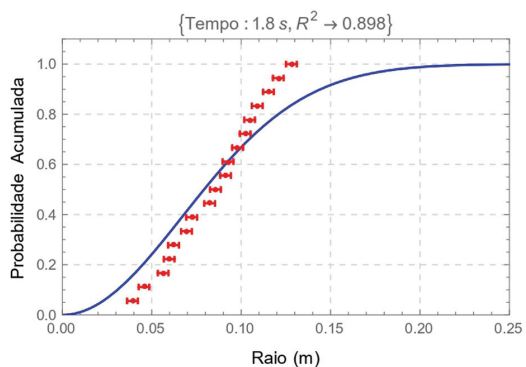


Figura 18: Probabilidade acumulada para $t = 1,80$ s.

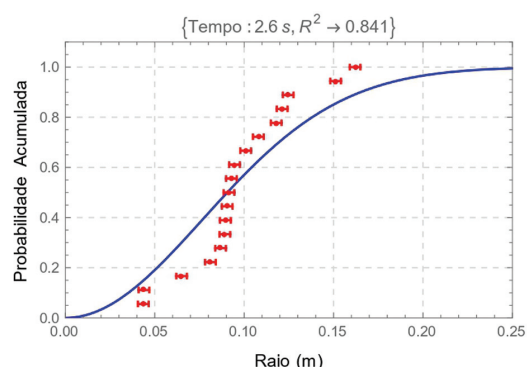


Figura 22: Probabilidade acumulada para $t = 2,60$ s.

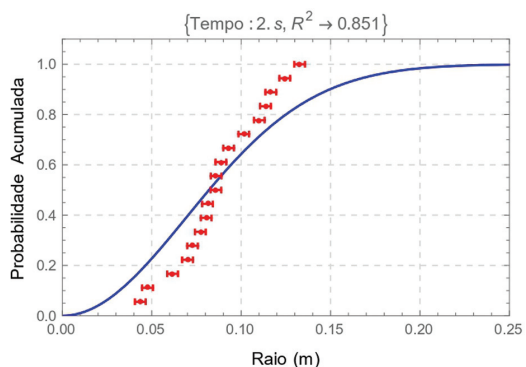


Figura 19: Probabilidade acumulada para $t = 2,00$ s.

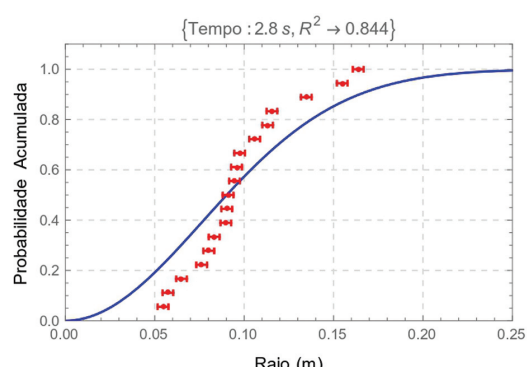


Figura 23: Probabilidade acumulada para $t = 2,80$ s.

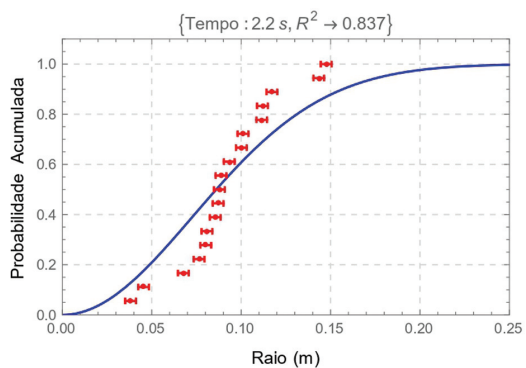


Figura 20: Probabilidade acumulada para $t = 2,20$ s.

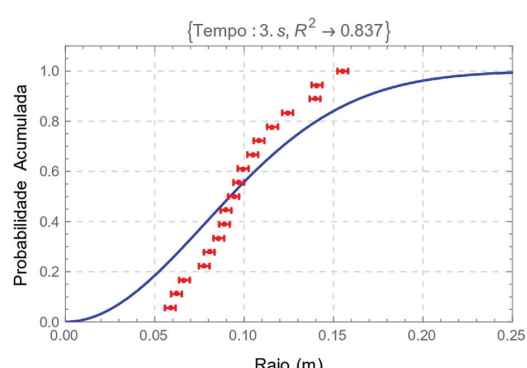


Figura 24: Probabilidade acumulada para $t = 3,00$ s.

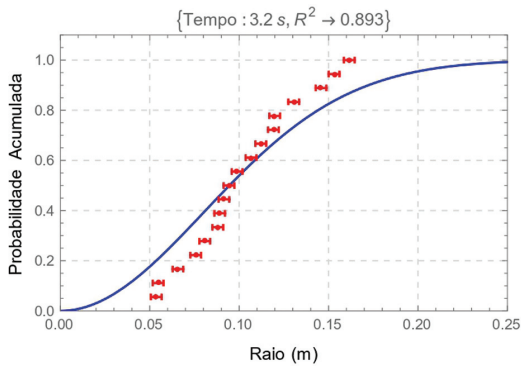


Figura 25: Probabilidade acumulada para $t = 3,20$ s.

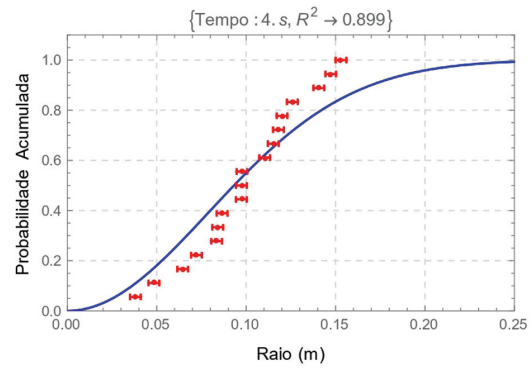


Figura 29: Probabilidade acumulada para $t = 4,00$ s.

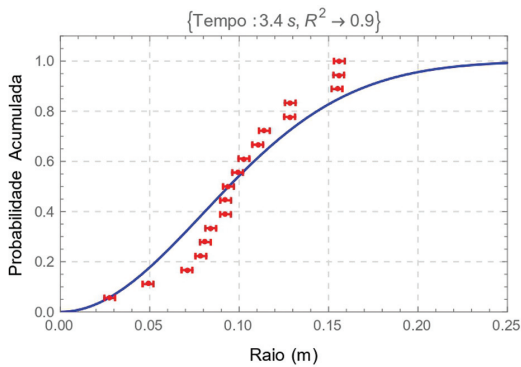


Figura 26: Probabilidade acumulada para $t = 3,40$ s.

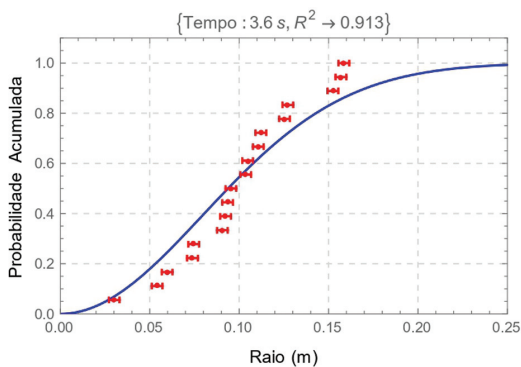


Figura 27: Probabilidade acumulada para $t = 3,60$ s.

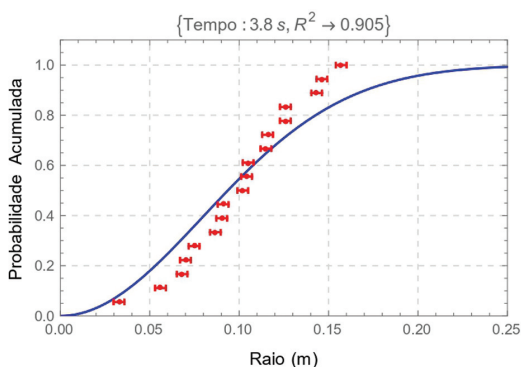


Figura 28: Probabilidade acumulada para $t = 3,80$ s.

posição radial r de uma partícula, terá incerteza $r \pm \delta r_0$. Isto está representado como barras de erro nos gráficos da probabilidade acumulada. Da mesma forma, nosso vídeo tem uma qualidade de 25fps (frames por segundo), indicando que entre dois frames temos um intervalo de tempo $\delta t_0 = 0,04s$. Este é o mínimo intervalo de tempo que podemos diferenciar e implica numa incerteza na evolução temporal das nossas quantidades. Assim, ao analisar o comportamento temporal de alguma quantidade temos que cada tempo t tem uma incerteza $t \pm \delta t_0$. Observe que o parâmetro \mathcal{R}^2 é próximo de 1 em todos os gráficos. Para tempos pequenos ele se aproxima muito de 1. Para tempos longos \mathcal{R}^2 se distancia de 1, mas sempre é maior que 0,80 o que evidencia uma boa qualidade de ajuste.

Para avaliar a evolução temporal da probabilidade acumulada será mostrada esta função em três instantes de tempo diferentes na Figura (30). Nota-se que com o passar do tempo a curva da probabilidade acumulada fica mais alongada alcançando valores de raios de abrangência mais distantes. Isto é um indicativo do processo difusivo e se ajusta muito bem a previsão teórica discutida anteriormente.

Outra forma de validar nosso modelo mecânico de Movimento Browniano é por meio do ajuste da curva

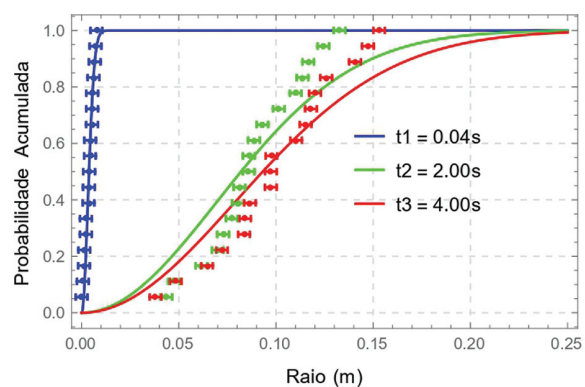


Figura 30: Evolução temporal da probabilidade acumulada para três instantes de tempo.

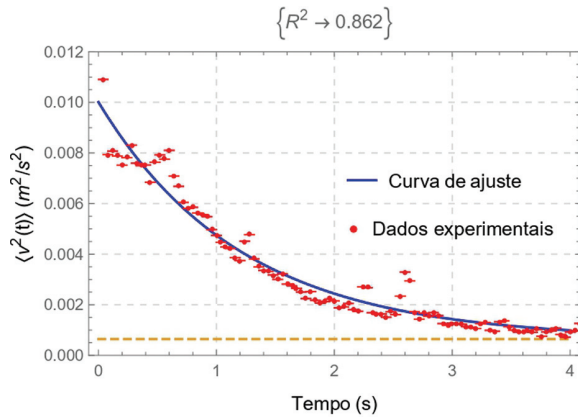


Figura 31: Velocidade quadrática média.

da velocidade quadrática média, equação (15), com os dados experimentais das velocidades obtidos com auxílio dos vídeos do movimento e o processamento deles via o software *Tracker*. Esse resultado pode ser visto na Figura (31). Observe que o comportamento é similar a curva associada da velocidade quadrática média que corresponde a um valor inicial $v^2(0)$ maior ao valor associado ao equilíbrio termodinâmico $3k_B T/m$, ver Figura (1). Utilizando a equação (15) podemos ajustar nossos valores da velocidade quadrática média das 18 partículas em cada instante de tempo. Realizando isto obtemos que para nosso caso o melhor ajuste é para a condição inicial da velocidade quadrática sendo $v^2(0) = 0,010 m^2/s^2$, a constante $3k_B T/m = 0,0006 m^2/s^2$ e o tempo de relaxação sendo $\tau = 2,42 s$. É interessante notar que conforme o tempo avança a velocidade quadrática média se aproxima de certo valor constante que será identificado como a parcela $3k_B T/m$.

Tendo apresentado anteriormente os gráficos da probabilidade acumulada e realizado o ajuste com a curva teórica esperada pela equação (21), os valores do parâmetro l^2 são determinados para cada instante de tempo. Isto implica que podemos obter o coeficiente de difusão D , analisando o comportamento do parâmetro l^2 no tempo, posto que é esperado que $l^2 = 4Dt$. Na Tabela 5 são apresentados os valores de $1/l^2$ obtidos dos processos de ajuste para cada instante de tempo das Figuras (9–29). Na mesma tabela são calculados os valores do coeficiente de difusão por meio da fórmula $D = l^2/4t$.

Por outro lado, supondo que temos um coeficiente de difusão constante, teremos uma dependência linear entre l^2 com o tempo. Na Figura (32) os valores experimentais de l^2 são mostrado em função do tempo e um ajuste linear é realizado. A inclinação esperada desta reta é $4D$ e portanto este ajuste nos fornece o valor estimado do coeficiente de difusão do nosso modelo mecânico. A estimativa encontrada para o coeficiente de difusão foi de aproximadamente $D \approx 101,05 \times 10^{-5} m^2/s$. Esse valor estimado é maior, mas próximo da ordem de grandeza daqueles encontrados para a difusão entre gases reais. Isto se deve a que nosso sistema possui poucas

Tabela 5: Valores para A e D para cada instante de tempo analisado.

Instante de tempo t (s)	Parâmetro $1/2$ (m^{-2})	Coefficiente de difusão $D \times 10^{-5}$ (m^2/s)
0,04	47929,50	13,04
0,20	3369,44	37,10
0,40	973,16	64,22
0,60	515,02	80,90
0,80	283,33	110,30
1,00	195,20	128,07
1,20	167,53	124,36
1,40	135,18	132,10
1,60	113,46	137,72
1,80	110,35	125,86
2,00	103,04	121,32
2,20	93,59	121,42
2,40	86,17	120,88
2,60	84,49	113,80
2,80	85,15	104,86
3,00	81,67	102,04
3,20	77,54	100,76
3,40	78,17	94,01
3,60	78,82	88,11
3,80	79,02	83,26
4,00	79,84	78,28

partículas e se assemelha a um gás muito diluído, em que a difusão é maior.

A continuação, na Tabela 6 são mostrados diferentes valores de coeficientes de difusão para alguns gases reais [15]. Pode-se verificar que nosso resultado experimental do coeficiente de difusão sendo $101,05 \times 10^{-5} m^2/s$ é da mesma ordem de grandeza.

Finalmente, uma outra maneira qualitativa de validar o modelo mecânico desse movimento microscópico é pela visualização das trajetórias das partículas brownianas. Em sua obra *Brownian movement and molecular reality*, o físico francês Jean Baptiste Perrin (1870–1942) expõe o estudo da trajetória real de três partículas brownianas registradas em um intervalo de 30 segundos [2]. A Figura (33) exhibe a análise feita por Perrin.

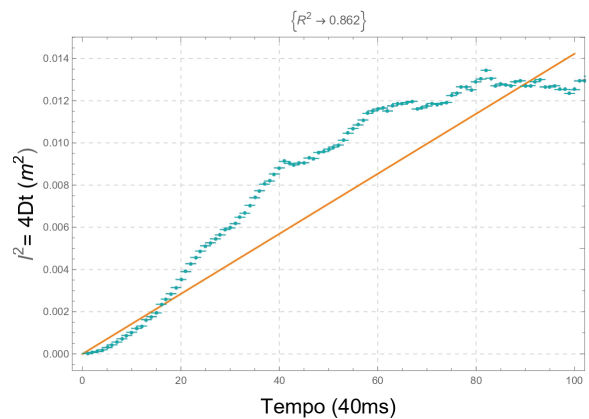


Figura 32: Retas de ajuste referente a equação $4Dt$.

Tabela 6: Coeficiente de difusão entre certos gases.

Componentes binários	Coefficientes de difusão $\times 10^{-5} (m^2/s)$
Ar - O ₂	1,75
Ar - H ₂	6,11
Ar - CO ₂	1,42
O ₂ - H ₂	6,97
O ₂ - CO ₂	1,6
H ₂ - CO ₂	6,4

O comportamento das trajetórias obtidas no presente trabalho é semelhante ao encontrado no estudo feito pelo J. Perrin. A Figura (34) exhibe as trajetórias de quatro bolinhas amarelas (partículas brownianas) em intervalos de 0,04s. Pode-se verificar nessa figura o formato em zigue-zague das trajetórias devido às incessantes colisões que acontecem.

5. Discussão e Conclusões

O movimento browniano além de ter sido um marco para a consolidação da teoria atômica no início do século XX, o fenômeno proporcionou o avanço em diversas outras áreas. Isso se deve principalmente ao seu caráter randômico, o que necessita de uma abordagem probabilística e estatística em contraponto a usual determinística. A emergência de uma ordem a partir de fenômenos aparentemente caóticos e o uso de métodos estatísticos são características das teorias mais modernas da física fundamental.

O modelo mecânico proposto visa proporcionar ao estudantes a observação macroscópica desse fenômeno físico o que facilita na compreensão dos conceitos presentes na teoria. Como maneira de validar esse experimento foram feitas comparações entre o que é esperado na teoria e o que foi obtido na prática. A curva teórica da probabilidade acumulada com os dados dos pontos experimentais exibiram uma concordância satisfatória o que é matematicamente comprovado por valores superiores à 0,75 do parâmetro estatístico R^2 . Além disso, a estimativa do coeficiente de difusão do modelo foi da mesma ordem de grandeza dos encontrados para a difusão entre gases. Isso se deve ao fato do elevado grau

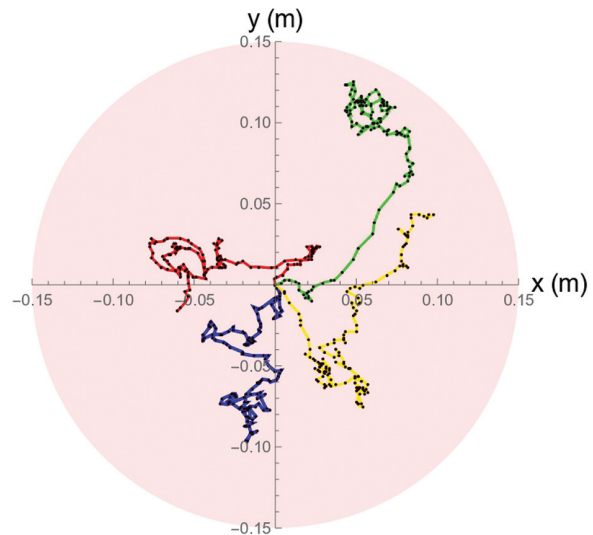


Figura 34: Trajetórias de quatro bolinhas amarelas do modelo mecânico proposto.

de agitação das bolinhas e de que o movimento entre elas são independentes. Essas características são próprias dos gases. E por fim, as trajetórias das bolinhas do modelo possuem o mesmo comportamento das partículas brownianas registradas por Perrin, como pode ser visto comparando as Figuras (33) e (34).

Já com respeito a melhorias desse experimento, uma base vibratória mais uniforme possibilitaria melhor resultados experimentais. Isso reflete no parâmetro da velocidade de drift que atua como um termo de advecção na equação de difusão. No modelo proposto, a haste do agitador magnético foi anexada ao centro do recipiente. Devido ao grau de agitação ser muito elevado, isso pode provocar o desbalanceamento do sistema. Por esse motivo é interessante adotar uma fonte vibratória que esteja em contato com toda a área da base do recipiente.

Tendo em vista a liberdade que temos de manipular características efetivas do nosso modelo mecânico como densidade do fluido (número de partículas no recipiente), temperatura do fluido (frequência e amplitude de agitação do oscilador mecânico) e tamanho das partículas brownianas, a perspectiva de estudos mais aprofundados é ampliada no nosso sistema. Assim pode-se estudar, por exemplo, a dependência do coeficiente de difusão em termos da energia de agitação do fluido e ter um resultado qualitativo que indicaria a dependência da difusão com a temperatura. Pode-se também, explorando a liberdade de mudar a densidade e número de partículas do fluido do nosso sistema, analisar a diferença qualitativa do movimento browniano em gases e líquidos. Desta forma se poderia obter uma estimativa das ordens de grandeza da difusão nessas fases da matéria.

Vemos assim que a versatilidade do modelo proposto abre possibilidades de explorar outros aspectos deste fenômeno estocástico. Concluímos que o modelo mecânico proposto atendeu satisfatoriamente a expectativa

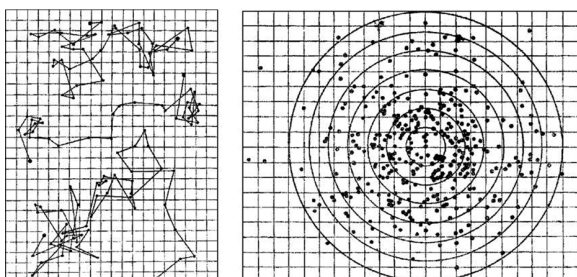


Figura 33: Estudo sobre trajetórias de partículas brownianas feito por Perrin.

de simular macroscopicamente o movimento browniano presente na difusão entre gases. Ademais, esse experimento é uma ótima ferramenta didática para o ensino de física das disciplinas que envolvem o conceito de difusão.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte da FAPERJ pela concessão de bolsa de Iniciação Científica, processo E-26/202.122/2017.

Referências

- [1] A. Einstein, em: *Investigations on the theory of the brownian movement*, editado por R. Furth (Dover Publications, New York, 1956).
- [2] J. Perrin, *Brownian movement and molecular reality* (Taylor and Francis, London, 1910).
- [3] D. Voss, *American Physical Society* **25**, 8 (2016).
- [4] http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more_stuff/Applets/Brownian/brownian.html, acessado em 20/11/2022.
- [5] J.S. Figueira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 4403 (2011).
- [6] D. Brown, W. Christian e Robert Hanson, *Video Analysis and Modeling Tool*, disponível em: <https://physlets.org/tracker/>, acessado em 28/03/2021.
- [7] S. Perez, B.F.N. Castro, N.C. Maia e C.S. Nascimento, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40**, e1503 (2018).
- [8] S. Salinas, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 263 (2005).
- [9] J.M. Silva e J.A.S. Lima, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 25 (2007).
- [10] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics* (Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford, 1996).
- [11] C. Nwafor e A. Oyedele, *European Journal of Business and Management* **9**, 68 (2017).
- [12] V. Mitic, G. lazovic e D. Milosevic, *Modern Physics Letters B* **35**, 2150076 (2021).
- [13] R. Kubo, *Reports on Progress in Physics* **29**, 255 (1966).
- [14] M. Alonso e E. Finn, em: *Curso de Física Básica*, editado por H.M. Nussenzveig (Blücher, Rio de Janeiro, 2002), v.2.
- [15] E. Cussler, *Binary diffusion coefficients of gases*, disponível em: https://www.researchgate.net/figure/Binary-diffusion-coefficients-of-gases-at-STP-Cussler-1984_tbl1_263350408, acessado em 15/09/2021.