

Efeito Faraday: entre a atividade óptica natural e a teoria dos elétrons

Faraday effect: between natural optical activity and the theory of electrons

Bruno Cesar da Silva Matos¹, Marcelo Costa de Lima^{*1}

¹Universidade Federal do Pará, Faculdade de Física, Belém, PA, Brasil.

Recebido em 15 de novembro de 2021. Revisado em 31 de janeiro de 2022. Aceito em 20 de fevereiro de 2022.

Neste trabalho descrevemos e analisamos o processo de transição dos pressupostos teóricos para descrição e fundamentação do efeito Faraday, ocorrido na segunda metade do século XIX. A partir dos artigos científicos originais, publicados nos periódicos da época, procuramos caracterizar como tais esforços buscaram inspiração inicial na lei de Biot da atividade óptica natural e na teoria da birrefringência circular de Fresnel. Daí surgiram as tentativas de descrição elastodinâmica do fenômeno. Os continuadores da obra eletromagnética de Maxwell, por sua vez, promoveram a transição para a fundamentação eletromagnética do mesmo e, conforme indicamos, tal abordagem somente se tornou viável com a hipótese iônica da matéria e a descoberta do elétron, no encerramento do século.

Palavras-chave: birrefringência circular, atividade óptica natural, atividade óptica magnética, hipótese iônica, elétron.

In this work we describe and analyze the process of transition of the theoretical assumptions for the description and foundation of the Faraday effect, which took place in the second half of the 19th century. From the original scientific articles, published in the journals of the time, we tried to characterize how such efforts sought initial inspiration from Biot's law of natural optical activity and from Fresnel's theory of circular birefringence. Hence, the attempts at elastodynamic description of the phenomenon emerged. The followers of Maxwell's electromagnetic work, in turn, promoted the transition to its electromagnetic foundation and, as we have indicated, such an approach only became viable with the ionic hypothesis of matter and the discovery of the electron, at the end of the century.

Keywords: circular birefringence, natural optical activity, magnetic optical activity, ionic hypothesis, electron.

1. Introdução

Em meados do século XIX a ciência eletrodinâmica baseava-se na ação instantânea à distância, entre elementos atomísticos de eletricidade. Nela, o magnetismo era encarado como resultado da interação eletrodinâmica das *correntes amperianas*, existentes ou induzidas no interior da matéria bruta. Podemos chamá-la *continental*, pois foi originada do trabalho de Ampère, na França, e de Neumann e Weber, na Alemanha. A luz, por sua vez, era encarada como distúrbio propagado através do éter luminífero de Fresnel, o qual suportava ondas transversais, e era descrita por *teorias elastodinâmicas da luz*. Uma nova ciência eletrodinâmica emergiu neste período, a qual se baseava na ação intermediada pelo campo e que via a eletrização como um estado, ou condição, das linhas de força a ele associadas. Podemos chamá-la *britânica*, pois teve origem nas especulações de Faraday e formalizada por Thomson e Maxwell. A ambição maior desta nova abordagem estava na possibilidade de entender a própria luz como um processo ondulatório deste mesmo campo, o que veio a materializar-se na

teoria eletromagnética da luz. A descoberta do efeito magneto-óptico por Faraday, em 1845, foi a primeira evidência experimental da relação entre luz e magnetismo. O entendimento dos mecanismos que o produz, porém, se mostrou desafiador a ambas abordagens, continental e britânica, e foi um dos campos de prova para a síntese produzida entre elas, no encerramento daquele século: a *teoria do elétron*.

Neste artigo analisamos os esforços para se estabelecer o mecanismo do efeito magneto-óptico, na segunda metade do século XIX. Por se tratar de um fenômeno de *atividade óptica induzida magneticamente*, tomamos como ponto de partida os trabalhos de Biot que culminaram no estabelecimento da lei da *atividade óptica natural*, ainda no contexto da óptica emissionista. Isso levou Fresnel à estabelecer a noção de *birrefringência circular* no contexto da óptica ondulatória. Descrevemos a abordagem inicialmente proposta para atividade óptica natural, no contexto da elastodinâmica da luz, e como ela inspirou a descrição da dinâmica da luz no efeito magneto-óptico, sempre associada à *birrefringência circular* de Fresnel. Com o advento da *teoria eletromagnética da luz*, passamos à tentativa frustrada de construção de um mecanismo eletromagnético para o fenômeno, no

* Endereço de correspondência: mclima@ufpa.br

programa de unificação óptico-eletromagnético, na obra de Maxwell. Discutimos, então, a gradual transição da abordagem do problema do contexto *elastodinâmico* para o contexto *eletromagnético*, pelos continuadores da obra eletromagnética de Maxwell. Como resultado da “solução de compromisso” entre a interação mediada pelo campo e a eletricidade atomística, produzida nos trabalhos de Lorentz, indicamos a emergência de dois mecanismos alternativos no contexto da *hipótese iônica* da matéria. Embora somente um destes mecanismos tenha sobrevivido aos nossos textos didáticos, na condição de *descrição clássica* do efeito magneto-óptico de Faraday, chamamos atenção à situação produzida nos anos de 1890 quando ambos, com qualidades e limitações de natureza distintas, reivindicavam seu lugar na descrição do efeito magneto-óptico, particularmente na obra de Drude. Por fim, a depuração destes mecanismos pela *teoria do elétron* às vésperas da proposição do modelo atômico de Bohr.

Nosso texto acompanha os acontecimentos em ordem cronológica, mas a matemática envolvida foi apresentada em linguagem e formalismo anacrônico. Por razões didáticas e de unidade do texto, acreditamos que essa licença se justifica.

É possível perceber, pelo que foi dito acima, que a narrativa que construímos perpassa importantes transições de paradigmas ocorridas no século XIX, como a eletrodinâmica de ação à distância em contraposição ao campo mediador da interação. Também a transição da óptica elastodinâmica para a óptica eletromagnética. As especulações sobre natureza e estrutura do éter luminífero também se fez presente em todos estes debates. Tais questões são o pano de fundo dos fatos aqui relatados e foram abordados tangencialmente, em várias ocasiões, por limitações impostas ao escopo que demos ao artigo. No entanto, procuramos fornecer um recorte que exhibe os elos importantes. Neste sentido, o presente artigo pode ser visto como um convite à leituras mais extensas, ao que indicamos [1, 2] para a ascensão da teoria ondulatória da luz. Para o papel central da física do éter no século XIX indicamos [3, 4]. Para os embates teóricos dentro da ciência eletrodinâmica [5]. Sobre a emergência da física alemã no período [6]. Para uma apreciação da depuração promovida pelos continuadores da obra eletromagnética de Maxwell [7].

2. A Atividade Óptica Natural

Em 1810, François Arago (1786–1853) descobriu o que foi chamado “polarização cromática” [8]: um feixe de luz branca polarizada atravessa uma fina lâmina de mica (moscovita), passando então ao analisador, tipicamente um cristal birrefringente como espato da Islândia, onde o raio sofre a bifurcação em ordinário e extraordinário, seguindo então ao olho do observador. Sob tais condições, Arago constatou que os raios ordinário e extraordinário adquirem cores, uma complementar a outra

(sua sobreposição produz o branco). Retirada a lâmina de mica do arranjo, as cores desaparecem. Girando o analisador ou a lâmina de mica em torno do eixo de visada, constatou que as cores percorriam o espectro cromático, mantendo-se porém uma complementar a outra sempre. A complementaridade das cores o fez relacionar o novo fenômeno com os anéis de Newton produzidos com luz branca, os quais também produzem cores complementares dos anéis de transmissão em relação aos de reflexão. Situação similar ocorreu com uma lâmina de gipsita no lugar da mica. Descobriu ainda que as cores dependiam da espessura da lâmina. Suas lâminas eram da ordem de fração de milímetros, mas lâminas demasiado finas em relação a isso, ou demasiado grossas não mais produzem cores.

Arago tomou então uma placa de cristal de quartzo de 6 milímetros de espessura, cortada perpendicularmente ao seu eixo óptico, e fez o feixe de luz branca polarizada passar ao longo do eixo, seguindo ao analisador e em seguida ao observador. Novamente os raios ordinário e extraordinário apresentaram cores complementares. Constatou, porém, que o giro do cristal de quartzo em torno do eixo de visada em nada afeta as cores, mas o giro do analisador faz as cores percorrerem o espectro cromático, mantendo-se as cores complementares, uma assimetria ausente no caso das lâminas cristalinas finas.

Deste modo, Arago descobriu dois mecanismos pelos quais cores são produzidas, por interferência, em meios cristalinos: O primeiro, como no caso da mica ou da gipsita, onde ocorre birrefringência linear na lâmina e nova birrefringência linear no analisador. O segundo, sobre o eixo óptico de quartzo, onde ocorre birrefringência circular no cristal, seguida de nova birrefringência linear no analisador. Somente Fresnel viria a produzir os meios para esta compreensão, nos anos de 1820.

A partir de 1811, Jean-Baptiste Biot (1774–1862) produziu uma profusão de dados quantitativos relativos à polarização cromática [9]. Determinou sua dependência com a espessura da lâmina cristalina, do ângulo entre o plano de polarização da luz incidente e o eixo do cristal, bem como do ângulo entre a orientação do analisador e do polarizador. Tomando a lâmina cortada de modo que o eixo óptico situava-se na face da mesma, concluiu que a rotação desta em seu próprio plano, mantidos fixos o polarizador e o analisador, altera somente a intensidade da luz observada, mas não o matiz. Disso concluiu que um subconjunto bem definido de cores do raio polarizado incidente não era afetado, enquanto que o subconjunto complementar a este tinha polarização alterada pela lâmina. Tentou determinar tal modificação dos raios afetados a partir da Lei de Malus. Correlacionou os efeitos da inclinação da lâmina do cristal aos efeitos do ângulo de incidência correspondentes nos anéis de Newton produzidos com luz branca, de transmissão e reflexão. Inicialmente não procurou explicar a origem das cores, apresentando apenas dados experimentais.

Biot foi um emissionista, do círculo íntimo de Laplace e da *Societè de Arcueil*, e não tardou em justificar os fenômenos da polarização cromática a partir da dinâmica de partículas luminais [1]. Na visão dele, as “*moléculas*” luminais sofriam diferentes “*forças polarizantes*”, dentro do cristal, que lhes comunicavam diferentes movimentos em torno de seus centros de gravidade [10]. No cristal uniaxial tais forças atuavam no plano que contém o raio de luz e o eixo do cristal. As “*forças polarizantes ordinárias*” promoviam o alinhamento dos eixos das partículas luminais com o plano de polarização, enquanto que as “*forças polarizantes extraordinárias*” promoviam o alinhamento perpendicularmente a este plano. Chamou este estado de *polarização fixa*. Tais forças, porém, seriam igualmente capazes de comunicar oscilações às “*moléculas*” de luz, o que justifica a designação “*teoria das polarizações móveis*” ou “*teoria das polarizações sucessivas*”, como ficou conhecida. Caracterizou os resultados obtidos na gipsita como decorrentes das oscilações da polaridade das “*moléculas*” luminais, em torno do eixo óptico da lâmina, oscilações estas cujas frequências dependem da cor. Extensão da teoria newtoniana dos acessos [11, 12], a teoria das polarizações móveis permitiu exibir a correspondência entre as cores obtidas em finas lâminas e as cores obtidas nos anéis de Newton de transmissão e reflexão. No caso do quartzo, cortado perpendicularmente ao eixo óptico, demonstrou que a ação deste era a de uma rotação do plano de polarização da luz incidente. Observou primeiramente a propriedade rotatória da “*direita para a esquerda*”¹ e, posteriormente, da “*esquerda para a direita*”, conforme a variedade do quartzo. Sugeriu que as cores estavam associadas ao movimento de rotação contínua das “*moléculas*” luminais, em torno dos seus centros de gravidade, uma “*polarização rotatória*”, sendo a frequência de rotação dependente da cor. Admitiu isso como hipótese, sem no entanto ser capaz de estabelecer a correspondência das cores, a cada espessura do quartzo, com aquelas observadas nos anéis de Newton; correspondência estabelecida com sucesso para a sucessão das cores na gipsita.

Em 1815, Biot fez então a descoberta fundamental de que o óleo de terebintina puro possui as mesmas propriedades rotatórias que o quartzo, cortado perpendicularmente ao eixo [13], embora no cristal o efeito fosse aproximadamente 80 vezes mais forte. Constatou que a rotação produzida na terebintina é esquerda, e que dependia do comprimento percorrido pela luz no meio, afirmando que

“*Eis aqui, acredito, o primeiro exemplo de fenômenos de polarização sucessiva produzido no interior de um fluido completamente homogêneo, onde não podemos supor qualquer arranjo regular de partículas.*” [Biot, [13], p. 192]

Biot descobriu, ainda, poder rotatório esquerdo no óleo essencial de louro. No óleo essencial de limão e na dissolução de cânfora em álcool encontrou poder rotatório direito, havendo encontrado assim as duas helicidades já encontradas antes em cristais de quartzo. Descobriu que fluidos de helicidades contrárias, misturados nas proporções adequadas, neutralizam o poder rotatório um do outro. Apontou a atividade óptica como critério para investigar se substâncias similares como o açúcar de cana e o de beterraba, dotados de poder rotatório, seriam de fato absolutamente idênticas. Tais descobertas mostraram que o fenômeno da **atividade óptica** não estava atrelado somente à propagação da luz em cristais birrefringentes.

2.1. A lei de Biot

A descoberta do poder rotatório em meios não cristalinos levou Biot a suspeitar que a atividade do quartzo, sobre o eixo, não provinha da estrutura cristalina, mas de suas moléculas. A atividade rotatória do óleo de terebintina, que tem as mesmas características do quartzo, dificilmente poderia ser atribuída a alguma estrutura interna que não a molecular [14]. Estabeleceu então uma lei empírica para a rotação do plano de polarização da luz que atravessa o cristal de quartzo, ao longo do seu eixo óptico. Podemos enunciá-la dizendo que o ângulo de rotação do plano de polarização, $\Delta\theta$, é proporcional a espessura da placa de quartzo, d , cortada perpendicularmente ao seu eixo óptico, e inversamente proporcional ao quadrado do comprimento de onda no vácuo, λ , para as sete cores espectrais definidas por Newton:

$$\Delta\theta = \frac{\alpha}{\lambda^2} d, \quad (1)$$

em que α é um parâmetro dependente do poder rotatório do meio. Como era emissionista, enunciou a lei com ênfase à noção de fácil acesso da óptica newtoniana:

“*[...] reconheci que [...] eram reciprocamente proporcionais aos quadrados dos comprimentos de seus acessos, ou ao quadrado dos comprimentos de suas vibrações do sistema ondulatório.*” [Biot, [14], p. 380]

Biot ampliou o alcance desta lei aos líquidos [15], escolhendo o raio vermelho como padrão, estabelecendo-a primeiramente na terebintina. Usando luz branca, investigou as distintas atividades para diferentes cores, todas de rotação esquerda. Cada coluna da terebintina tinha sua atividade compensada por uma lâmina de cristal de quartzo 70 vezes mais estreita e de rotação oposta, de modo que cada raio simples, componente da luz branca, transmitido através do conjunto terebintina mais lâmina, tinha sua direção de polarização primitiva restaurada. Assim estabeleceu a identidade da lei de rotação na terebintina e no cristal de quartzo. Por meios similares encontrou a mesma lei na dissolução de açúcar da cana (direita), em sentido oposto ao da terebintina,

¹ Na nomenclatura atual: esquerda, ou anti-horária, ou positiva.

no óleo essencial de limão (direita), na dissolução alcoólica de canfora e “todas as outras substâncias que pude experimentar até aqui.” Reforçou sua conclusão de que tudo “parece indicar de forma bem evidente um poder que pertence às partículas elas mesmas”.

Alterando a concentração de terebintina pela mistura de óleos graxos, opticamente inativos, Biot demonstrou a diminuição do poder rotatório com o “número de partículas da essência” nela contido. Além de neutralizar o poder rotatório da terebintina com a dissolução alcoólica de cânfora, demonstrou que a mesma neutralização podia ser feita pela mistura da essência de limão com a terebintina, nas proporções volumétricas bem definidas. Mostrou, assim, que nas soluções a constante α em (1) depende da concentração da substância opticamente ativa.

Por fim, Biot demonstrou a ação rotatória da terebintina em estado de vapor, o que demandou um sofisticado arranjo experimental com um tubo de 30 metros, funcionando como reservatório para o gás, uma caldeira para produzir o calor necessário a mantê-la em estado gasoso, termômetros em toda a extensão do tubo, para controle da uniformidade da temperatura, a qual devia ser a mais baixa possível e alta o suficiente para evitar a precipitação em estado líquido. Não pôde verificar a identidade do sentido da rotação no estado de vapor, pois o aparato experimental explodiu! Mesmo assim, considerou consolidada sua premissa de que a atividade óptica natural não tinha relação como a estrutura cristalina das substâncias, mas que era uma faculdade individual das próprias partículas constituintes das substâncias opticamente ativas. A constatação final de que o sentido da rotação também é preservado no estado de vapor da terebintina somente foi demonstrado muitos anos depois [16]. A *mémoire* de Biot completa [17] foi publicada nas memórias da Academia de Ciências de Paris, em 1819.

3. Resignificando as Polarizações Móveis

Apesar dos feitos extraordinários de Biot no âmbito experimental, o arcabouço teórico com o qual ele interpretou a formação das cores nas lâminas cristalinas finas e na atividade óptica estava com os dias contados. A ascensão da teoria ondulatória da luz se tornou inexorável a partir dos anos de 1820.

Em 1819, Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) e Arago demonstraram a impossibilidade de produzir interferência com os raios ordinário e extraordinário [18]. Para Fresnel, este fato foi a chave para o entendimento da transversalidade da luz e para dar sentido ao conceito de polarização, no contexto da teoria ondulatória: os raios ordinário e extraordinário são incapazes de interferir pois correspondem a modos de vibração transversais, um ao outro, e ambos à direção de propagação, conforme ilustramos na Figura 1. Nisso consiste a ortogonalidade dos modos de polarização ordinário e extraordinário.

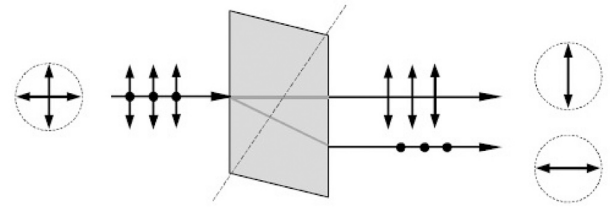


Figura 1: A birrefringência no espato da Islândia entendida a partir da hipótese da transversalidade de Fresnel: o raio incidente, não polarizado, dá origem aos raios ordinário e extraordinário de velocidades distintas, no interior do espato. Estes últimos não são capazes de formar padrões de interferência, pois correspondem a vibrações mutuamente ortogonais.

Fresnel assumiu a hipótese da transversalidade da luz, explicitamente, em 1821 [19]. Para justificá-la em bases dinâmicas admitiu que o éter luminífero deveria ser um tipo de sólido elástico, infinitamente rígido à compressão, porém elástico sob tensões cisalhantes. Em sua teoria da birrefringência [20] caracterizou o cristal biaxial como aquele que admite três “eixos de elasticidade”, mutuamente ortogonais, aos quais se associavam três distintas “elasticidades”, que podemos anacronicamente colecionar na matriz

$$\mathbf{K} \equiv \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Se \hat{p} caracteriza o modo de polarização e \hat{s} identifica à normal à frente de onda, a hipótese da transversalidade pode ser expressa de forma anacrônica como

$$\hat{p} \cdot \hat{s} = 0.$$

Fresnel impôs que a direção de polarização, \hat{p} , no interior do cristal, é aquela que extremiza a velocidade, v , da propagação a ele associada, para uma direção de propagação, \hat{s} , dada. Disso resulta que é possível determinar os estados de polarização \hat{p} e suas correspondentes velocidades v , para uma direção da normal à onda \hat{s} , conhecidas “as elasticidades”, K_{mn} . De forma anacrônica, isso equivale ao problema de autovalor²

$$v^2 p^i = (\delta^{im} - s^i s^m) K_{mn} p^n. \quad (3)$$

A birrefringência em cristais uniaxiais é recuperada tomando-se duas das elasticidades em (2) iguais. Se escolhermos o eixo z coincidente com o eixo óptico do cristal, teremos então

$$\mathbf{K} \equiv \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

como ocorre, por exemplo, no cristal de quartzo.

² Adotamos aqui a convenção da soma: a presença de índices repetidos, na mesma expressão indicial, indica a soma sobre todos os valores assumidos por eles. Assim, por exemplo $K_{mnp} = K_{m1p} + K_{m2p} + K_{m3p}$.

Com as polarizações fixas, Fresnel explicou o surgimento das cores em finas lâminas cristalinas. Cada raio ordinário e extraordinário, produzido quando a luz polarizada atravessa a lâmina, sofre nova dupla refração ordinária e extraordinária no analisador (também birrefringente). Assim, os novos pares de raios ordinário e extraordinário podem ter vibrações segundo as mesmas direções e então interferir produzindo as cores. O cálculo das interferências construtivas/destrutivas, assim produzidas em sucessão, permitiram a Fresnel fornecer um quadro explicativo dos dados de Biot, agora pela teoria ondulatória.

O caso do quartzo era mais desafiador. O eixo óptico é o lugar onde a birrefringência linear desaparece. Assim, se poderia imaginar que o quartzo não tivesse ação sobre a luz quando esta se propaga ao longo do eixo. No entanto, ele apresenta atividade óptica. Fresnel então concebeu um estado de polarização que pode ser pensado como superposição de dois estados de polarização fixa, de mesma amplitude, mutuamente ortogonais, porém um atrasado ou adiantado de 1/4 de comprimento de onda em relação ao outro. Isso produz um estado no qual o vetor polarização pode rotacionar continuamente em torno do eixo de propagação, à esquerda ou à direita, dependendo do atraso ou adiantamento, à medida que a onda avança. Nasceu assim a *polarização circular*. Inversamente, dois modos de polarização circular, um esquerdo, outro direito, seguindo na mesma direção, e de mesma velocidade, podem sobrepor-se formando uma polarização fixa.

Supondo agora que as duas polarizações circulares, de mesma frequência, possuem velocidades diferentes, Fresnel argumentou que a polarização fixa resultante estará fora de fase a cada passo da onda, podendo esta interferência ser construtiva ou destrutiva, dependendo da distância percorrida pelos raios. Fresnel assim concebeu uma **birrefringência circular**. Supôs que o quartzo possui não somente a **birrefringência linear**, caracterizada por (4), mas também a circular, que se manifesta ao fazermos a luz percorrer o cristal sobre seu eixo óptico, quando a linear é suprimida (Figura 2). O físico francês realizou então um *experimentum crucis* para demonstrar a hipótese da birrefringência circular [21, 22], confirmando-a. Também forneceu evidência de que tal birrefringência do quartzo é bastante distinta para as diversas cores do espectro, sendo mais intensa no violeta do que no vermelho, daí tê-la chamado “*dispersão da dupla refração*” [23]. Admitindo que variava com λ^{-1} obteve a lei de Biot, agora entendida dentro dos pressupostos de uma óptica ondulatória, da combinação da birrefringência circular do quartzo e do princípio da interferência. O mesmo seria o caso da atividade óptica nos líquidos (Figura 3).

Fresnel ressignificou completamente, deste modo, o conceito de polarização da luz, herdado dos emissionistas, e introduziu a nomenclatura atual dos estados de polarização: a *retilínea* ou *linear* e a *circular*, esquerda

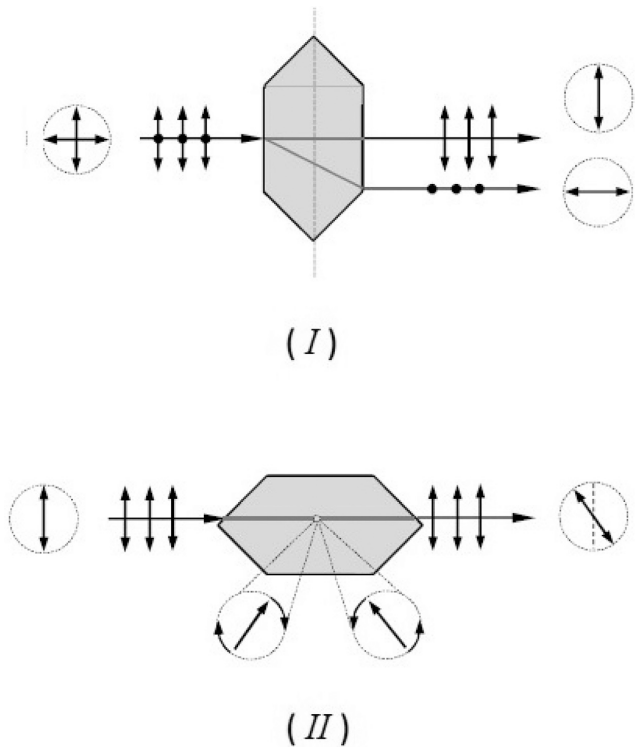


Figura 2: (I) A birrefringência linear no quartzo: o raio incidente, não polarizado, o atravessa perpendicularmente ao eixo óptico, dando origem aos raios ordinário e extraordinário, analogamente ao espató da Islândia. (II) A birrefringência circular no quartzo: o raio incidente, linearmente polarizado, atravessa o quartzo ao longo de seu eixo óptico e emerge linearmente polarizado, porém com o plano de polarização rotacionado (lei de Biot). No interior do quartzo coexistem dois modos de polarização circular, esquerdo e direito, propagando-se com velocidades distintas.

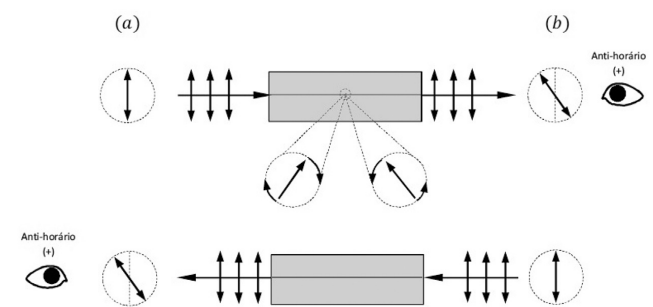


Figura 3: Ilustração de um raio de luz, inicialmente plano polarizado, propagando-se através de um fluido dotado de **atividade óptica natural**. No percurso de ida de (a) para (b) sofre rotação anti-horária segundo o ponto de vista do observador em (b), que identifica o meio como *esquerdo*. Tomando-se a propagação em sentido inverso, um observador em (a) igualmente caracterizará a rotação como anti-horária, segundo o seu ponto de vista, e o identifica como *esquerdo*. Como resultado, o plano de polarização de um mesmo raio polarizado que atravessa o meio opticamente ativo num percurso de ida e volta, não sofre rotação alguma. O mesmo cancelamento ocorreria se o meio opticamente ativo fosse *direito*.

ou direita, conforme descritas acima. Ao que antes era considerada a luz “*completamente despolarizada*” associou a polarização *elíptica*, esquerda ou direita. Estabeleceu assim qual é o equivalente ondulatório de todas as situações caracterizadas por Biot em sua teoria das polarizações móveis, superando-a.

4. Formulação Dinâmica da Birrefringência Linear e Circular

Um importante legado de Fresnel para a óptica teórica foi criar a demanda por uma fundamentação dinâmica da propagação da luz, pensada como onda de deformação transversal em um éter com características de sólido elástico. Na década de 1830, várias teorias dentro desta linha de abordagem descreveram a dinâmica da luz no meio não dispersivo, através de sistemas de equações diferenciais parciais para o campo de deformação elástica do éter. Iniciada por Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) [24, 25] e, independentemente, Franz Ernst Neumann (1798–1895) [26], esta **elastodinâmica da luz** evoluiu para a formulação lagrangiana da dinâmica do campo com George Green (1793–1841) [27] e James MacCullagh (1809–1847) [28, 29]. A birrefringência linear esteve presente nas considerações destes autores, em suas formulações da óptica de meios cristalinos, mas foi MacCullagh quem primeiro formulou uma descrição da birrefringência circular. Em 1836, MacCullagh propôs uma equação elastodinâmica da luz, incorporando a “*propriedade peculiar do cristal de quartzo*” [30], caracterizando a birrefringência circular a partir de termos de terceira ordem na equação de onda.

No que segue descreveremos os aspectos básicos da formulação de MacCullagh, em formalismo matemático anacrônico. Introduzimos o campo vetorial

$$\vec{e} = \vec{e}(\vec{r}, t) = (e_x, e_y, e_z), \quad (5)$$

que representa a deformação do meio etéreo, em um dado ponto \vec{r} e em um instante t . As deformações compressoriais (ψ) e rotatórias ($\vec{\eta}$) a ele associadas são,

$$\psi = \nabla \cdot \vec{e}, \quad \vec{\eta} = \nabla \times \vec{e}, \quad (6)$$

respectivamente. O campo $\vec{\eta}$ se associa à onda puramente transversal, isto é, carrega os graus de liberdade da luz.

A equação postulada por MacCullagh para a onda luminosa no cristal de quartzo é então³

$$\rho \frac{\partial^2 e^i}{\partial t^2} = \epsilon^{ibm} K_{ab} \partial_m \eta^a - c^2 C \nabla^2 \eta^i, \quad (7)$$

³ Denotamos por ∂_m a derivada parcial com relação à coordenada x^m , sendo $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Por ∇^2 denotamos o laplaciano usual. Por fim, ϵ^{ibm} é o símbolo de Levi-Civita, definido como usualmente ($\epsilon^{123} = 1$).

sendo que ρ é a densidade do meio luminífero,⁴ a qual MacCullagh assume ser a mesma dentro e fora da matéria bruta. Esta matéria, por sua vez, modifica as propriedades elásticas do éter livre (o vazio). O termo da matriz das elasticidades de Fresnel, K_{ab} , descreve a birrefringência linear, enquanto que o termo associado à constante C descreve a birrefringência circular. A constante c é a velocidade da luz no éter livre.

Tomando-se a divergência de (7) resulta que a equação para ψ é

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

e conseqüentemente o meio de MacCullagh não sustenta ondas compressoriais ou acústicas.

Vejamus que a equação (7) descreve a birrefringência linear, conforme estabelecida por Fresnel. Fazendo, por enquanto, $C = 0$ e tomando o rotacional da equação, resulta para o modo transversal

$$\rho \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} = -K^{ab} (\partial_i \partial_b - \delta_{ib} \nabla^2) \eta_a. \quad (9)$$

Uma solução de onda plana harmônica, de frequência ω , velocidade v , propagando-se na direção \hat{s} , de polarização \hat{p} , pode ser caracterizada como

$$\vec{\eta} = \eta_0 \hat{p} \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{\hat{s}}{v} \cdot \vec{r} \right) \right\}, \quad \hat{s} \cdot \hat{p} = 0. \quad (10)$$

Substituindo-a em (9), e fazendo $\rho = 1$, resulta

$$v^2 p_i = (\delta_{ib} - s_i s_b) K^{ba} p_a,$$

que nada mais é que o problema de autovalor de Fresnel (3).

Retornando ao caso $C \neq 0$, em (7), vejamos como o parâmetro C descreve a birrefringência circular. Como o cristal em questão é o quartzo, a matriz das elasticidades de Fresnel é então (4), entendido que z coincide com o eixo óptico. Além disso, tomamos a luz se propagando paralelamente ao eixo óptico e portanto

$$\vec{e} = \vec{e}(z, t), \quad \vec{e} \cdot \hat{z} = 0.$$

Em tais condições, (7) se reduz à

$$\frac{\rho}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = -\frac{c^2}{a^2} C \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial z^3}. \quad (11)$$

Esta equação não admite soluções de ondas plano polarizadas, mas admite modos de polarização circular esquerdo e direito, propagando-se com velocidades

⁴ MacCullagh tomou a densidade do éter, ρ , constante dentro e fora da matéria bruta, assumindo-a unitária. Embora ela não desempenhe nenhum papel dinâmico em sua teoria, tomamos a liberdade de explicitá-la, para melhor clareza da natureza mecânica da equação da onda e, também, por razões dimensionais. Assim, as “*elasticidades*” de Fresnel, K_{ab} , serão, dimensionalmente, módulos elásticos.

distintas. Tomando-se a luz incidente monocromática, plano polarizada, de frequência $\omega = c/\lambda$, sendo λ o comprimento de onda no vácuo, a qual penetra no cristal paralelamente ao seu eixo óptico, a rotação do plano de polarização, após percorrer uma distância d no interior do cristal, será⁵

$$\Delta\theta = -2\pi^2\rho\frac{c^4}{a^4}C\frac{1}{\lambda^2}d, \tag{12}$$

o que permitiu a MacCullagh deduzir a lei de Biot (1).

As duas variedades do quartzo, esquerda e direita, podem então ser entendidas como dotadas da constante C negativa e positiva, respectivamente. Tomando dados de Biot ($\Delta\theta, d$) e Rudenberg (a), bem como o comprimento de onda do vermelho tomado da linha “ C ” de Fraunhofer (λ), MacCullagh estimou o poder rotatório de quartzo, encontrando $C = 1/20$ de bilionésimo (10^{-9}) de polegada.

Em 1839, MacCullagh formalizou sua teoria da birrefringência linear, o caso $C = 0$, a partir de uma abordagem lagrangiana [29]. Introduziu um potencial elástico dependente exclusivamente das deformações rotacionais ($\vec{\eta}$), definido por

$$\mathcal{U}_{mac} := \frac{1}{2}K_{ab}\eta^a\eta^b. \tag{13}$$

As elasticidades de Fresnel, K_{ab} , são aqui entendidas como coeficientes de uma *rigidez rotatória* do éter, no meio anisotrópico. Nesta teoria tem-se, portanto, uma elasticidade não hookesiana.

A densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{mac} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}K_{ab}\eta^a\eta^b, \tag{14}$$

e a dinâmica, decorrente do princípio da mínima ação, $\delta\mathcal{L}_{mac} = 0$, num domínio sem fronteiras, torna-se

$$\rho\frac{\partial^2 e^i}{\partial t^2} = \epsilon^{ibm}K_{ab}\partial_m\eta^a, \tag{15}$$

portanto, a mesma que (7) com $C = 0$.

No meio isotrópico temos simplesmente que

$$K_{ab} = \kappa\delta_{ab}, \tag{16}$$

sendo κ a rigidez rotatória do meio (a qual pode ainda diferir do valor de referência κ_0 do éter livre). Nestas condições o lagrangiano (14) reduz-se a

$$\mathcal{L}_{mac} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\kappa|\nabla \times \vec{e}|^2, \tag{17}$$

e a equação da onda (15) toma a forma

$$\rho\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = -\kappa\nabla \times \nabla \times \vec{e}. \tag{18}$$

⁵ O leitor encontrará a dedução de (12) no Apêndice A, como o caso $q = 0$, $n_0 = c\sqrt{\rho}/a$ e $\nu = c^2C/a^2$ da equação (A24).

Em um domínio delimitado por fronteiras é necessário estabelecer condições de contorno sobre as mesmas. A exigência de que a dinâmica do sistema obedece ao princípio variacional em dois domínios, separados pela fronteira comum, permite prescrever quais condições de continuidade devem ser asseguradas sobre a fronteira. MacCullagh assim estabeleceu que os componentes tangenciais de \vec{e} e $\kappa\nabla \times \vec{e}$ são contínuos através da fronteira de separação entre dois domínios distintos (por exemplo κ_1 e κ_2). Se chamamos Σ a interface de separação entre dois domínios e $[\]_{\Sigma}$ a descontinuidade através de Σ , da grandeza envolvida pelos colchetes, as condições de contorno de MacCullagh, podem então ser expressas como

$$\left[\vec{e}_{\parallel}\right]_{\Sigma} = 0, \quad \left[(\kappa\nabla \times \vec{e})_{\parallel}\right]_{\Sigma} = 0. \tag{19}$$

MacCullagh firmou, assim, uma fundamentação dinâmica para (7) nos meios sem dispersão rotatória ($C = 0$) em um éter que foi qualificado de “*quase material*”, por suas propriedades elásticas exóticas.

5. A Descoberta da Birrefringência Circular Magneticamente Induzida

Michael Faraday (1791–1867) iniciou sua vida científica autônoma nos anos de 1820. A descoberta da ação magnética da corrente elétrica por Oersted, em 1820, captou sua atenção imediata, levando-o a construção do primeiro motor elétrico, o “homopolar”, e culminando com a sua descoberta da indução eletromagnética em 1831 [31].

Já em 1822 Faraday buscava encontrar “*alguma ação despolarizadora*” da força elétrica sobre a luz polarizada, ao fazer passar um feixe de luz polarizada através de um capacitor com preenchimento dielétrico de água pura. Também testou com o sulfato de sódio e com o ácido sulfúrico, todos colocados em uma cuba de vidro entre as placas do capacitor. Nenhuma ação encontrou [32].

Em 1824, Humphry Davy (1778–1829), então presidente da Royal Society e ex-mentor de Faraday, juntamente com o Conselho daquela sociedade, estabeleceram um Comitê para o aperfeiçoamento de vidros para finalidades ópticas. O mesmo era composto de membros da Royal Society e do Conselho das Longitudes. Logo surgiu a necessidade de um subcomitê, para o qual foram indicados John Herschel, Dollond e Faraday, do qual restaram, até março de 1829, apenas Dollond e Faraday. Cabia a Faraday a investigação quanto à composição química dos vidros e, para tanto, uma sala e fornalhas foram construídas nas dependências da própria Royal Institution. Segundo Faraday nos conta, as propriedades gerais de transparência, dureza e certo poder tanto refrativo quanto dispersivo são facilmente alcançadas na manufatura dos vidros. Já a condição essencial nos dispositivos ópticos, a qual é de grande dificuldade ser alcançada, é a perfeita homogeneidade de sua composição e estrutura. Nesse contexto se deparou com os

vidros de borato de chumbo e de borato de chumbo com sílica, o *borossilicato de chumbo* (uma proporção de sílica, ácido bórico e óxido de chumbo), vidros duros que apresentavam desempenho satisfatório como substituto do vidro *Silex* na construção de telescópios. Faraday guardaria por anos uma amostra do borossilicato de chumbo no laboratório, até que a mesma viesse a se tornar protagonista de descobertas históricas quinze anos mais tarde, e que iremos relatar. O resultado das atividades do comitê resultou na Bakerian Lecture “*On the manufacture of glass for optical purposes*”, uma dentre várias que Faraday leu perante a Royal Society durante sua carreira [33].

Em 1833, Faraday investigou a possibilidade da ação tanto da corrente elétrica contínua quanto da indução eletromagnética (ao se estabelecer e interromper o contato elétrico) sobre a luz polarizada. Testou através de substâncias que se decompõe, por eletrólise, bem como as que não se decompõe (como nitrato de prata, vidro, etc.), enquanto em estado sólido. Conforme se lê em seu diário “*Não vejo razão para esperar que qualquer tipo de estrutura ou tensão possam ser evidenciados em corpos decomponíveis ou não decomponíveis, em estados isolantes ou condutores*” [32].

A descoberta da capacidade indutiva específica dos dielétricos (a constante dielétrica), em fins de 1837, teve grande impacto sobre sua concepção de como ocorre a ação elétrica [34]. Esse fato o fez tomar com maior seriedade sua ideia de “*linhas de força*” como agentes intermediadores de uma ação contígua através do espaço, transmitida ponto a ponto, em linhas curvas, em oposição à ação à distância, transmitidas instantaneamente entre dois pontos, em linha reta. Também irá despertar o interesse do jovem William Thomson (1824–1907) pelas concepções de Faraday, levando-o a iniciar a formalização matemática das linhas de força nos anos de 1840. Foi assim que, em agosto de 1845, Thomson correspondeu-se com Faraday inquirindo-o sobre uma eventual ação da polarização dielétrica na luz polarizada. Faraday respondeu em 8 de agosto:

“*Já trabalhei bastante sobre o estado de um dielétrico no que diz respeito à luz polarizada, e você encontrará meus resultados negativos nos parágrafos 951–955 de meus Experimental Researches [...] Também trabalhei duramente sobre dielétricos cristalinos para descobrir alguma condição molecular nos mesmos (ver par. 1688, etc.), mas somente pude obter resultados negativos.*” [Faraday in [35], p. 149.]

O diário de laboratório mostra que, instigado por Thomson, Faraday retomou experimentos para investigar a ação de dielétricos polarizados sobre a luz polarizada, nada encontrando novamente. Em anotação de 30 de agosto vê-se que retomou experimentos com a luz polarizada através de eletrólitos, vidro, quartzo e espato da Islândia. Em 5 de setembro, usou o seu velho

bloco de vidro pesado, de borossilicato de chumbo, como isolamento dielétrico entre as placas perfuradas de um capacitor “*de modo a olhar através do vidro ao longo das linhas da ação indutivas*” e nada encontrou. O que veio a seguir Whittaker [3] qualificou de “*um segundo período de brilhantes descobertas*”: a existência do efeito magneto-óptico e do diamagnetismo.

Em 13 de setembro de 1845, Faraday fez a luz plano polarizada passar através do bloco de vidro pesado, primeiramente com polos magnéticos, tanto opostos quanto iguais, em lados opostos do percurso da luz. Nenhum efeito. Então, dispôs os polos opostos do mesmo lado do percurso da luz e um efeito foi produzido sobre a mesma [36], constatando que o plano de polarização sofrera rotação esquerda ao atravessar o borossilicato, na presença do campo magnético externo, aplicado no mesmo sentido do raio de luz. Após isso, revelou o mesmo efeito nos vidros *Silex* e *Crown*. Descobriu assim o efeito magneto-óptico.

Nos líquidos Faraday o encontrou na água, no álcool, no éter, em grau decrescente de intensidade. Nos óleos de amêndoa, de oliva, de rícino, de papoula, de linhaça, de baleia, e outros, também o encontrou. Óleos essenciais de terebintina, de espiga de lavanda, de jasmim, de louro, etc., também exibiram a atividade óptica magneticamente induzida. Também distintos hidrocarbonetos como óleo de enxofre fundido, cloreto de enxofre, cloreto de arsênio, etc. O encontrou em grande diversidade de substâncias aquosas, mas conjecturou que nelas a água fosse o elemento ativo.

No ar ou em “*corpos gasosos*” como oxigênio, hidrogênio, nitrogênio, óxido nitroso, ácido sulfúrico, ácido muriático, etc., nada encontrou. Também no vazio não encontrou efeito algum. Atribuiu assim a rotação à interação indireta da luz com o campo magnético:

“*As forças magnéticas não agem sobre o raio de luz diretamente e sem a intervenção da matéria, mas através da mediação da substância na qual estas e o raio tem uma existência simultânea [...]. Isto é mostrado pela não ação do vácuo, do ar ou gases, e é também ainda mostrado especialmente pelo grau em que diferentes materiais possuem a propriedade. [...] que as substâncias são necessárias, e que atuam em diferentes graus, mostra que o magnetismo e a luz agem um sobre o outro através da intervenção da matéria.*” [Faraday, [37], parágrafo 2224]

Entre as substâncias dotadas de atividade óptica natural Faraday listou sólidos, líquidos e meios cristalinos, nos quais o novo efeito foi observado. Notou que a rotação induzida pelo campo magnético apenas se sobrepunha àquela que ocorre naturalmente. Porém, enquanto que no caso da atividade óptica natural, o giro é desfeito ao fazer o raio retornar por reflexão, pelo mesmo percurso, na atividade óptica magneticamente induzida o mesmo não ocorre, havendo uma rotação em

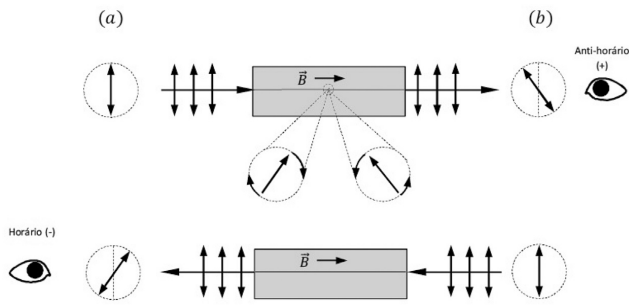


Figura 4: Ilustração de um raio de luz, inicialmente plano polarizado, propagando-se através de um material dotado de **atividade óptica induzida magneticamente**. No percurso de ida de (a) para (b), movendo-se no mesmo sentido em que aponta o campo magnético, sofre rotação anti-horária segundo o ponto de vista do observador em (b), que o define como *esquerdo*. Tomando-se a propagação em sentido inverso, movendo-se em sentido oposto ao campo magnético, um observador em (a) caracterizará a rotação como horária, segundo o seu ponto de vista. Como resultado, o plano de polarização de um mesmo raio polarizado que atravessa o meio cuja atividade óptica foi induzida magneticamente, num percurso de ida e volta, sofre rotação em dobro.

dobro para o raio de luz que percorre o caminho em ida e volta (mantido fixo o campo magnético). Dito de outro modo, enquanto que na atividade óptica natural a rotação depende do sentido de propagação do raio na amostra (Figura 3), na atividade óptica magneticamente induzida a rotação depende exclusivamente do sentido do campo magnético aplicado (Figura 4).

Substituindo os polos do ímã por solenoides retos e ocios, no interior dos quais o material a ser analisado foi colocado, chegou ao enunciado geral da lei de rotação magnética nos seguintes termos⁶:

“Quando uma corrente elétrica passa em volta do raio de luz polarizada, em um plano perpendicular ao raio, faz com que o raio gire em se eixo, enquanto ele está sob a influência da corrente, no mesmo sentido em que a corrente passa”. [Faraday, [37], parágrafo 2199]

Embora suas medidas não fossem precisas, Faraday estabeleceu que o ângulo de rotação ($\Delta\theta$) é proporcional à distância percorrida (d) pelo raio luminoso e à intensidade do campo magnético (H), quando ambos são paralelos (\parallel). O efeito é nulo quando a distância é percorrida perpendicularmente (\perp) ao campo aplicado. Não exibiu fórmulas, mas sinteticamente

$$\Delta\theta \propto \begin{cases} H d & , se H \parallel d \\ 0 & , se H \perp d \end{cases} \quad (20)$$

A ação do vidro, um dielétrico, sobre o estado de polarização da luz lançou o pensamento de Faraday em

⁶ Isso equivale à afirmar que Faraday descobriu a rotação magnética esquerda apenas.



Figura 5: (I) Paralelepípedo de vidro óptico com duas faces opostas espelhadas com prata, exceto pelas duas faixas paralelas uma na base e a outra no topo, nas faces opostas. (II) Paralelepípedo similar, com três faces espelhadas, exceto pelas duas faixas paralelas na base das faces opostas.

nova direção. Tal ação somente poderia ocorrer se o vidro respondesse ao campo magnético aplicado, como que em um estado de magnetização novo ainda que muito fraco, distinto dos materiais usualmente chamados magnéticos como o Ferro, o Níquel ou o Cobalto. Intuíu que se abrisse a perspectiva de demonstrar a universalidade da natureza magnética da matéria. Investigações concomitantes o levaram então à descoberta do *diamagnetismo*. Tal descoberta tornou-se o principal objeto de sua atenção em suas pesquisas subsequentes, fazendo com que ele deixasse a terceiros a tarefa de investigação sobre o efeito magneto-óptico.

Em investigação subsequente, Faraday produziu um amplificador da rotação magneto-óptica [38]. Tomou um paralelepípedo de vidro óptico (heavy glass) recoberto parcialmente com prata em faces opostas, de modo a espelhá-las, exceto por duas faixas paralelas, uma acima e a outra abaixo, nas faces opostas, deixadas transparentes, como ilustrado na Figura 5-(I). O raio de luz pode então entrar no vidro pela faixa inferior, com um pequeno ângulo de inclinação, alcançando a face oposta sobre a superfície recoberta com prata e aí sofrendo reflexão e novo desvio por reflexão. Retornando à face original, incide não mais sobre a faixa pela qual penetrara, mas sobre a prata. Assim por diante, sucedendo-se várias reflexões internas, e vários percursos de ida e volta, até que o raio encontra a saída pela faixa transparente deixada na face oposta do paralelepípedo. Com este dispositivo produziu trânsitos do raio luminoso dentro do vidro de 17 a 19 vezes. Em outro arranjo similar, ilustrado na Figura 5-(II), três faces do paralelepípedo de vidro foram recobertas de prata, deixando duas faixas não recobertas em faces opostas, permitindo ao raio luminoso adentrar na base de uma das faces, sofrer reflexões internas tanto na face oposta quanto na terceira face, até sair pela base da face oposta. Julgou o primeiro dispositivo mais conveniente. Se em vez do vidro um meio dotado de atividade óptica natural era usado (como açúcar em solução), as reflexões múltiplas potencializavam apenas o efeito magneto óptico, enquanto que a rotação devida a atividade óptica natural era sucessivamente criada e destruída. Como polarizador usou um prisma de Nicol e para produzir o campo magnético um eletro ímã. Apontou a facilitação propiciada pelas múltiplas reflexões, seja para melhor medida do ângulo de rotação,

seja para comparar as diversas rotações para diferentes comprimentos de onda, λ , da luz. Cristais birrefringentes como o espató da Islândia e o cristal de quartzo (esse naturalmente dotado de birrefringência circular) foram testados e nada revelaram quanto à atividade óptica magneticamente induzida. Investigou novamente o efeito magneto-óptico no ar e nada encontrou, mesmo após, até, seis reflexões.

5.1. Repercussão imediata

O relato da descoberta do efeito magneto óptico [37] constituiu a 19ª série dos *Experimental Researches in Electricity* e foi enviado à Royal Society em 6 de novembro de 1845. Em 8 de novembro a revista *Athenaeum*, que não era um periódico científico, fez o anúncio público da descoberta na coluna “*Our Weekly Gossip*”. Lido perante a sociedade científica em 20 de novembro, logo surgiram a reimpressão do artigo no *Philosophical Magazine* [39] e várias traduções a partir de 1846 [40–43], tendo repercussão imediata.

Na Alemanha, Rudolph Boettger (1806–1881) parece ter sido o primeiro, fora da Inglaterra, a reverberar a descoberta da “*mais alta importância*”, no *Rheinische Beobachter* (07/12). Reproduziu os experimentos e concluiu, de forma independente, que o giro no plano de polarização se devia à alguma mudança de estado das moléculas do meio transparente, na presença do campo magnético, e não da ação direta do campo magnético sobre a luz [44, 45]. Também Johann Christian Pogendorff (1796–1877), editor do *Annalen der Physik*, comentou a descoberta de Faraday [46] e providenciou a tradução para língua alemã da correspondente série 19 dos *Experimental Reseaches* de Faraday [40].

Na França a notícia chegou à Academia de Paris, pela correspondência de Faraday à Jean-Baptiste Dumas [47], comunicada na sessão de 19 de janeiro de 1846. Nela Faraday diz a Dumas que, em seu julgamento, o fenômeno demonstrava uma ação do magnetismo sobre a luz, mas que seus colegas ingleses julgavam que “*nada similar havia sido demonstrado*”. A tradução completa da série 19 dos *Experimental Reseaches* para o francês surgiu primeiramente nos “*Archives des Sciences physiques*” de maio [41] e então nos “*Annales de Physique*” [42] de julho.

Claude Pouillet (1791-1868), ex-aluno e colaborador de Biot, foi o primeiro membro da academia a verificar o efeito magneto-óptico [48] qualificando-o como “*fato fundamental, pois até o presente, não possui análogo na ciência*”. Observou a rotação à direita e à esquerda do plano de polarização da luz ao atravessar o vidro Flint, sob inversão do sentido da corrente no eletroímã. Em sua palavras, os mesmos efeitos rotacionais que os produzidos por lâminas de quartzo, esquerda e direita, na ausência do magnetismo. Devido às limitações de seu aparato, não teve êxito em testar se substâncias opticamente ativas por ação magnética possuíam poder distinto para comprimentos de onda distintos, como

ocorre na atividade óptica natural com a lei de Biot (1). Observou também que o poder rotatório do Flint desaparece quando “*a resultante destas forças atrativas e repulsivas são perpendiculares à direção do raio polarizado*”. Note-se que Pouillet, como a maioria dos físicos continentais, era alheio à noção de *campo magnético*. A ação magnética do eletroímã sobre material foi pensada como uma força eletrodinâmica resultante de muitas ações elementares repulsivas e atrativas, entre a corrente das espiras condutoras do eletroímã e os circuitos de correntes amperianas moleculares, induzidas no meio, em conformidade com a eletrodinâmica de Ampère-Weber. É, portanto, uma ação resultante complexa existente entre as infinitas partes do meio ativo e dos elementos de corrente do aparato indutor. Nesse sentido a visão “*faradiana*” de campo magnético é simplificadora. Testou também o vidro Crown, o salgema, líquidos como óleo de oliva, água destilada, ácidos nítrico, acético, sulfúrico e o ferricianeto (“*cianoferrure*”) de potássio e o Ferrocianeto (“*Ferro-cianate*”) de magnésio. Notou que vários corpos em dissolução na água destilada enfraqueciam o poder da própria água.

Ainda em 1846 Alexandre-Edmond Becquerel⁷ (1820–1891) observou a similaridade entre a rotação magnética produzida no efeito magneto-óptico e aquela da lei de Biot, da atividade óptica natural, quanto a sua dependência com o comprimento de onda, λ , da luz usada [49]. Estabeleceu, em primeira aproximação, uma lei do inverso do quadrado do comprimento de onda. Podemos assim dizer, sobre (20), que

$$\Delta\theta \propto \frac{1}{\lambda^2}d. \quad (21)$$

Também Pierre Auguste (Augustin) Bertin (1818–1884) investigou a rotação magnética, chamando atenção para o poder rotatório de *dissulfeto de carbono* (“*sulfure de carbone*”), o triplo daquele da água e metade do vidro Flint de Faraday [50]. Polemizou quanto à dependência na espessura, afirmando que certos autores consideravam proporcional a espessura, outros como independente, e ainda outros que crescia até certo limite para então decair, podendo reduzir-se a zero. Mas em todos os casos, o campo magnético sobre a amostra não observou o critério de constância sobre toda a extensão percorrida pela luz no meio, violando, em alguma medida, as condições nas quais Faraday estabeleceu a lei de rotação magnética.

Em 1851, Gustav Wiedemann (1826–1899) investigou a dependência do ângulo de rotação magnética, quanto à intensidade do campo. Estabeleceu, a rigor, a proporcionalidade com relação à intensidade da corrente externa, no solenoide reto usado, o que é indiretamente a proporcionalidade com a intensidade do campo magnético. Devemos lembrar que na tradição da eletrodinâmica continental não havia, propriamente, um “campo

⁷ O pai de Antoine Henri Becquerel (1852–1908).

magnético”. Apenas a ação eletrodinâmica resultante da corrente externa, sobre as partículas do meio as quais formam circuitos amperianos moleculares. Ação esta que não era então bem estabelecida, embora a eletrodinâmica de Ampère-Weber prestasse boa assistência à descrição matemática. Wiedemann mostrou, assim, que (21) não era exatamente uma lei do inverso do quadrado, acentuando-se a discrepância no caso do *dissulfeto de carbono* [51, 52]. Analisando as linhas espectrais de Fraunhofer, C, D, E, F, G , na essência de terebintina e na essência de limão, concluiu que $\Delta\theta\lambda^2$ varia com λ . Também comparou a rotação natural na terebintina, $\Delta\theta(\lambda_k, 0)$, à magneticamente induzida, $\Delta\theta(\lambda_k, I)$, para as linhas $\{C, D, E, b, F\} \rightarrow \{k = 1, 2, 3, 4, 5\}$ de Fraunhofer, encontrando que a razão

$$\frac{\Delta\theta(\lambda_k, 0)}{\Delta\theta(\lambda_k, I)}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

era aproximadamente constante, nos diferentes comprimentos de onda, indicando a similaridade entre a rotação magnética e a natural.

Entre as investigações experimentais da década seguinte o trabalho de Marcel Émile Verdet (1824–1866) merece atenção destacada. Em 1854 iniciou uma série de publicações todas intituladas “*Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l’action du magnétisme*”. Na primeira delas [53] Verdet recapitulou os experimentos de Boettger [44, 45], Pouillet [48], os quais não foram, para Verdet, além do que Faraday estabelecera, e de Becquerel [49], que indicou a similaridade da rotação magnética (21) com a lei de Biot (1) quanto ao comprimento de onda. Verdet estabeleceu com rigor inédito a proporcionalidade entre a rotação do plano de polarização e a intensidade do campo magnético que a produz, tratando a grandeza do campo magnético a partir do “*Elektrodynamische Maassbestimmungen*” de Weber. Faraday estabelecera que o efeito dependia da intensidade quando o campo magnético é paralelo à direção de propagação e que era nulo quando ortogonal a ela, conforme (20). Também Pouillet, Becquerel e Wiedemann. Assim, com base em medidas feitas no vidro-pesado, no Flint, e no *dissulfeto de carbono*, Verdet estabeleceu que “*a rotação do plano de polarização é proporcional ao cosseno do angulo subentendido entre a direção do raio de luz e aquela da ação magnética*”, para orientações intermediárias [54]. Assim escrevemos anacronicamente

$$\Delta\theta \propto \vec{m} \cdot \hat{s} d,$$

em que \vec{m} representa a ação magnética (o campo magnético) e \hat{s} é a direção de propagação da luz, na presença dele, e \cdot denota o produto escalar usual.

Em 1856, Verdet descobriu o poder rotatório magnético contrário ao da água em *sais de Ferro* dissolvidos em éter ou álcool [55], cujas primeiras indicações haviam sido obtidas separadamente por Becquerel e Bertin. Sua conclusão foi de que “*os sais de Ferro, submetidos*

à influência do magnetismo, exercem sobre a luz polarizada uma ação contrária àquela da generalidade das substâncias transparentes.” No caso dos sais de Níquel e Manganês, testes similares revelaram poder rotatório similar ao da água. Testou também sais de Cromo e Cobalto com resultados inconclusivos. Sobre a oposição das atividades para os sais de Ferro e Níquel, apontou a dificuldade que tal propriedade trazia a qualquer pretensa teoria sobre o fenômeno. Alertou que não se pode afirmar que o poder rotatório magnético é tanto mais fraco quanto maior é a capacidade magnética (a permeabilidade) do meio, pois existem corpos magnéticos de poderes rotatórios contrários. No caso do nitrato de amoníaco, o qual Bertin encontrara um enfraquecimento do poder rotatório em relação ao da água, estabeleceu que o poder do sal era afinal como o da água. Propôs chamar de “*direta*”⁸ a ação magnética da água e “*inversa*”⁹ a dos sais de Ferro. Também forneceu evidências contrárias à conjectura de Gaspard De La Rive, de que o “*poder rotatório magnético*” das substâncias, fosse tanto maior quanto maior o índice de refração.

Em 1858, na terceira parte de suas “*Recherches*” [56], Verdet expressou então a lei da rotação magnética na forma

$$\Delta\theta = V \vec{m} \cdot \hat{s} d, \tag{22}$$

na qual $\vec{m} \cdot \hat{s}$ mede o componente do campo magnético na direção do raio de luz. O parâmetro V , o qual chamou de “*poder rotatório magnético*”, é a hoje chamada constante de Verdet. Estabeleceu que V depende do meio opticamente ativo, por ação magnética, e do comprimento de onda (λ) da luz incidente. Os resultados de Becquerel (21) indicavam $V \propto \lambda^{-2}$, mas esta era apenas uma primeira aproximação.

Verdet mediu o valor de V para pouco mais de uma dezena de líquidos, comparando-o aos índices de refração n das substâncias correspondentes. Gaspard De La Rive especulava que, no efeito magneto-óptico, a presença do campo magnético alterava a condição do éter no entorno das moléculas do meio, mas não a condição das próprias moléculas. Isso o levou a sugerir, conforme já foi mencionado, a proporcionalidade entre V e o índice de refração n do meio. Verdet dedicou seus dois últimos trabalhos à investigação desta questão. Contudo, seus resultados mostraram uma dependência mais complexa entre os dois parâmetros, alegando ele que a sugestão de De La Rive não se sustentava.

Em 1863, Verdet estabeleceu então que

$$V \propto \frac{f(\lambda)}{\lambda^2} \tag{23}$$

sendo $f(\lambda)$ uma função do comprimento de onda (λ) da luz no vazio, lentamente decrescente.

⁸ Ao que chamamos positiva, ou esquerda, ou anti-horária.

⁹ Negativa, ou direita, ou horária.

O trabalho de Verdet foi acompanhado de perto pela comunidade de língua inglesa, surgindo constantemente versões ou notas dos seus artigos no *Philosophical magazine* [57–60]. Maxwell dirá [32] que a descoberta de Verdet, da rotação negativa nos sais Ferromagnéticos, fora o “*único fato importante*” não descoberto originalmente por Faraday.

6. Descrição Dinâmica do Efeito Magneto-Óptico

No início de 1846, logo após o anúncio da descoberta por Faraday, George Biddell Airy (1801–1892) abordou de forma puramente fenomenológica a dinâmica da onda luminosa no efeito magneto-óptico [61]. Partiu da premissa de que a luz é uma onda de deformação elástica, transversal à direção de propagação, no éter tipo sólido elástico de Fresnel, e introduziu termos a priori na equação da onda luminosa. Buscou inspiração no trabalho de MacCullagh sobre **birrefringência circular natural** em cristais de quartzo.¹⁰ A modificação em terceira derivada em z , conforme (11), se presta bem a explicar a atividade óptica natural do quartzo, pois a birrefringência circular natural é sensível à inversão $z \Rightarrow -z$. O mesmo não se aplica ao efeito magneto-óptico, sendo o sentido da rotação da birrefringência circular magneticamente induzida dependente do sentido da ação magnética aplicada. Postulou assim que no meio isotrópico, opticamente ativado pelo campo magnético, a equação da onda poderia ser, em notação vetorial anacrônica,

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = C_m \hat{z} \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (24)$$

em que \vec{e} é uma deformação transversal à direção de propagação z ($\vec{e} \cdot \hat{z} = 0$), a qual é paralela à direção do campo magnético aplicado. O parâmetro C_m , a ser determinado pela experiência, depende da intensidade do campo magnético e é nulo na ausência deste. Airy mostrou então que esta equação admite como soluções estados de polarização circular, esquerdo e direito, cada um com velocidade distinta do outro, o que permite obter a rotação do plano de polarização no meio, alegando que tal formulação está em harmonia com dados experimentais para o vidro borossilicato, etc., sob ação do campo magnético.

Airy argumentou, porém, que a ordem de derivação presente no termo em que C_m comparece, adotada em (24), foi arbitrária e poderia ser substituída, com igual êxito para a descrição do efeito magneto-óptico, por quaisquer termos cuja ordem total da derivada seja ímpar e sendo par a ordem de derivação espacial. A escolha mais apropriada devia ser decidida pelos dados

experimentais, para a luz de diferentes cores. As duas outras opções de Airy, a saber,

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = C_m \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t \partial z^2}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = C_m \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t^3}, \quad (26)$$

com $\vec{e} \cdot \hat{z} = 0$, serão as mais favorecidas na literatura subsequente.

Em 1863 Verdet publicou a parte quatro de suas “*Recherches*” [62]. Nela excluiu a possibilidade (24) ao mostrar que a lei de rotação magnética que assim se produz independe do comprimento de onda da luz, sendo, portanto, incompatível com a lei do inverso do quadrado do comprimento de onda (21) de Becquerel. Naquela altura Carl Neumann (1832–1925), filho de Franz Neumann, produziu um belo mecanismo para o efeito magneto-óptico baseado numa extensão da lei eletrodinâmica de Weber, imaginando a existência de uma ação similar à força eletrodinâmica de Weber, porém atuando entre as partículas do meio material e as partículas do éter luminífero [63, 64]. Tal mecanismo produzia, justamente, o termo de rotação magnética conforme (24), e foi refutado por sua incompatibilidade com a referida equação (21).

Verdet também aprofundou a abordagem fenomenológica de Airy, buscando uma equação de onda que incorporasse a dispersão ordinária (índice de refração) e a dispersão rotatória (constante de Verdet). Para tanto, combinou a equação da onda tipo-Airy com a teoria da dispersão ordinária de Cauchy [65]. Esquemáticamente, a equação da onda transversal, propagando-se em z , no meio dotado de dispersão ordinária, era descrita como

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \phi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{e} = 0, \quad \vec{e} \cdot \hat{z} = 0,$$

em que c é a velocidade da luz no éter livre (vazio) e ϕ um polinômio em $\partial^2/\partial z^2$, cujos coeficientes constantes dependem da natureza do meio. Desta equação decorre a relação de dispersão $\omega^2/c^2 - \phi(k^2) = 0$, da qual é obtido o índice de refração $n_0 = n_0(\lambda)$ do meio. Verdet então propôs a equação de onda no meio dispersivo e com poder rotatório magnético, como uma extensão que incorpora (25) e (26), da forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \phi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{e} = m \hat{z} \times \left[\psi \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{e} \right],$$

em que ϕ é o polinômio de grau par da dispersão ordinária e ψ um polinômio ímpar na derivada temporal e par na derivada segunda espacial. A constante m é proporcional a intensidade da ação magnética (o C_m de Airy). As sugestões de Airy (25) e (26) correspondem às escolhas

$$\psi_a = \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2}, \quad \psi_b = \frac{\partial^3}{\partial t^3}. \quad (27)$$

¹⁰ Airy não forneceu a referência do artigo de MacCullagh, é natural supor que ele se reporta à [30].

Para o modelo de dispersão ordinária, ϕ , Verdet adotou a teoria de Cauchy (1836), a qual fornece para o índice de refração,

$$n_0(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}, \quad (28)$$

determinando os valores de (A, B, C) a partir de seus dados experimentais, para várias substâncias, e passando ao cálculo da constante de Verdet associada a cada escolha de ψ . Encontrou assim que a situação (24) estava efetivamente descartada por não contemplar sequer a validade aproximada da dependência em $1/\lambda^2$. Além disso, seus dados indicaram que a situação (26) adequava-se melhor que (25), embora aquela não possibilitasse justificar os dados para o *creosoto*. Sua conclusão foi de que ψ não podia ser uma função universal, mas dependente de substância.

Verdet deu particular atenção ao *dissulfeto de carbono* e ao *creosoto*, por serem líquidos que ofereciam um grande poder dispersivo e uma transparência quase completa para as duas extremidades do espectro visível. Deles emergiram os dados que melhor exibiram as discrepâncias do poder rotatório V em relação ao índice de refração n_0 , sendo a discrepância mais acentuada no *creosoto*, embora seja esse menos dispersivo que o *dissulfeto de carbono*. Indicou assim que de maneira geral não é verdade que a rotação cresce tão rapidamente de uma extremidade a outra do espectro quanto mais ela é dispersiva (como conjecturara De la Rive).

No ano dessa publicação, 1863, James Clerk Maxwell (1831–1879) já ensaiara sua primeira tentativa de abordar o efeito magneto-óptico, favorecendo a dispersão rotatória $\partial^3/\partial t \partial z^2$ (de que falaremos adiante). Verdet comentou, entretanto, sua preferência em não endossar os “*tourbillons moléculaires*” de Maxwell, justamente em decorrência das medidas do *dissulfeto de carbono* e do *creosoto* que, em seu juízo, não permitia decisão em favor seja de (25), seja de (26).

7. Maxwell e o Efeito Magneto-Óptico

Maxwell havia iniciado suas formulações matemáticas acerca das linhas de força de Faraday em 1854, após graduar-se em Cambridge. No início dos anos de 1860 deu um passo mais ousado em direção à síntese dos fenômenos eletromagnéticos e ópticos, através das linhas de força, cujo resultado final é a teoria eletromagnética clássica. Foi particularmente motivado por dois acontecimentos: a descoberta do efeito magneto-óptico [37], que forneceu indicação da relação entre luz e magnetismo, e a determinação do fator de uniformização dos padrões eletrostático e eletrodinâmico da corrente elétrica (a constante de Weber) [66], de valor virtualmente igual ao da velocidade da luz no vácuo.

Em 1861, Maxwell concebeu o meio etéreo como uma distribuição de vórtices moleculares. Cada vórtice funciona como uma cápsula, armazenando seu conteúdo etéreo, e seu movimento turbilhonar produz um estado de

tensão, no meio, que equivale à tendência de toda linha de força magnética em encurtar-se, longitudinalmente, e de um conjunto delas expandirem-se lateralmente [[67], p. 161]. Neste modelo o campo magnético, \vec{H} , é expressão do movimento turbilhonar dos vórtices e dele Maxwell deduziu equações para o campo magnético e sua interação com polos magnéticos e correntes externas, isto é, a descrição dos fenômenos da magnetostática. Nos interstícios entre os vórtices concebeu partículas, como rolamentos, que permitiam a livre rotação de vórtices adjacentes, concebendo que a corrente elétrica é a manifestação do movimento translacional destes rolamentos. Tais rolamentos podem tensionar os vórtices e estes, por sua vez, reagirem produzindo tensões. A força eletromotriz induzida, na indução eletromagnética, é então concebida como manifestação de tais tensões [[67], p. 281]. Maxwell então dotou os vórtices de elasticidade, concebendo o deslocamento elétrico, \vec{D} , como expressão das deformações elásticas, $\vec{\epsilon}$, promediadas sobre a superfície do vórtice [68]. Mostrou que das relações entre as partes do sistema, assim concebido, surgem as leis da eletrostática e elabora sua teoria de capacitores. Mas, principalmente, mostra que distúrbios elásticos transversais são propagados, nesse meio, com as características da luz, estando sua velocidade definida pela constante de Weber. Isto encerrou as partes I, II e III do longo artigo de Maxwell. Oliver Heaviside (1850–1925) dirá mais tarde, sobre este artigo, que se tratava da “*mais elevada espécie de especulação científica*”. Também J.J. Thomson (1856–1940) relembrou em 1931 que ao lê-lo, enquanto era estudante, seu “*entusiasmo foi elevado a tal altura [...] que copiou todo o artigo a mão, e era um longuíssimo artigo*”.

A realização plena do modelo do mar de vórtices, no entanto, seria obter dele a justificativa dinâmica para o efeito magneto-óptico. Esta foi a tarefa que Maxwell se impôs na parte IV [69]. Decorria do próprio modelo mecânico que o momento angular de um vórtice individual pode ser expresso como

$$\vec{L}_{cel} = \frac{\mu R}{4\pi} \vec{H} V_{cel}, \quad (29)$$

sendo a energia de rotação do turbilhão identificada com a energia magnética. Na expressão anterior μ é a permeabilidade magnética do meio (a qual assumiu ser proporcional à densidade ρ do meio etéreo), R é o raio do vórtice etéreo e V_{cel} seu volume (ambos assumidos como muito pequenos e não observáveis). Ainda \vec{H} é o campo magnético, entendido como medida do movimento turbilhonar do vórtice.

Maxwell então considerou, o efeito da deformação elástica produzida no vórtice pela passagem da onda elástica transversal (a luz), $\vec{\epsilon}$, como ilustrado no detalhe da Figura 6. Tal deformação produz, em geral, um torque sobre vórtice que, por reação, age reciprocamente sobre a dinâmica da onda. Assim, se na ausência desta interação

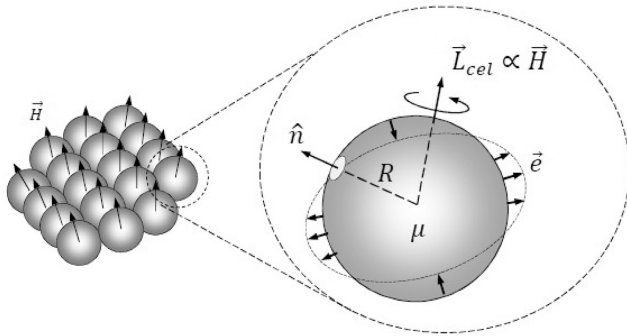


Figura 6: Ilustração esquemática do mar vórtices moleculares de Maxwell, destacando um vórtice específico e a deformação nele produzida pela passagem da onda luminosa.

a equação da onda é

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \vec{e} = 0,$$

sendo a a velocidade da luz no meio, após considerá-la será

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \vec{e} = \frac{1}{\rho} \vec{f},$$

em que \vec{f} é a referida força de reação (por unidade de volume) e ρ a densidade do meio. A expressão para \vec{f} , compatível com (29), é dada por¹¹

$$\vec{f} = -\frac{\mu R}{8\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right). \quad (30)$$

Assim, a equação de onda prevista por Maxwell em sua primeira tentativa de oferecer a descrição dinâmica do efeito magneto-óptico, é

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \vec{e} = -\frac{\mu R}{8\pi \rho} (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right). \quad (31)$$

Se \vec{H} aponta na direção z e esta é também a direção de propagação da luz, isto é $\vec{e} \cdot \hat{z} = 0$, a equação anterior se reduz à

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = -\frac{\mu R}{8\pi \rho} H \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t \partial z^2}, \quad (32)$$

Trata-se de um modelo que favorece a equação de Airy do tipo (25). Contempla, portanto, a birrefringência circular e descreve, em princípio, o efeito magneto-óptico. A rotação do plano de polarização da luz, cujo comprimento de onda no vácuo é λ , após percorrer uma distância d , é¹²

$$\Delta\theta = \frac{\pi c^2}{4 a^3} \mu \frac{RH}{\rho} \frac{1}{\lambda^2} d. \quad (33)$$

¹¹ Para detalhes ver Apêndice B.

¹² O leitor encontrará a dedução de (33) no Apêndice A, como o caso $q = 1$, $n_0 = c/a$ e $\nu = \mu RH / (8\pi \rho a^2)$, da equação (A24).

Embora engenhoso, o modelo falha essencialmente. Como já dissemos, um campo magnético no vácuo (isto é, no éter livre) é aqui concebido por Maxwell como um mar de vórtices, sendo $\mu = 1$ a permeabilidade de referência. Assim, de acordo com (33), o efeito magneto-óptico deveria ocorrer mesmo no vácuo, o que não ocorre. No meio material, o grau de rotação distinto, em materiais distintos, poderia ser atribuído ao tamanho dos vórtices, R , e/ou sua densidade, ρ , que são constantes positivas. A possibilidade de se justificar a inversão, observada por Verdet em certos meios paramagnéticos, somente poderia recair sobre μ . Acontece que μ também é positivo, seja a matéria em questão diamagnética ($0 < \mu < 1$), seja paramagnética ($\mu > 1$). Com efeito, para uma dado \vec{H} uniforme, os vórtices de Maxwell giram sempre no mesmo sentido, seja no meio diamagnético, seja no paramagnético, diferenciando-se apenas quanto ao grau (paramagnéticos giram mais rapidamente que diamagnéticos). Assim, a impossibilidade de descrever a inversão de sentido está na própria essência do mecanismo, de que o plano de polarização da luz é arrastado pela vorticidade do meio.

Em 1865, Maxwell nos apresentou a *teoria eletromagnética da luz* [70]. Agora não pressupunha qualquer modelo mecânico específico para o éter visando justificar a origem das variáveis de campo, que denotamos por $(\vec{A}, \vec{D}, \vec{H})$. A principal conquista de suas investigações, a saber, um sistema de equações diferenciais que descrevem, conjuntamente, fenômenos elétricos, magnéticos, eletromagnéticos, e a luz, é justificada a partir de uma análise lagrangiana. Isso lhe permitiu omitir-se sobre os detalhes do éter subjacente. A luz emerge, nesse contexto, como consequência direta da dinâmica do *campo eletromagnético* no espaço livre ou nos meios (isotrópicos e anisotrópicos) não dispersivos. Nenhuma tentativa de oferecer novo tratamento teórico do efeito magneto-óptico foi apresentada aqui. Podemos mesmo dizer que Maxwell renunciou à pretensão de justificá-lo a partir das equações do campo eletromagnético exclusivamente, pois suas equações não contemplavam fenômenos dispersivos, para além da condução ôhmica. Estes deviam surgir como resultado da interação do campo eletromagnético com matéria e sobre a constituição desta pouco se arriscou, para além da mudança das constantes eletromagnéticas (ϵ, μ) distintas daquelas do éter livre (ϵ_0, μ_0 para nós, anacronicamente, nos padrões do *S.I.*).

7.1. Resignação no “Treatise”

Em 1873, Maxwell publicou seu “*A Treatise of Electricity and Magnetism*”, onde dedicou o capítulo 21, “*Magnetic Action on light*”, à discussão do efeito magneto-óptico. Retomou a hipótese dos vórtices moleculares, abandonada em 1862, e num passo atrás da *teoria eletromagnética da luz* encarou novamente a luz como onda elástica [71]. Na ausência da ação magneto-óptica

considerou que a densidade lagrangiana de uma onda elástica, \vec{e} , seria

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right)^2 - \mathcal{U}, \tag{34}$$

em que \vec{e} é a deformação elástica, ρ a densidade do meio e \mathcal{U} é o potencial elástico, o qual dependerá da teoria de dispersão ordinária adotada.

O retorno de Maxwell à hipótese dos vórtices parece ter resultado do influente artigo de Hermann von Helmholtz (1821–1894) sobre a dinâmica dos movimentos turbilhonares [72]. Seguindo Helmholtz, o turbilhão da própria luz é

$$\vec{\omega}_l := \frac{1}{2} \nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}. \tag{35}$$

Na região do espaço onde há um campo magnético externo, temos presença de outro turbilhão

$$\vec{\omega}_{ext} \propto \vec{H}, \tag{36}$$

em que \vec{H} é o campo magnético na região considerada.

Quando a onda luminosa, que carrega vorticidade $\vec{\omega}_l$, adentra a região onde há vorticidade $\vec{\omega}_{ext}$ a dinâmica da onda deve mudar. Não sabemos como é tal interação, mas Maxwell supõe que ela se dá pelo acoplamento entre os turbilhões da onda e externo, postulando o termo de interação cinético

$$\mathcal{T}_{int} \propto \vec{\omega}_l \cdot \vec{\omega}_{ext} = 2C \vec{\omega}_l \cdot \vec{H}, \tag{37}$$

sendo que a constante C carrega a nossa ignorância sobre os detalhes desta interação.

Seja \vec{H}_0 o campo macroscópico constante em uma região. Na escala das deformações que propagam a luz, porém, temos vórtices deformados, que comunicam tais deformações uns aos outros. Seguindo Helmholtz, o valor de $\vec{\omega}_{ext}$ deformado por \vec{e} , é dado por

$$\vec{\omega}_{ext}(\vec{e}) = \vec{\omega}_{ext}(0) + \left(\vec{\omega}_{ext}(0) \cdot \nabla \right) \vec{e},$$

ou de modo correspondente

$$\vec{H}(\vec{e}) = \vec{H}_0 + \left(\vec{H}_0 \cdot \nabla \right) \vec{e}. \tag{38}$$

Assim, o termo de interação da onda luminosa propagando-se num ambiente de campo macroscópico uniforme \vec{H}_0 será

$$\mathcal{T}_{int} = 2C \vec{\omega}_l \cdot \left(\nabla \cdot \vec{H}_0 \right) \vec{e} + 2C \vec{\omega}_l \cdot H_0,$$

em que o segundo termo não contribuirá para a dinâmica. Assim, por (35),

$$\mathcal{T}_{int} = C \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot \left(\vec{H}_0 \cdot \nabla \right) \vec{e}. \tag{39}$$

O lagrangiano para a onda luminosa no meio rotatório será então

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right)^2 + C \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \cdot \left(\vec{H}_0 \cdot \nabla \right) \vec{e} - \mathcal{U}. \tag{40}$$

Calculando sua variação e eliminando termos de fronteira convenientemente resulta que

$$\delta \mathcal{L} = - \left\{ \rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} + 2C (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) \right\} \cdot \delta \vec{e} - \delta \mathcal{U}.$$

Maxwell não especificou o modelo particular de dispersão ordinária, a qual ainda era entendida no sentido de Cauchy. Apenas para efeito de comparação, tomemos a situação mais simples na qual \mathcal{U} é função quadrática dos coeficientes $\partial e^i / \partial x^j$ e depende de um só parâmetro elástico, o qual chamamos genericamente de k , o que conduz à

$$\delta \mathcal{U} = -k \nabla^2 \vec{e} \cdot \delta \vec{e}.$$

Deste modo, a dinâmica da onda luminosa ($\delta \mathcal{L} = 0$) é

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} + 2C (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right) - k \nabla^2 \vec{e} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \vec{e} = - \frac{2C}{\rho} (\vec{H}_0 \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right), \tag{41}$$

em que introduzimos a velocidade $a = \sqrt{k/\rho}$. A onda propagando-se paralelamente ao campo \vec{H}_0 segundo a direção z será então

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial z^2} = - \frac{2C}{\rho} H_0 \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{e}}{\partial t \partial z^2}. \tag{42}$$

Novamente, como o fizera em (32), Maxwell favoreceu o tipo de dispersão rotatória (25) dentre as sugestões de Airy. Essencialmente, substituiu o parâmetro rotatório $\mu R / 8\pi$, em (32), pelo parâmetro $2C$, em (42). Esta foi também uma das possibilidades favorecidas por Verdet, em 1863, muito embora os dados do dissulfeto de carbono e do creosoto mostrassem a não universalidade desta fórmula. Maxwell afinal considerou que “a teoria proposta nas páginas precedentes tem caráter evidentemente provisório”, mas insistiu na correção da hipótese de que o magnetismo indica a presença de vórtices moleculares, no éter, embora fosse obscuro o modo pelo qual tais rotações são afetadas pelos deslocamentos e tensões do éter, crucial para se poder estabelecer uma teoria da dispersão rotatória. Esta foi sua palavra final sobre o efeito magneto-óptico.

8. Nova Rotação Magneto-Óptica é Demonstrada

Em 1876, John Kerr (1824–1907) descobriu a rotação do plano de polarização da luz por reflexão, sobre a

face do polo de um eletroímã [73]. Antes mesmo da descoberta já suspeitava que a rotação de Faraday, a qual é produzida por transmissão, poderia igualmente ocorrer por reflexão da luz, na interface de separação entre o ar e o meio dotado de poder rotatório magnético. Tal efeito seria demasiado fraco para ser observado nos diamagnéticos opticamente ativos de Faraday, mas isso poderia ser compensado se o meio fosse fortemente magnético. Os resultados de Verdet, do poder rotatório magnético negativo de sais de Ferro somente reforçaram tal convicção, o que o levou então à referida descoberta. Evidentemente que sendo o núcleo do eletroímã (de Ferro ou aço) um sólido opaco, não seria possível observar a rotação por transmissão da luz através dele.¹³

Esta visão de que o *efeito Kerr* seria o complementar do *efeito Faraday*, ocorrendo por reflexão da luz no meio rotatório magnético, foi endossada pelo “*maxwelliano*” George Francis Fitzgerald (1851–1901), que propôs uma descrição teórica baseada na teoria da birrefringência circular de Fresnel [75]. A luz polarizada incidente sobre o pólo sul magnético do eletroímã pode ser pensada como superposição de dois modos circularmente polarizados, esquerdo e direito, os quais viajam com igual velocidade no ar. Ao incidirem sobre a superfície do polo magnético, os modos circulares esquerdo e direito percebem índices de refração distintos, n_e e n_d , na interface de separação. Das quatro polarizações lineares que podem ser obtidas dos modos esquerdo e direito (duas paralela e duas perpendicular ao plano de incidência), duas seriam refletidas segundo n_e e duas segundo n_d . Reconstituindo o raio final refletido, podemos ter então nova polarização, distinta da polarização linear do raio incidente. FitzGerald mostrou que tal onda refletida tem polarização quase linear, sendo fracamente elíptica. Esta teoria da reflexão não previu a rotação do plano de polarização da incidência normal, o que a desqualificou. Estamos falando aqui daquele que será posteriormente chamado o *efeito Kerr polar*, isto é, no qual a magnetização é perpendicular à interface refletora. Em 1878, no entanto, Kerr anunciou a descoberta dos hoje chamados *efeito Kerr longitudinal* e *transversal* [76], os quais estão ilustrados na Figura 7, para a luz incidente polarizada no plano de incidência. Constatou que magnitude das rotações observadas em (I) e (II) dependem do ângulo de incidência. Para a luz incidente polarizada perpendicularmente ao plano de incidência, constatou que o fenômeno é mais complexo,

¹³ Em 1875, Kerr descobrira que dielétricos isotrópicos e transparentes, entre sólidos e líquidos, podem se tornar birrefringentes pela ação eletrostática. Evidenciou portanto ser correta esta especulação de Thomson à Faraday, feita trinta anos antes [74]. Entre os líquidos lá estava o dissulfeto de carbono, os óleos de parafina e querosene, terebintina e óleo de oliva, os que forneceram “*resultados definidos e constantes*”, comportando-se como cristais uniaxiais, com o eixo óptico coincidindo em direção com as linhas de força do campo elétrico. Ampliara assim as evidências experimentais em favor da conexão íntima entre luz, eletricidade e magnetismo, postulada por Maxwell na *teoria eletromagnética da luz*.

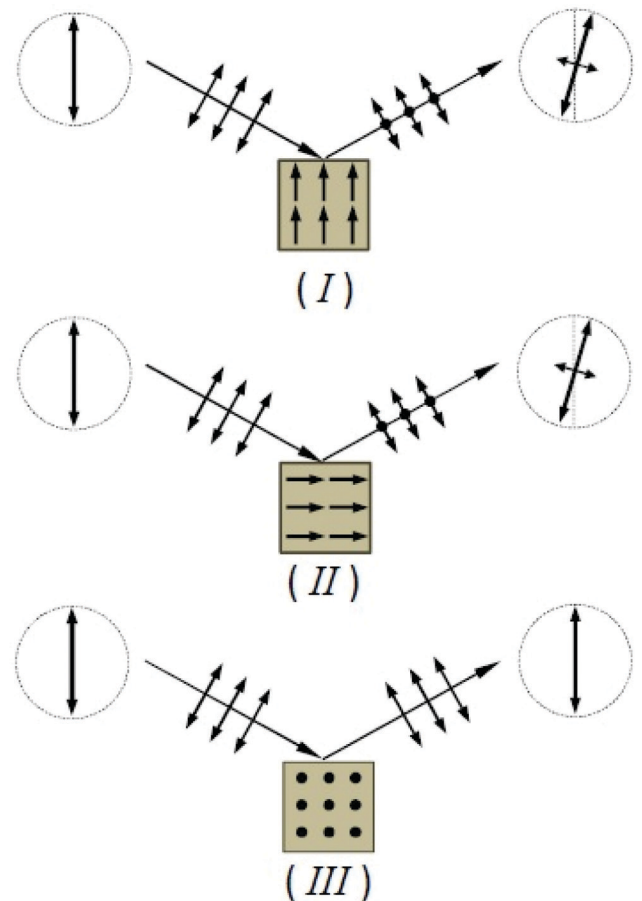


Figura 7: O efeito magneto-óptico de Kerr para luz incidente polarizada paralelamente ao plano de incidência: Polar (I), Longitudinal (II) e Transversal.

podendo a rotação sofrer inversão de sentido, a partir do ângulo de incidência no entorno de 75° .

A abordagem inicial de FitzGerald, na descrição do efeito Kerr, foi herdada da teoria da reflexão/refração pré-elastodinâmica, de Fresnel. Isso expôs a necessidade de se investigar mais a fundo as condições de contorno sobre a interface de separação entre o ar e o meio rotatório magnético, as quais devem depender da magnetização, algo não contemplado pela antiga teoria da reflexão de Fresnel. Defensor da teoria eletromagnética da luz, FitzGerald almejava estabelecer condições de contorno para as variáveis do campo eletromagnético, através da interface de separação entre dois meios, de modo a obter uma *teoria eletromagnética da reflexão/refração*. Este tema o próprio Maxwell deixara aberto à interpretações em sua obra eletromagnética. A óptica de MacCullagh em meios não dispersivos, baseada na formulação lagrangiana (14), havia desde então produzido uma teoria da reflexão/refração consistente com a leis de Fresnel, dos senos e das tangentes, o que levou FitzGerald a tomá-la como guia. Foi assim que, em 1879, estabeleceu a seguinte correspondência entre variáveis de campo de Maxwell e as deformações do éter rotatório de

MacCullagh [77]:

$$\nabla \times \vec{e} \Rightarrow \vec{D}, \quad \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \Rightarrow \vec{H}. \quad (43)$$

A correspondência entre a matriz inversa da permissividade elétrica ε_{ab} e as elasticidades de Fresnel K_{ab} , já fora utilizada por Maxwell nos anos de 1860. FitzGerald estabelece agora a correspondência dos parâmetros eletromagnéticos (ε, μ) e as características do éter de MacCullagh (κ, ρ) fazendo

$$\kappa \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}, \quad \rho \Rightarrow \mu. \quad (44)$$

Disso resulta que o lagrangiano (17) torna-se

$$\mathcal{L}_{mac} \Rightarrow \mathcal{L}_{max} = \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 - \frac{1}{2\varepsilon} |\vec{D}|^2,$$

que é o lagrangiano de Maxwell para o campo eletromagnético, no meio não dispersivo.

Igualmente, as condições de contorno (19) de MacCullagh tem agora correspondentes eletromagnéticos da forma

$$\left[\vec{H}_{\parallel} \right]_{\Sigma} = 0, \quad \left[\vec{E}_{\parallel} \right]_{\Sigma} = 0, \quad (45)$$

onde usamos que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

A partir desta associação, a *teoria eletromagnética da luz* herdou da óptica de MacCullagh sua teoria da reflexão/refração em meios não dispersivos. Foi um passo gigantesco no sentido de ampliar o domínio fenomenológico descrito pela *teoria eletromagnética da luz*. FitzGerald considerou sua teoria eletromagnética da reflexão/refração uma reafirmação da *teoria eletromagnética da luz*, a qual nos convida a emancipar “*nossas mentes da escravidão de um éter material*”.

O objetivo de FitzGerald era, no entanto, estender tal correspondência ao meio rotatório magnético visando obter condições de contorno que possibilitassem a descrição ao efeito Kerr. Para isso, modificou o setor cinético de (17), nele introduzindo o acoplamento cinético entre os *vórtices*, de Maxwell, como em (39). Aplicou ao termo assim obtido a mesma correspondência (43), o que levou à proposição de um lagrangiano de Maxwell modificado, com termo rotatório magnético. Dele obteve novas condições de contorno para o campo eletromagnético, na superfície de separação entre o ar e o meio rotatório. Seus resultados reproduziram de forma tolerável o efeito Kerr, mas o meio de obtenção das novas condições de contorno se mostrou, posteriormente, matematicamente inconsistente. Outra deficiência era que sendo o meio rotatório tratado como transparente, tal descrição, a rigor, não seria aplicável ao Ferro ou aço, opacos a luz visível, justamente o meio rotatório em que o efeito Kerr fora observado. Deste modo o debate sobre as condições de contorno adequadas à descrição do efeito Kerr se manteve aberto. De qualquer forma, o passo inicial de FitzGerald abriu o debate de quais condições

de contorno devem substituir (45) sobre a interface de separação entre o ar e o meio rotatório magnético, necessárias ao entendimento dos efeitos Faraday e Kerr como aspectos complementares da propagação da luz diante do meio rotatório, o primeiro por transmissão, o segundo por reflexão.

Neste mesmo ano, de 1879, o efeito Faraday através de gases foi descoberto. Na França, por Antoine Henry Becquerel (1852–1908) [78, 79] e por E. Bichat [80, 81]. Na Alemanha, por A. Kundt e Wilhem Conrad Röntgen [82, 83], independentemente.

Maxwell, que foi árbitro do artigo de FitzGerald, então preparava a segunda edição atualizada do “*Treatise*”. Não chegou a fazer atualizações e acréscimos ao que fora dito sobre o efeito Faraday, na edição de 1873, em decorrência de seu falecimento prematuro em 5 de novembro de 1879.

9. Afinal um Mecanismo Eletromagnético Para o Efeito Magneto-Óptico

Em 1880, Henry Augustus Rowland (1848–1901) fez a primeira proposta de um mecanismo propriamente eletromagnético para justificar o efeito Faraday, no contexto da teoria eletromagnética da luz. Tudo teve início com a descoberta de Edwin Herbert Hall (1855–1938), do efeito que hoje leva seu nome. Então sob orientação de Rowland, Hall evidenciou a existência de uma “*força eletromotriz*”, \vec{E}_h , nas laterais de uma lâmina condutora atravessada pela corrente elétrica, \vec{J} , estando a lâmina na presença de um campo magnético externo, \vec{B}_0 , perpendicular ao plano da lâmina [84–87]. Em linguagem anacrônica

$$\vec{E}_h(\vec{J}) = r_h \vec{B}_0 \times \vec{J}, \quad (46)$$

em que r_h é uma constante característica do condutor, para o *efeito Hall*.

Em suas notas preliminares “*sobre a recente descoberta do Sr. Hall*”, Rowland indicou que a nova ação tinha caráter rotatório, do campo magnético aplicado sobre a corrente elétrica, e suspeitou existir uma conexão entre a “*nova ação magnética*” e a rotação magnético-óptica. Disse:

“[...] para Maxwell, luz é um fenômeno elétrico e consiste de ondas de deslocamento elétrico. Se a ação que estamos agora considerando ocorre também em dielétricos, ponto que o Sr. Hall está agora investigando, a rotação do plano de polarização da luz está explicada.” [Rowland, [88], p. 355]

Hall não encontrou evidência da “*nova ação magnética*” em dielétricos, mas, mesmo assim, Rowland sustentou sua linha de pensamento. Em 1881, considerou que “*é praticamente impossível detectar esta ação experimentalmente, mas isso não nos impede de investigar as*

consequências de sua existência.” Conjeturou então que a tensão Hall é igualmente produzida pela corrente de deslocamento e mostrou que assim é possível produzir o termo de dispersão rotatória magnética, na equação da onda eletromagnética [89, 90]. Apresentamos, no que segue, o argumento de Rowland em notação anacrônica (nos padrões do *S.I.*): a “*nova ação magnética*” em dielétricos, analogamente à (46), teria a forma

$$\vec{E}_h(\vec{D}) = r_h \vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

em que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ é o vetor deslocamento elétrico, ε a permissividade dielétrica do material.

A equação de Maxwell relevante na presente discussão é a do campo elétrico induzido,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (47)$$

que modificada pela contribuição da “*nova ação magnética*” torna-se

$$\vec{E} - r_h \varepsilon \vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (48)$$

Como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (49)$$

a lei de Faraday modificada é então

$$\nabla \times \left(\vec{E} - r_h \varepsilon \vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (50)$$

A lei de Ampère-Maxwell, ou “*lei das correntes*” como Rowland a chamou, mantém sua forma usual

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (51)$$

Rowland apresentou a equação da onda eletromagnética a partir do potencial vetorial magnético \vec{A} tomado o solenoidal,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (52)$$

conforme prescrição tantas vezes adotada por Maxwell.

Para explicitá-la, tomemos inicialmente a derivada $\mu_0 \varepsilon \partial / \partial t$ sobre (48), no que resulta

$$\left(\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - r_h \varepsilon \vec{B}_0 \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}.$$

De acordo com (51) e (49) os termos entre parênteses são o mesmo que $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$, uma vez que assumimos (52). Assim, a equação de onda eletromagnética para \vec{A} , será finalmente

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = -r_h \varepsilon \vec{B}_0 \times \nabla^2 \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (53)$$

Se a onda eletromagnética se propaga paralelamente ao campo \vec{B}_0 aplicado, tomando-se esta direção por z , resulta da equação anterior que

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -r_h \varepsilon B_0 \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{A}}{\partial t \partial z^2}, \quad (54)$$

Rowland assim favoreceu o tipo de dispersão rotatória magnética similar à (25) dos tipos de Airy, a mesma favorecida por Maxwell (42) no “*Treatise*”. A rotação magnética segundo o mecanismo de Rowland é dada por¹⁴

$$\Delta \theta = 2\pi^2 r_h \varepsilon_0 c n_0^3 \frac{1}{\lambda^2} B_0 d. \quad (55)$$

Embora haja outros fatores presentes na expressão do ângulo de rotação, em (55), o fato importante aqui é que a magnitude e o sinal da constante de Verdet seria então regulado diretamente pela constante Hall r_h .

O entusiasmo incontido de Rowland o levou a declarar que esta identidade entre os efeitos Hall e Faraday, sobrevivendo ao teste do tempo, poderia ser vista como demonstração da veracidade da *teoria eletromagnética da luz*. Textualmente lamentou que o “*grande autor desta moderna teoria da luz não esteja agora aqui*”, numa referência ao recém falecimento de Maxwell. Tal “*identidade*”, porém, logo foi posta à prova.

Em 1881, Hall obteve medidas de r_h para os metais magnéticos: positiva para o Ferro (*Fe*) e Cobalto (*Co*), negativa para o Níquel (*Ni*). O valor de r_h significativamente maior no Níquel [91]. O estudo do efeito Hall nestes metais revelou que não estava claro se o efeito era função da indução magnética, \vec{B}_0 , do campo magnético, $\mu \vec{B}_0$, ou do grau da magnetização, \vec{M} , induzida no metal, pelo campo aplicado \vec{B}_0 . Medidas de r_h para o Níquel pareciam indicar a dependência com \vec{M} , na medida em que o efeito Hall deixava de crescer proporcionalmente ao campo aplicado próximo à intensidade de saturação. As medidas dissimilares de r_h no (*Fe*, *Co*, *Ni*), no sinal e na grandeza, contrastavam com suas propriedades rotatórias magneto-ópticas, similares, sob reflexão (efeito Kerr). Isso levou Hall a considerar esta uma evidência inquestionável contra a hipótese de que os efeitos Hall e Kerr possuíam uma causa comum. Posteriormente obteve o valor de r_h para o Bismuto, encontrando o maior dentre todos os valores então mensurados, aproximadamente 10^3 vezes o do *Fe* e de sinal contrário ao deste. No entanto, as propriedades magneto-ópticas do Bismuto sob efeito Kerr se revelaram desprezíveis [92]. Por sugestão de Rowland, investigou a rotação por transmissão através de uma lâmina de *Ni*, fina o suficiente para se obter transparência. Embora tenha encontrado indícios da ocorrência do efeito Faraday, considerou seus resultados inconclusivos.

¹⁴ O leitor encontrará a dedução de (55) no Apêndice A, como o caso $q = 1$, $n_0 = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ e $\nu = r_h \varepsilon B_0$, da equação (A24).

Em 1884, August Kundt (1839–1894) produziu lâminas de *Fe*, *Ni* e *Co* suficientemente finas e transparentes com as quais foi capaz de medir a rotação magnética por transmissão, com incidência normal e colinear com a magnetização das lâminas [93]. Tais lâminas revelaram poder rotatório elevado tanto por transmissão (a rotação de Faraday), quanto por reflexão (a rotação de Kerr). Na lâmina de *Fe*, por exemplo, o poder rotatório encontrado foi de 30.000 vezes o do vidro de mesma espessura. Encontrou que a rotação por transmissão é invariavelmente positiva (anti-horária) para os três metais magnéticos, embora mais fraca no *Ni*. Tal resultado contrastava com a rotação de Faraday negativa dos sais de Ferro, de Verdet, e também com a rotação de Hall negativa do *Ni*. Para a rotação por reflexão na incidência normal sobre o polo, Kundt reiterou a rotação negativa, obtida por Kerr, no *Fe*, e mostrou que o mesmo ocorria no *Ni* e *Co*. Kundt encontrou indício de inversão da rotação na incidência oblíqua sobre o polo, a qual escapara a Kerr. Para harmonizar as complexidades do comportamento da rotação sob reflexão oblíqua, tanto no efeito polar como longitudinal, conjecturou que a rotação negativa é produzida em uma fina camada do metal penetrada pela luz na reflexão. Constatou que a dispersão rotatória do *Fe* crescia com o comprimento de onda, sendo maior no vermelho que no azul, diferentemente do que preconiza (22) e (23), o que indica dispersão anômala. Mostrou que o poder rotatório no *Fe* provinha da magnetização, a qual não mais cresce, com o campo aplicado, uma vez atingido o ponto de saturação [94]. Afirmou assim que a constante de Verdet “perde o sentido” no *Fe*. Em síntese, considerou que a rotação positiva é aquela que provém de todos os meios quimicamente simples, a exemplo do *Fe*, *Co*, *Ni*, *Br*, *Se*, *S*, *P*, *C* (diamante), *O*, *N*, *H*, todos positivos, e sendo indistintamente ferromagnéticos ou diamagnéticos. Atribuiu a rotação magnética negativa dos sais de Ferro à composição química, embora admitindo falta de entendimento de tais arranjos moleculares.

Na rotação de Kerr, Augusto Righi (1850–1920) confirmou que a luz refletida na incidência normal, no efeito polar, é elíptica. O semieixo maior inclinado em relação à polarização incidente é aquele que indica a rotação da polarização. Descobriu que uma fina lâmina de ouro sobreposta à superfície do imã suprime o efeito Kerr, mostrando que este não ocorre no ar, na vizinhança da superfície magnética, mas no “contato” da luz com o corpo magnético propriamente [95].

Em 1890, Henri E.J.G. Du Bois (1863–1918) demonstrou a dependência da rotação de Kerr com a magnetização, nos metais magnéticos, proporcional ao componente normal desta sobre a interface [96]. Também evidenciou a ocorrência de uma rotação limite, com a saturação da magnetização e o desaparecimento da rotação por reflexão como função da temperatura, no mesmo limiar em que o espelho se desmagnetiza para uma temperatura acima de 335°. Como Kundt, encontrou que a dispersão é, nestes casos, anômala.

Na década de 1890, ocorreu a gradual adesão ao éter eletromagnético em detrimento do éter tipo sólido elástico. Esta mudança de mentalidade não se deu unanimemente e no seu centro estavam as descobertas, de primeira grandeza, de Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894). No período 1886–1888, Hertz produziu ondas eletromagnéticas em laboratório, demonstrando que tais distúrbios se propagam através do ar, transversalmente, na mesma velocidade que a luz, refratam, refletem e interferem tal e qual a luz [97]. Não se tratava de luz ou de qualquer outra forma de radiação conhecida, mas era o tipo de radiação predita por Maxwell em suas equações eletromagnéticas. Abriu-se então o novo campo da óptica das “ondas hertzianas”, bem como ampliou-se os horizontes e o apelo da teoria eletromagnética da luz. O “irradiador” de Hertz, a antena pela qual produziu ondas eletromagnéticas, consistiu basicamente num dipolo elétrico oscilante, o que levou à sugestão da presença de pequenos “irradiadores de Hertz” no íntimo da matéria, responsáveis não somente pela emissão de luz por parte desta, como também pela dispersão da luz que a atravessa. Para uma nova geração de físicos, a teoria eletromagnética da luz ganhou um apelo que a teoria elastodinâmica da luz parecia não possuir: a economia de elementos e a disponibilidade de técnicas experimentais para medi-los.

Podemos dizer que Maxwell formulou as equações do campo eletromagnético numa “versão bruta”, mesclando variáveis de campo e de potenciais, o que exigiu a depuração das mesmas na obra de seus sucessores. Heaviside foi o pioneiro em dar-lhes a forma padrão que conhecemos [98]. Também Hertz teve papel significativo nesta empreitada, favorecendo os campos \vec{E} e \vec{H} como variáveis padrão, na caracterização do campo eletromagnético, juntamente como os parâmetros (ϵ, μ) que caracterizam o meio isotrópico e não dispersivo. As, assim chamadas, equações de *Maxwell-Hertz*, particularmente na literatura científica alemã, foram caracterizadas por Hertz como

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0, \quad \nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0, \quad (56)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (57)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (58)$$

servindo de base para a óptica eletromagnética, nos corpos em repouso [99].

10. Dispersão e Teoria Eletromagnética da Luz

Inicialmente, o desenvolvimento da teoria da dispersão se deu dentro das teorias elastodinâmicas da luz como vertente dominante. Desde sua origem, com a teoria de

Cauchy [65], a crença generalizada era de que o índice de refração devesse decair com o comprimento de onda, em conformidade com a fórmula de Cauchy (28), até a descoberta da dispersão anômala em 1862, por François Leroux, no vapor de iodo.

Em 1872, Wolfgang von Sellmeier, discípulo de Neumann, propôs uma teoria da dispersão na qual assumiu que as ínfimas partículas da matéria estão presas elasticamente aos seus sítios, possuindo frequências naturais de oscilação, e que postas a vibrar pelas perturbações do éter são capazes de realimentar as vibrações do próprio éter, no que constitui o fenômeno da dispersão [100, 101]. Em particular, se uma vibração do éter está próxima à frequência natural da partícula material, então se dá a ressonância, invalidando (28) na vizinhança do comprimento de onda da ressonância. A fórmula de Sellmeier da dispersão,

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_a \alpha_a \frac{\omega_a^2}{\omega_a^2 - \omega^2}, \quad (59)$$

foi capaz de explicar a dispersão anômala, como resultado das ressonâncias que ocorrem em torno das frequências naturais $\{\omega_a\}$ das partículas da matéria, bem como a dispersão “de Cauchy” válida quando as frequências naturais são muito maiores que a frequência da luz. Os $\{\alpha_a\}$, constantes características do meio, fornecem intensidades associadas à cada ressonância.

Em 1875, Helmholtz deu o passo seguinte, introduzindo o amortecimento como parte das forças às quais as partículas estão submetidas em seus sítios. Distinguiu dois sistemas de equações acopladas, um para as vibrações luminiais do éter e outra das partículas [102]. Para “o movimento do éter” (isto é, da luz no interior da matéria bruta) assumiu que

$$\frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} - \alpha^2 \nabla^2 \vec{e} = \beta^2 (\vec{s} - \vec{e}), \quad (60)$$

e como equação de movimento do “átomo ressonante” tomou,

$$m \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} + 2\gamma m \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + m\omega_0^2 \vec{s} = \beta^2 (\vec{e} - \vec{s}). \quad (61)$$

Nestas equações m é massa da porção deslocada do átomo, \vec{s} o deslocamento relativo a sua condição não perturbada. Este “átomo” está preso elasticamente ao seu sítio, sendo ω_0 sua frequência natural de oscilação. O aprimoramento em relação à Sellmeier, está no fato de que agora a partícula está submetida à ação do atrito local (γ). O termo $\beta^2 (\vec{e} - \vec{s})$ representa a ação externa da vibração etérea sobre a partícula ressonante, assim como $\beta^2 (\vec{s} - \vec{e})$ representa a ação recíproca da partícula ressonante sobre a dinâmica da luz. Helmholtz contornou assim a dificuldade de se obter o resultado fisicamente inaceitável $n \rightarrow \infty$ para as frequências que tendem às frequências naturais, conforme (59). Entretanto, tudo aqui é mecânico, na tradição da elastodinâmica da luz,

cujas origens remontam à própria *Mémoire sur la dispersion de la lumière* de Cauchy.

Como já dissemos, nos anos de 1890 a disposição em substituir o éter tipo sólido-elástico pelo éter eletromagnético ganhou força, devido às descobertas de Hertz. De modo geral, a atividade óptica, natural ou magneticamente induzida, é um tipo peculiar de dispersão. Assim, o entendimento das rotações de Faraday ou de Kerr em harmonia com *teoria eletromagnética da luz* pressupunha o estabelecimento do mecanismo eletromagnético da dispersão.

Em 1893, Helmholtz elaborou o que O. Darrigol chamou de “*tradução eletromagnética*” ([5], p. 321) de sua teoria da dispersão anterior [103], na qual as partículas da matéria, agentes da dispersão óptica, foram agora substituídos por “*íons*” os quais carregam polarizações elétricas, ideia nova e mesmo radical para um “maxwelliano canônico”. Assim o sistema de equações “de Maxwell” descrevia a dinâmica do éter eletromagnético enquanto que a dinâmica das polarizações fornecia a ação dispersiva que a matéria exerce sobre o éter, estando ambos os sistemas acoplados.

A teoria eletromagnética da dispersão, no entanto, foi obra do físico que promoveu a síntese entre duas tradições distintas da ciência eletrodinâmica: a que via a interação eletromagnética como mediada pelo campo, a qual atribuiu a Faraday-Maxwell, e a que adotava uma visão atomística da eletricidade, atribuída a Weber e Clausius: referimo-nos a Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928). A partir da década de 1890 deu início ao que hoje chamamos de “*teoria do elétron*”, admitindo a existência de pequenas partículas materiais dotadas de carga elétrica [104, 105], as quais chamou inicialmente de *íons*. Estabeleceu as leis da eletrodinâmica de Maxwell numa abordagem macroscópica, entendendo porém a quantidade de eletricidade e a corrente elétrica como associadas ao número e ao fluxo de tais *íons* carregados. Eis uma ideia que Heaviside não aceitou: a existência de “*eletrificações movendo-se por aí*”. Lorentz tratou da dinâmica dos *íons* imersos em um éter estacionário, capazes de influenciá-lo e serem influenciados por ele, através da carga elétrica de que são dotados. Para ele a polarização em dielétricos resulta do afastamento de *íons* de cargas iguais e opostas, e as correntes amperianas, que produzem a magnetização, resultam dos movimentos cíclicos dos mesmos. Sua contribuição mais definitiva ao que hoje chamamos eletromagnetismo clássico, é a expressão da força comunicada à partícula de carga e pelo éter circundante:

$$\vec{f} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}. \quad (62)$$

Combinando a dinâmica do *íon* de massa m_e , no interior do dielétrico, elasticamente preso ao seu sítio, com a dinâmica da onda eletromagnética, Lorentz obteve a fórmula para o índice de refração ($n \propto \sqrt{\epsilon}$), em termos das propriedades dos íons, a qual permanece essencialmente inalterada em nossos textos didáticos de

eletrodinâmica clássica (em unidades *S.I.*):

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (63)$$

em que N é o número de *íons* por unidade de volume, e a sua carga elétrica, m_e sua massa, ω_0 sua frequência natural.

11. Dispersão Rotatória Magnética e a Teoria Eletromagnética da Luz

Paul Karl Ludwig Drude (1863–1906) pertenceu à mesma geração de físicos alemães que Hertz e Max Planck (1858–1947). Teve por mentor Woldemar Voigt (1850–1919) e estava na linha direta da tradição da física matemática alemã, inaugurada por Neumann e de quem Voigt fora discípulo. Após a descoberta das ondas eletromagnéticas, Drude postou-se ao lado dos que defendiam a primazia da óptica eletromagnética sobre a “*velha*” teoria baseada na elastodinâmica da luz. A adoção desta abordagem era, para ele, um passo significativo para o verdadeiro entendimento da natureza, pois “*a velocidade da luz é deduzida de características eletromagnéticas*”. Em 1894, publicou *Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage* [106], onde ponderou que o esclarecimento da natureza do éter “*somente se justifica [...] por um anseio dos filósofos naturais*”. Antecipando-se a Einstein, defendeu que no lugar de “*éter*” a palavra “*espaço*” seria igualmente aceitável, desde que se aceite que o espaço é, também, dotado de propriedades físicas. Nesse livro abordou a dispersão rotatória magnética da luz, admitindo que “*não há base teórica para esses fenômenos*”. Apontou dificuldades no modelo dos *vórtices moleculares*, de Maxwell, que depende crucialmente do entendimento da mecânica do éter subjacente. Também desqualificou o mecanismo de Rowland, apontado o comportamento dissimilar do Bismuto e do Ferro, nos efeitos Hall e Kerr. Indicou, porém, que as equações de Maxwell para descrição do efeito magneto-óptico numa abordagem fenomenológica (as quais reescrevemos nos padrões do *S.I.*) poderiam ser,

$$\nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{b} \times \vec{E}) \right] = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (64)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (65)$$

em que $\mu = \mu_0$ e os parâmetros ópticos (ϵ, \vec{b}) deviam ser obtidos a partir da teoria da dispersão adotada, a qual deveria indicar sua conexão com as propriedades dos *íons* constituintes da matéria. A permissividade elétrica ϵ , com seu valor propriamente corrigido pelas oscilações dos íons, produz o índice de refração ($n \propto \sqrt{\epsilon}$). Já o parâmetro \vec{b} , o qual Drude chamou de constante magneto-óptica, deveria ser deduzida de alguma teoria

(inexistente) do fenômeno rotatório magnético. Além do efeito Faraday, também o efeito Kerr poderia ser descrito a partir de tais equações, propondo que as condições de contorno sobre a interface de separação, entre dois meios rotatórios, as quais substituem (45), seriam

$$\left[\vec{H}_{\parallel} \right]_{\Sigma} = 0, \quad \left[\left(\vec{E} + \vec{b} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_{\parallel} \right]_{\Sigma} = 0. \quad (66)$$

Afirmou ainda que \vec{b} deve ser proporcional à magnetização, \vec{M} , do meio magnético, no efeito Kerr.

Em 1899, Drude sumarizou o “estado da arte” acerca da dispersão rotatória magnética, diante da sociedade alemã de física. Aqui o vemos reportar-se aos fenômenos magneto-ópticos descobertos por Kerr e Faraday, por “*efeito Kerr*” e “*efeito Faraday*”. Diferentemente do que afirmou em 1894, distinguiu agora dois mecanismos básicos [107], aos quais se associam fórmulas de dispersão rotatória magnética distintas. No que segue vamos apresentá-los de forma anacrônica, em unidades do *S.I.*, por uma questão de uniformidade.

No primeiro mecanismo, o qual Drude chamou de **hipótese Hall**, íons presos elasticamente aos seus sítios, no interior da matéria, são postos a oscilar pela luz que atravessa o meio, na presença do campo externo \vec{B}_0 . Em movimento, estes íons equivalem a uma corrente elétrica e, tal como ocorre no efeito Hall, sofrem a força

$$i d\vec{l} \times \vec{B}_0.$$

Da dinâmica dos íons e sua contribuição para as variáveis do campo eletromagnético resulta que as “*equações de Maxwell*” circuitais, no mecanismo “*Hall*”, são a lei de Faraday, em sua forma padrão, e a lei de Ampère-Maxwell, com a presença do termo dispersivo na corrente de deslocamento¹⁵:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (67)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{v}_h \times \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (68)$$

Os campos (\vec{E}, \vec{B}) são tomados como solenoidais. A equação da onda eletromagnética que decorre destas equações é

$$\mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{v}_h \times \frac{\partial^3 \vec{E}}{\partial t^3}. \quad (69)$$

Os parâmetros ópticos (ϵ, \vec{v}_h), que nela aparecem, determinam a dispersão ordinária (índice de refração) e rotatória, respectivamente. Drude os obtém a partir das características dos íons e, longe das linhas de absorção,

¹⁵ Para dedução, ver Apêndice C

são dados por

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_a \frac{N_a e_a^2}{m_a} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)}, \quad (70)$$

$$\vec{\nu}_h = -\mu_0 \sum_a \frac{N_a e_a^3}{m_a^2} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2} \vec{B}_0. \quad (71)$$

Nas expressões acima N_a é o número de íons, por unidade de volume, de carga e_a , massa m_a , frequência natural ω_a . Para Drude, como defensor da **hipótese iônica** em geral, e_a , m_a se refere a qualquer íon opticamente ativo, o qual não se supõe tratar-se do elétron. Do elétron falaremos adiante.

Considerando-se que a luz se propaga paralelamente ao campo \vec{B}_0 e sendo esta direção tomada como eixo z , resulta de (69) que

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\nu_h \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{E}}{\partial t^3}. \quad (72)$$

O segundo mecanismo apresentado por Drude, o qual chamou de hipótese dos **circuitos moleculares** de Ampère-Weber, é um refinamento do que antes apresentou em 1894, dado acima em (64) e (65). Considerou a possibilidade dos íons carregarem consigo, intrinsecamente, momentos magnéticos, tomando inspiração na teoria de Weber do diamagnetismo. Segundo Weber, os meios *paramagnéticos* são aqueles em que tais momentos são pré-existent e sob ação de um campo magnético externo os momentos tendem a se orientar na direção do campo aplicado, reforçando a indução magnética. Nos *diamagnéticos* tais momentos são formados no ato de aplicação do campo magnético externo, por indução eletromagnética e, conseqüentemente, opondo-se ao campo que os induziu. Uma vez formados, os mesmos se mantêm por não requerem dispêndio de energia para isso, até que o campo magnético externo seja removido, quando então nova indução eletromagnética entrará em ação, desfazendo-os (nos diamagnéticos) ou simplesmente desordenando-os novamente (nos paramagnéticos). No meio assim constituído, a luz que o atravessa põe os íons em movimento e estes, carregando consigo suas magnetizações, produzem forças eletromotrizas de movimento que dão contribuição adicional à lei da indução eletromagnética.

Disso resulta que as “*equações de Maxwell*” no mecanismo dos **circuitos moleculares** , são¹⁶

$$\nabla \times \left(\vec{E} - \vec{\nu}_m \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (73)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (74)$$

Novamente os campo (\vec{E}, \vec{B}) são entendidos como solenoidais. Delas decorre que equação de onda

eletromagnética é

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = -(\vec{\nu}_m \cdot \nabla) \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (75)$$

Os parâmetros ópticos $(\varepsilon, \vec{\nu}_m)$, determinam a dispersão ordinária (índice de refração) e rotatória. Acontece porém que ε resulta o mesmo de antes (70), enquanto que o parâmetro da rotação magnética é

$$\vec{\nu}_m := \mu_0 \sum_a \frac{N_a e_a}{m_a} \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2} \vec{m}_a. \quad (76)$$

A magnetização induzida no meio, pelo campo \vec{B}_0 aplicado, definirá a direção e intensidade do vetor magneto-óptico $\vec{\nu}_m$. Estando a luz se propagando nesta direção e tomando-a por z , (75) reduz-se à

$$\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\nu_m \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{E}}{\partial t \partial z^2}. \quad (77)$$

O sentido da rotação do plano de polarização é determinado pelo sinal de ν_m . Drude chamou atenção de que isso dependerá do sentido dos momentos magnéticos moleculares \vec{m}_a , isto é, se os circuitos moleculares reforçam ou atenuam o campo aplicado. Íons diamagnéticos terão momentos magnéticos antiparalelos ao campo aplicado e íons paramagnéticos terão momentos paralelos. Os parâmetros do modelo acomodam as duas possibilidades. O sentido da rotação magnética, não está determinado pela característica paramagnética ou diamagnética do meio em questão. Temos também nesse mecanismo que o grau da rotação magnética dependerá da magnetização de saturação, entendida como a condição em que todos os momentos moleculares \vec{m}_a terão atingido sua orientação e magnitude final, condição a partir da qual o aumento de \vec{H}_0 não mais acarreta em um aumento da atividade óptica rotatória.

11.1. A dispersão rotatória em cada modelo

A rotação magnética associada à **hipótese Hall** é¹⁷

$$\Delta\theta_h = 2\pi^2 c^3 \left(\frac{1}{n_0} \frac{\nu_h}{\lambda^2} \right) d, \quad (78)$$

enquanto que a associada à **hipótese dos circuitos moleculares** é¹⁸

$$\Delta\theta_m = 2\pi^2 c \left(n_0 \frac{\nu_m}{\lambda^2} \right) d. \quad (79)$$

Para confrontar os modelos com dados do efeito Faraday, Drude reiteradamente [107–109] favoreceu fórmulas de dispersão a dois parâmetros, tanto para o modelo *Hall*

¹⁷ O leitor encontrará a dedução de (78) no Apêndice A, como o caso $q = 3$, $n_0 = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$, $\nu = \nu_h$, da equação (A24).

¹⁸ O leitor encontrará a dedução de (78) no Apêndice A, como o caso $q = 1$, $n_0 = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$, $\nu = \nu_m$, da equação (A24).

¹⁶ Para dedução, ver Apêndice C.

como o dos *circuítos moleculares*, sempre considerando que o meio somente tinha íons ativos em frequências no ultravioleta. A fórmula assim obtida para o índice de refração, o qual é comum aos dois modelos, é

$$n_0^2 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_1^2}, \tag{80}$$

enquanto que as rotações magnéticas, $\Delta\theta_h$ e $\Delta\theta_m$, associadas a cada modelo¹⁹ são

$$\Delta\theta_h = 2\pi^2 c^3 \frac{1}{n_0} \left[\frac{a''}{\lambda^2} + \frac{b''\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2} \right] d, \tag{81}$$

e

$$\Delta\theta_m = 2\pi^2 cn_0 \left[\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b'}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \right] d. \tag{82}$$

Drude encontrou boa concordância de ambos modelos, a partir de dados de Verdet para no *dissulfeto de carbono* e para o *creosoto*, porém considerando o mecanismo dos circuitos moleculares comparativamente “*um pouco melhor*” que o mecanismo da hipótese hall. Na região do ultravioleta, porém, o mecanismo dos *circuítos moleculares* enfrentou dificuldades. Macaluso e Corbino [110] haviam observado a rotação magnética em vapores metálicos de Sódio e Lítio, próxima à ressonância ($\lambda \rightarrow \lambda_1$), onde a rotação é elevada. Em tais circunstâncias os termos em b'' e b' acima são dominantes, sendo que o modelo com b' indica uma inversão de sentido da rotação magnética, ao nos aproximarmos de λ_1 por valores menores ou maiores.²⁰ Tal inversão não está presente no modelo regido por b'' , sendo o sinal da rotação o mesmo quer nos aproximemos da ressonância por valores maiores ou menores que λ_1 . Os dados de Macaluso e Corbino não indicavam qualquer inversão, o que favorece o modelo da *hipótese Hall*. Drude admitiu que provavelmente o mecanismo *Hall* seria aquele aplicável a “*todos os gases e vapores*.”

Drude também favoreceu o *mecanismo Hall* em vapores metálicos devido à birrefringência observada quando o raio atravessa o meio perpendicularmente ao campo magnético aplicado, conforme obtido por Voigt [111]. Tal birrefringência é inexistente no mecanismo dos *circuítos moleculares*, o que pode ser visto aqui analisando o termo da birrefringência circular em (75),

$$(\vec{\nu}_m \cdot \nabla) \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Tomando-se a magnetização do meio em z , virá que $(\vec{\nu}_m \cdot \nabla) \vec{E} = \nu_m \partial \vec{E} / \partial z$. A onda propagando-se, digamos

em x , é caracterizada por $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ o que anula o termo em questão. Assim a luz propagando-se perpendicularmente deve “perceber” o meio como isotrópico e sem dispersão rotatória.

Drude considerou que o oposto é verdadeiro no *Fe*, *Ni* e *Co*, quando a dependência com o grau de magnetização do meio é clara, conforme os resultados de Kundt [94] e du Bois [96]. Somente o modelo das “*correntes moleculares*” permite dar sentido à dependência com a saturação, enquanto que o *mecanismo Hall* não sinaliza qualquer dependência com a magnetização do meio.

Deste modo, os dois mecanismos de Drude foram possíveis realizações físicas para os tipos de Airy (26) e (25), respectivamente, no contexto da *hipótese iônica* da constituição da matéria, ambos com sua virtudes e limitações.

Em 1900, Drude publicou seu influente “*Lehrbuch der Optik*” [108], do qual logo surgiu a versão em língua inglesa [112]. Livro que marcou definitivamente a incorporação da teoria eletromagnética da luz à óptica e foi amplamente visto como um livro na vanguarda da óptica física. Nesta primeira edição Drude novamente apresentou os dois mecanismos como base para a descrição dos efeitos magneto-ópticos.

12. Elétron, o Íon Fundamental

O termo “*elétron*” foi cunhado por George Johnstone Stoney (1826–1911), em 1891, para designar a suposta carga elementar, associada ao íon do hidrogênio²¹ obtido das leis de Faraday da eletrólise [113]. Este “elétron” tem relação carga/massa, estabelecida desde a época de sua postulação, em unidades eletromagnéticas (*e.m.u.*), de

$$\frac{e'}{m_H} \approx 10^4. \tag{83}$$

Um novo íon, porém, ao qual o nome “*elétron*” ficaria definitivamente associado, estava por revelar-se em dois importantes contextos experimentais nos anos de 1890. O primeiro foi a descoberta do *efeito Zeeman*: então assistente de Lorentz, Pieter Zeeman (1865–1943) observou, em setembro de 1896, a duplicação da linha de emissão D no espectro do Sódio e do Lítio, o *doblete Zeeman*, pela aplicação de um campo magnético externo, paralelo à direção de propagação da luz. Na sequência um *triplete*, pela ação do campo magnético perpendicularmente à direção de propagação. Lorentz descreveu o novo fenômeno magneto-óptico com base na sua teoria dos íons, prevendo as polarizações circulares opostas das linhas do *doblete*, bem como as polarizações lineares do *triplete*. Também estimou, a partir dos dados experimentais de Zeeman, a relação carga/massa dos

¹⁹ A dedução é apresentada no Apêndice D.

²⁰ A fórmula de dispersão próxima à ressonância requer uma reanálise das fórmulas, pois é igualmente af que a absorção se torna relevante e o atrito local sobre o íon deve ser considerado. Mesmo assim, é possível afirmar que não há mudança qualitativa do que foi afirmado, quanto a inversão de sinal no modelo com b' e não inversão de sinal no modelo com b'' .

²¹ O íon em questão era, portanto, aquilo que hoje chamamos de “*próton*”, embora essa designação somente tenha surgido em 1919 quando Rutherford o identificou como primeiro constituinte nuclear do átomo.

íons opticamente ativos associados aos átomos de Sódio ou Lítio, fixando-a, no sistema $e.m.u.$, em

$$\frac{e}{m_e} \approx 10^7. \quad (84)$$

Em fevereiro de 1897, uma nota sobre o efeito Zeeman apareceu na seção “News” da *Nature* [114]. Uma sucessão de artigos surgiram ao longo do ano no *Philosophical Magazine* [115] e até setembro suas novas e mais seguras medidas já asseguravam que o íon em questão se distinguia do íon (positivo) associado ao hidrogênio (83) por ser negativo e por sua relação carga massa 10^3 vezes superior. Medidas de e/m_e e e^2/m_e indicaram que sua carga era igual e oposta a do íon do hidrogênio e que, portanto, era a sua massa que era 10^3 menor. Inicialmente, Lorentz reagiu com perplexidade chegando a adotar, provisoriamente, a designação lightons (light-ions) para então chamá-lo “*elétron*” a partir de 1899.

O outro contexto relevante à emergência do elétron se deu nos estudos da descarga elétrica através dos gases, onde a natureza dos *raios catódicos* haviam sido objeto de longa controvérsia. Em 1895, Jean Perrin (1870–1942), na França, mostrou que transportavam eletricidade negativa [116]. Em 1897, numa rápida escalada de medidas de relação carga/massa a interpretação de que se tratava de um feixe de partículas ganhou força. Em janeiro, Emil Johann Wiechert (1861–1928) comunicou os resultados de suas experiências à Sociedade de Economia Física de Königsberg, declarando que eram raios massivos, de partículas 1500 vezes menor que a do íon do hidrogênio [117]. Também Walther Kaufmann [118, 119]. Por fim, J. J. Thomson [120], em maio, no clássico artigo “*Cathode Rays*” [121]. Em síntese, tais medidas forneceram que os “*corpúsculos*” catódicos possuíam a mesma relação carga massa (84) do íon do efeito Zeeman.

Ao tomar conhecimento do efeito Zeeman, Becquerel logo percebeu a correspondência do fator (84) de Zeeman com o período, T_B , associado às suas medidas de atividade rotatória magnética. Partindo de considerações genéricas, Becquerel admitiu “*a exemplo de um grande número de físicos*” que a região do espaço onde há um campo magnético é uma região onde existem turbilhões etéreos. Admitiu também a “*hipótese de Fresnel*” de que meios opticamente ativos são aqueles que propagam polarizações circulares, esquerda e direita, de velocidades distintas. A justificativa do efeito Faraday resulta da hipótese de que o modo de polarização circular que gira no sentido do turbilhão se adianta relativamente ao que se propaga no sentido oposto ao turbilhão. Essas hipóteses permitiram a Becquerel obter uma fórmula para a rotação magnética, no efeito Faraday longitudinal, que é²²

$$\Delta\theta_{bec} = \frac{2\pi}{T_B} \frac{1}{c} \frac{dn}{d\omega} d. \quad (85)$$

²² Dedução exibida ao final do Apêndice D

Na expressão acima c é a velocidade da luz no vácuo, n o índice de refração, ω a frequência de onda, d a distância percorrido no interior do meio ativo. Finalmente, T_B é o período da rotação turbilhonar associada ao campo magnético, que Becquerel supôs ser inversamente proporcional à intensidade do campo. Para um campo unitário, em uma variedade de substâncias, encontrou boa concordância entre $1/T_B$ e (84), fato que considerou “ *muito notável*” que o fenômeno da rotação magnética conduziu ao mesmo valor numérico [122]. Em bases similares Becquerel abordou o efeito Zeeman.²³

Em 1899, J.J. Thomson [124] forneceu novas evidências de que o *corpúsculo* catódico é o mesmo íon presente no *efeito fotoelétrico*, no *efeito termoiónico*, e virtualmente o mesmo envolvido no processo de ionização de todos os gases, sob ação dos raios-X, bem como os constituintes da recém descoberta *emissão beta* radioativa. Em sua “*Nobel lecture*” [125] Thomson insistiu na sua universalidade não como constituinte da matéria mas como “*um dos tijolos dos quais átomos são feitos*.”

Para essa universalização do “*elétron*” também concorreram os dados provenientes dos efeitos magneto-ópticos, obviamente o efeito Zeeman, mas também o efeito Faraday.

13. Declínio Dos Elétrons Girantes de Drude

O mecanismo “*Hall*” de Drude é, em sua essência, o mesmo que a abordagem do efeito Faraday apresentada por Lorentz em seu *The theory of electrons* [126], na qual a dispersão rotatória surge como consequência do setor magnético da força de Lorentz (62) na dinâmica do elétron. É a abordagem “de primeiros princípios” que encontramos nos livros ainda usados no presente, como a “*descrição clássica*” do efeito Faraday [127–131]. Quando Drude a apresentou, no entanto, havia uma distinção significativa, a saber: o íon e/m não era, necessariamente, o *elétron*, podendo existir “tipos” deles positivos e negativos. A premissa de Drude é que há uma variedade de íons opticamente ativos, constituintes da matéria. Claro está que emergência e universalidade do elétron, neste período, gradualmente o colocou como a peça fundamental dentre os íons ativos, o verdadeiro “*átomo de eletricidade*”. Ainda assim, se supunha que deveriam existir os positivos e os negativos, similares, o que permitia conceber, por exemplo, o átomo de hidrogênio como um aglomerado de 10^3 destes átomos

²³ Anacronicamente sabemos que a *frequência Larmor* ou *frequência ciclotron* do elétron, em um campo magnético externo B_0 , a qual é a frequência de precessão deste em torno da linha de indução magnética, é dada por $\omega_c = eB_0/2m_e$. Podemos associar a ela um período T_c tal que $2\pi/T_c = eB_0/2m_e$, justamente o “*turbilhão*” imaginado por Becquerel. Em um campo unitário resulta $2\pi/T_c = e/2m_e$, a coincidência notada por Becquerel com o efeito Zeeman. A frequência ciclotron foi introduzida por Larmor, no fim de 1897, ao abordar o efeito Zeeman [123] a partir da teoria do elétron.

de eletricidade, positivos e negativos, de modo que o sistema como um todo era neutro, e permitindo que algum ou alguns elementos periféricos fossem íons opticamente ativos.

No período que se seguiu à publicação do *Lehrbuch*, dificuldades lá apontadas no mecanismo das *correntes moleculares* aprofundaram-se. Na segunda edição do *Lehrbuch*, surgida em 1906, Drude informa que os desdobramentos da teoria da dispersão e da atividade rotatória magnética, desde 1900, consistiram na substituição da *hipótese iônica* pela *hipótese do elétron*. No que concerne ao efeito Faraday, referências foram adicionadas e atualizadas dos trabalhos de Macaluso e Corbino sobre a dispersão na vizinhança da linha D dos vapores de Sódio, reiterando o que já fora estabelecido sobre o mecanismo *Hall* nestes casos. Demonstrou que é possível obter a lei de rotação magnética (85) a partir das fórmulas do mecanismo *Hall*, (70) e (71), admitindo-se que todos os íons ativos são elétrons²⁴, apontando a consistência do valor de e/m_e para diversas substâncias, o que constitui uma nova confirmação da teoria geral dos elétrons.

Em 1908, Voigt publicou “*Magneto-und Elektro-Optik*” [132], onde apontou as dificuldades do modelo das *correntes moleculares* quanto à curva de dispersão na vizinhança das linhas de absorção, onde a inversão de sinal não é observada. Também sua incapacidade de reproduzir a birrefringência induzida, quando o campo é aplicado transversalmente à direção de propagação da luz. Tal birrefringência havia sido estabelecida por ele em vapores metálicos e “*inequivocamente*” em líquidos como o nitrobenzeno. Para Voigt, este era um critério da maior importância para descartar os esquemas explicativos incapazes de prever a birrefringência transversal, como é o caso de (75).

Em 1909, Lorentz publicou “*The Theory of Electrons*” [126], resultado das notas do curso ministrado na Universidade de Columbia, EUA, em 1906. Elencou como marcos da conexão entre os fenômenos eletromagnéticos e ópticos os efeitos Faraday (1845), Kerr (1877) e Zeeman (1896). O efeito Faraday foi aqui discutido, como já dissemos, a partir de sua teoria do elétron, o que corresponde ao mecanismo *Hall* de Drude, tendo o elétron como íon universal. Na realidade Lorentz identifica como efeito Faraday, aquele que corresponde a atividade rotatória induzida pelo elétron. Não tratou da rotação magneto-óptica dependente da magnetização, entendida aqui como teoria do efeito Kerr.

Em 1910, surgiu a primeira edição de “*History of aether and electricity*” [133], de Edmund Whittaker (1873–1956). O último capítulo aborda as teorias *do éter e do elétron* nos anos finais do século XIX, onde apresentou o efeito Faraday como uma das conquistas da teoria do elétron. Apontou a equação de onda (69) como aquela que “*é geralmente aceita nos tempos atuais*”, sem comentar qualquer outro mecanismo.

Assim, passados 30 anos desde a hipótese de Rowland, o que os dados sobre o efeito Faraday nos permitiam dizer? O livro de Robert Wood [134], em sua segunda edição no ano de 1911, nos fornece os elementos:

1. A direção da rotação magnética não tem relação como a natureza paramagnética/diamagnética da substância. Embora a rotação positiva (esquerda) tenha sido aquela observada inicialmente em diamagnéticos, inúmeros exemplos negativos (direitos) deles haviam sido observados. Entre os diamagnéticos: virtualmente todos os gases e líquidos transparentes (+), Borato de chumbo (+), Ferrocianeto de potássio (+) e Cloreto de titânio (-). Entre os paramagnéticos: Ferro (+), Cobalto (+), Níquel (+), Oxigênio (+), Sais de Cobalto, de Níquel, de Manganês e de Cobre (+), Sais de Ferro (-), Ferricianeto de potássio (-), Cromato e dicromato de potássio (-), sais de Cério (-), de Lantânio (-) e de Didímio (-).
2. A proporcionalidade da rotação com a intensidade do campo magnético também não é regra universal, havendo a dependência com a saturação nos Ferromagnéticos.
3. Não havia evidência conhecida de um meio que apresentasse a inversão de sinal na lei de dispersão rotatória em torno da linha de absorção, conforme previsto no modelo dos *circuitos moleculares*, ou, como Wood o chamou modelo dos *électrons girantes*.

A ironia aqui, se assim podemos dizer, é que elétrons possuem efetivamente momento magnético, isto é, são “girantes”.

14. Do Novo ao Clássico

A década de 1910 é, e por diversas razões, hoje vista como revolucionária no desenvolvimento da física. A lei do corpo negro (1900), a relatividade especial (1905), a teoria do decaimento radioativo (1908), entre outros eventos, rapidamente colocaram a *hipótese iônica* na condição de uma tímida iniciativa para se entender a estrutura da matéria e a física subatômica. Suas conquistas foram importantes e notórias, mas ela logo seria destituída da posição de uma física de vanguarda, para a condição de um modelo clássico, exaurido em suas possibilidades, que cumpriu com o seu papel. Mas, suas premissas não eram condizentes com o modo de operação do átomo.

No mesmo ano da segunda edição do livro de Wood, Ernest Rutherford (1871–1937) propôs a existência do núcleo atômico [135] com seus inconcebíveis elétrons orbitais. Dois anos depois Neils Bohr (1885–1962) tornou os elétrons atômicos estáveis postulando a existência dos *estados estacionários* nos quais os elétrons permanecem indiferentes, exceto quando lhes é fornecido o *quanta* de radiação eletromagnética exato, que possibilita uma

²⁴ Apresentamos o cálculo no Apêndice D.

transição atômica [136]. O elétron, a rigor, não co-oscila continuamente e elasticamente com a onda eletromagnética que atravessa o meio, nem tampouco são as linhas de emissão e absorção os picos das ressonância associadas a tais oscilações. São, em vez disso, evidências dos *quanta* emitidos ou absorvidos pelos elétrons, em um novo tipo de interação entre matéria e a radiação, que possui moeda de troca certa.

Arnold Sommerfeld (1868–1951) lembrou palavras que atribuiu a Drude, acerca da *hipótese iônica* e da *teoria do elétron* e seu impacto na teoria da dispersão e dispersão rotatória, ditas por volta de 1900:

“*Vivemos em uma era grandiosa, estamos começando a ter um vislumbre da composição elétrica da matéria*” [Drude, segundo Sommerfeld [127], p. 97.]

E Sommerfeld arrematou:

“*Houvesse ele vivido para testemunhar os desenvolvimentos das décadas seguintes, teria visto suas expectativas mais ousadas serem superadas.*” [Sommerfeld, [127], p. 97.]

O ambiente de ruptura iniciado pela teoria do corpo negro de Planck (1900) e culminando com modelo atômico de Bohr (1913) desfez as expectativas de que efeitos magneto-ópticos dependentes de propriedades tão íntimas da matéria como é afinal a magnetização pudessem almejar uma descrição em bases tão simples. Somente o advento da teoria quântica da dispersão por H. Kramers (1924), Kramers e Heiseberg (1925) o problema da descrição do efeito Faraday em bases quânticas será abordado por L. Rosenfeld (1929) e por M. Born e P. Jordan (1930). Tais desdobramentos, porém, estão além do escopo deste trabalho.

15. Considerações Finais

O efeito Faraday herdou seu entendimento inicial da teoria da birrefringência circular, de Fresnel, excetuando-se o fato de que tal birrefringência era, agora, induzida pela ação magnética e dela dependente quanto ao sentido da rotação.

Mesmo estando claro, desde a descoberta, em tratar-se de um fenômeno no qual é a matéria bruta quem intervém, por alguma modificação nela induzida pela ação do magnetismo, as especulações teóricas voltaram-se principalmente para a caracterização da dinâmica da onda luminosa, deixando livres, aos desenvolvimentos subsequentes, a determinação dos parâmetros indeterminados nos modelos.

Embora tenha servido de inspiração parcial para a postulação da *teoria eletromagnética da luz*, esta teoria não foi capaz de oferecer uma descrição eletromagnética do efeito Faraday, pelas mãos de Maxwell. Particularmente não pôde avançar sobre a óptica dos meios dispersivos, devido à necessidade de se estabelecer a

clara separação entre as propriedades do éter (do campo) e da matéria. Isso somente se deu nos desenvolvimentos posteriores à obra eletromagnética de Maxwell e exigiram uma solução de compromisso entre a teoria do campo eletromagnético, o qual descreve a interação, e o atomismo elétrico, presente na eletrodinâmica continental, cuja origem remontava ao trabalho de Weber.

A *hipótese iônica* materializou esta solução de compromisso, produzindo uma teoria eletromagnética da dispersão, a qual estendida à dispersão rotatória, lançou luz sobre o significado dos parâmetros indeterminados nos modelos que descreviam a dinâmica da luz no efeito magneto-óptico, bem como forneceu critérios para afinal depurá-los pela experiência.

A emergência do elétron, nos últimos anos do século XIX nos legou uma descrição clássica, de primeiros princípios, para o efeito Faraday. Tal descrição, no entanto, não possibilitou a compreensão de todas as características dos fenômenos magneto-ópticos, conhecidas àquela altura nos diversos materiais.

Material Suplementar

Apêndice A

Autoestados de Polarização Circular

Seja a equação da onda para um campo vetorial \vec{f} , que descreve a propagação ao longo da direção z da forma

$$\frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial z^2} = -\nu \hat{z} \times \frac{\partial^3 \vec{f}}{\partial t^q \partial z^{(3-q)}}, \quad (\text{A1})$$

em que $q = \{0, 1, 2, 3\}$, (n_0, ν) coeficientes que podem depender da frequência da onda em questão e c a velocidade de propagação da perturbação \vec{f} no vácuo. Exige-se ainda que seja uma onda transversal

$$\vec{f} \cdot \hat{z} = 0. \quad (\text{A2})$$

Quer-se provar que as autofunções solução de (A1) são ondas planas de **polarização circular**, direita e esquerda. Portanto, (A1) descreve a propagação em um meio que apresenta **birrefringência circular**.

Solução: Uma onda transversal propagando-se em z , monocromática de frequência ω , índice de refração n , amplitude constante f_0 e cujo vetor polarização é \hat{p} pode ser descrita como

$$\vec{f}(z, t) = f_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n \right) \right] \hat{p}. \quad (\text{A3})$$

A transversalidade (A2) igualmente estabelece, que o vetor polarização pode ser escrito como

$$\hat{p} = -\hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{p}). \quad (\text{A4})$$

Substituindo (A3) em (A1) resulta que

$$\left[n^2 - n_0^2 \right] \hat{p} = i\nu c^q \left(\frac{\omega}{c} \right) (-1)^{3-q} n^{3-q} \hat{z} \times \hat{p}. \quad (\text{A5})$$

Multiplicando (A5) pelo fator $[n^2 - n_0^2]$, usando recursivamente a mesma equação do lado direito, e usando (A4), resulta a relação de dispersão

$$n^2 - n_0^2 = \pm \nu (-1)^{3-q} c^q \left(\frac{\omega}{c}\right) n^{3-q}. \tag{A6}$$

Substituindo (A6) em (A5) virá que

$$\hat{p}_\pm = \pm i \hat{z} \times \hat{p}_\pm, \tag{A7}$$

o que permite explicitá-los em termos dos versores da base canônica (\hat{x}, \hat{y}) como

$$\hat{p}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i \hat{y}). \tag{A8}$$

O fator $\sqrt{2}$ foi introduzido de modo a satisfazer a “condição de ortonormalização” para bases complexas

$$\hat{p}_\pm \cdot \hat{p}_\pm = 0, \quad \hat{p}_\pm \cdot \hat{p}_\pm^* = 1. \tag{A9}$$

As soluções de (A1) ocorrem, portanto, em pares e são da forma

$$\vec{f}_\pm(z, t) = f_0^\pm \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_\pm \right) \right] \hat{p}_\pm, \tag{A10}$$

na qual n_\pm são soluções de (A6) correspondentes aos dois possíveis sinais, naquela equação, e f_0^\pm são amplitudes constantes associadas a cada uma. A velocidade de cada modo \pm é

$$v_\pm = \frac{c}{n_\pm}. \tag{A11}$$

Tais soluções representam ondas de **polarização circular** esquerda (+) e direita (-), respectivamente. De fato, tomando a parte real de (A10) virá

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\vec{f}_\pm \right) &= \frac{|f_0^\pm|}{\sqrt{2}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} n_\pm \right) + \theta_0^\pm \right] \hat{x} \\ &+ \pm \frac{|f_0^\pm|}{\sqrt{2}} \text{sen} \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} n_\pm \right) + \theta_0^\pm \right] \hat{y}, \end{aligned} \tag{A12}$$

na qual a fase θ_0^\pm provém de

$$f_0^\pm = |f_0^\pm| \exp i\theta_0^\pm. \tag{A13}$$

A solução geral de (A1), será então a combinação linear

$$\begin{aligned} \vec{f}(z, t) &= f_{0+} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_+ \right) \right] \hat{p}_+ \\ &+ f_{0-} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_- \right) \right] \hat{p}_-, \end{aligned} \tag{A14}$$

a qual representa, em geral, **polarizações elípticas**.

Uma situação de particular interesse é a seguinte: suponha que o meio em questão ocupa o semiespaço $z \geq 0$, enquanto que o semiespaço $z < 0$ é vazio. A onda incidente, propagando-se sempre ao longo de z ,

encontra-se linearmente polarizada no vazio com suas oscilações ocorrendo, digamos, em \hat{x} . Assim, a condição de contorno para (A14), em $z = 0$ é:

$$\begin{aligned} \vec{f}(0, t) &= \left(\frac{f_{0+} + f_{0-}}{\sqrt{2}} \right) e^{i\omega t} \hat{x} \\ &+ -i \left(\frac{f_{0+} - f_{0-}}{\sqrt{2}} \right) e^{i\omega t} \hat{y} = f_0 e^{i\omega t} \hat{x}, \end{aligned}$$

o que nos leva à amplitudes idênticas

$$f_{0+} = f_{0-} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}. \tag{A15}$$

Assim, (A14) torna-se agora

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{circ}}(z, t) &= \frac{f_0}{\sqrt{2}} \left\{ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_+ \right) \right] \hat{p}_+ \right. \\ &\left. + \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n_- \right) \right] \hat{p}_- \right\}, \end{aligned} \tag{A16}$$

a qual representa, uma superposição de **polarizações circulares**, esquerda (+) e direita (-), propagando-se com velocidades distintas, uma da outra, no interior do meio.

A.1 Rotação do plano de polarização

A partir de (A6) é sempre possível exibir uma solução de n para cada sinal naquela equação, as quais chamaremos n_\pm . Definindo então

$$\bar{n} := \frac{n_+ + n_-}{2}, \quad \frac{\Delta n}{2} := \frac{n_+ - n_-}{2}, \tag{A17}$$

será sempre possível escrever

$$n_\pm = \bar{n} \pm \frac{\Delta n}{2}. \tag{A18}$$

Substituindo (A18) em (A16), juntamente com (A8), resulta

$$\vec{f}_{\text{circ}}(z, t) = f_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \bar{n} \right) \right] \hat{p}(z, \Delta n), \tag{A19}$$

em que

$$\hat{p}(z, \Delta n) = \cos \left(\frac{\omega \Delta n}{c} z \right) \hat{x} + \text{sen} \left(\frac{\omega \Delta n}{c} z \right) \hat{y}. \tag{A20}$$

Esta é uma onda propagando-se com fator de fase $(ct - z\bar{n})$, o que nos autoriza a interpretar \bar{n} como *índice de refração efetivo*. A direção da oscilação para $z \neq 0$, no entanto, não mais ocorre na direção original \hat{x} , sendo agora dada pelo vetor polarização (A20). Assim, Δn determina a rotação do plano de polarização, a medida que a onda avança. Após percorrer a distância $z = d$ o ângulo de rotação do plano de polarização será portanto

$$\Delta\theta = \frac{\omega \Delta n}{c} d. \tag{A21}$$

A.2 Dispersão ordinária e dispersão rotatória

Tomando (A6) e supondo que n difere de n_0 linearmente em ν teremos, em primeira aproximação, que

$$n_{\pm} = n_0 \pm \frac{\nu}{2} (-1)^{(3-q)} c^q \left(\frac{\omega}{c}\right) n_0^{(2-q)}, \quad (A22)$$

o que, conforme (A18), nos permite identificar

$$\bar{n} = n_0, \quad \frac{\Delta n}{2} = \frac{\nu}{2} (-1)^{(3-q)} n_0^{(2-q)} c^q \left(\frac{\omega}{c}\right) \quad (A23)$$

Dependendo da teoria da **dispersão ordinária** adotada, teremos uma dependência prescrita para $n_0 = n_0(\omega)$. Esta porém não determina a dependência de Δn com relação à ω , dependendo também do modelo de **dispersão rotatória**, isto é, do valor de q . Dentro da aproximação acima, a rotação do plano de polarização (A21) será finalmente

$$\Delta\theta = \frac{\nu}{2} (-1)^{(3-q)} n_0^{(2-q)} c^q \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 d. \quad (A24)$$

Apêndice B

Dispersão Rotatória No Mar de Vórtices

O momento angular de um vórtice individual, é dado por

$$\vec{L}_{cel} = \frac{\mu R}{4\pi} \vec{H} V_{cel}, \quad (B1)$$

sendo R o raio, μ uma constante proporcional à densidade do meio etéreo, \vec{H} o campo que mede o grau de rotação do turbilhão, e V_{cel} o volume da célula etérea em questão.

A variação de \vec{H} devido à deformação \vec{e} da célula, é tal que envolve apenas mudança de forma, sem alteração do volume, pois o distúrbio que atravessa a célula (a luz) é, por hipótese, solenoidal $\nabla \cdot \vec{e} = 0$. Isso é equivalente à afirmação de que tal variação é dada por sua derivada convectiva

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}.$$

A taxa de variação do momento angular do vórtice, é então

$$\frac{d\vec{L}_{cel}}{dt} = \frac{\mu R}{4\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} V_{cel}. \quad (B2)$$

Isso significa que um estado de tensão está presente no domínio do vórtice, o qual caracterizamos pelo tensor de tensão, T_{ij} , o qual produz o torque total sofrido pelo vórtice. Da mecânica do contínuo temos então a relação

$$\frac{dL_{cel}^i}{dt} = \epsilon^{ijk} \oint_{cel} x_j T_{kl} n^l dS, \quad (B3)$$

sendo \hat{n} a normal à superfície do vórtice, \vec{x} o vetor posição do elemento de área dS em questão. A integral

tomada sobre a superfície total do vórtice e ϵ^{ijk} o símbolo de Levi-Civita.

Em pontos na superfície do vórtice,

$$\vec{x} = R\hat{n}, \quad dS = R^2 d\Omega,$$

sendo $d\Omega$ o elemento de ângulo sólido e assumindo que o vórtice é esférico, a menos da perturbação. Poderemos escrever,

$$\frac{dL_{cel}^i}{dt} = R^3 \epsilon^{ijk} \oint_{cel} n_j T_{kl} n^l d\Omega.$$

Admitindo que T_{kl} não varia significativamente no domínio do vórtice, virá

$$\frac{dL_{cel}^i}{dt} = R^3 \epsilon^{ijk} T_{kl} \oint_{cel} n_j n^l d\Omega,$$

e usando a identidade matemática,

$$\oint_{cel} n_j n_l d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{jl}, \quad (B4)$$

virá finalmente

$$\frac{dL_{cel}^i}{dt} = -\epsilon^{ijk} T_{[jk]} V_{cel}, \quad (B5)$$

em que

$$T_{[jk]} := \frac{1}{2} (T_{jk} - T_{kj}) \quad (B6)$$

é a parte antissimétrica do tensor que procuramos. Na verdade somente a parte antissimétrica interessa, pois a parte simétrica, caso existisse, não seria capaz de produzir variação do momento angular. Com efeito

$$\epsilon^{ijk} (T_{jk} + T_{kj}) = 0,$$

identicamente. Temos assim então um tensor totalmente antissimétrico.

Igualando então (B2) e (B5) virá

$$\frac{\mu R}{4\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial e^i}{\partial t} = -\epsilon^{ijk} T_{[jk]},$$

ou, finalmente,

$$T_{jk} = -\epsilon_{jki} \frac{\mu R}{8\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial e^i}{\partial t}, \quad (B7)$$

que é o tensor das tensões produzidas pela onda sobre o vórtice.

A reação, \vec{f} , sobre a dinâmica da própria onda será dada pela divergência do tensor de tensão

$$f^j = \partial_k T^{jk}. \quad (B8)$$

Da expressão (B7),

$$f^j = -\epsilon^{jki} \frac{\mu R}{8\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \frac{\partial}{\partial t} (\partial_k e_i),$$

ou, em notação vetorial,

$$\vec{f} = -\frac{\mu R}{8\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right),$$

que é o resultado utilizado no texto, em (30).

Apêndice C

Dinâmica Dos Íons Nos Mecanismos de Drude

C.1 Hipótese do efeito Hall

Quer-se determinar a dinâmica do íon de massa m e carga e , o qual se encontra preso ao seu sítio, porém deslocado de \vec{s} de sua posição de equilíbrio. Sobre o íon atuam a força elástica $-m\omega_e^2\vec{s}$, o campo elétrico, $e\vec{E}$ da onda eletromagnética que atravessa o meio. Dado que o íon em movimento equivale a uma corrente, há que se considerar a “ação hall”

$$id\vec{l} \times \vec{B}_0 = e \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \vec{B}_0,$$

devida ao campo aplicado \vec{B}_0 . A ação do campo \vec{B} da própria onda eletromagnética pode ser desprezado diante da ação magnética do campo \vec{B}_0 aplicado. Um cálculo mais rigoroso deveria considerar o atrito local, cuja força é $-2m\gamma\dot{\vec{s}}$. Se tomamos a luz incidente (ω) no espectro visível e longe da frequência natural (ω_e) os efeitos do atrito podem ser desprezados. A dinâmica do íon é então

$$m\ddot{\vec{s}} + m\omega_e^2\vec{s} = e\vec{E} + e\dot{\vec{s}} \times \vec{B}_0. \tag{C1}$$

Supondo-se que tanto \vec{E} quanto \vec{s} são funções harmônicas de frequência ω , resulta da equação anterior a equação algébrica

$$(\omega_e^2 - \omega^2)\vec{s} = \frac{e}{m}\vec{E} + \frac{e}{m}i\omega\vec{s} \times \vec{B}_0. \tag{C2}$$

Considerando as magnitudes típicas do campo magnético B_0 aplicado, bem como estando o íon com sua frequência natural (ω_e) no ultravioleta, ocorre que

$$\frac{eB_0}{m} \frac{\omega}{\omega_e^2} \ll 1.$$

Substituindo recursivamente (C2) nela própria, visando eliminar \vec{s} no termo à direita, resulta que, em primeira ordem de \vec{B}_0 ,

$$\vec{s} = \frac{e/m}{(\omega_e^2 - \omega^2)}\vec{E} + i\omega \frac{e^2/m^2}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2}\vec{E} \times \vec{B}_0,$$

ou

$$\vec{s} = \frac{e/m}{(\omega_e^2 - \omega^2)}\vec{E} + \frac{e^2/m^2}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}_0. \tag{C3}$$

Se N é o número de íons por unidade de volume, o vetor polarização $\vec{P} = Ne\vec{s}$, associado aos deslocamentos dos íons, é então

$$\vec{P} = \frac{Ne^2/m}{(\omega_e^2 - \omega^2)}\vec{E} - \frac{Ne^3/m^2}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2}\vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{C4}$$

O vetor deslocamento elétrico, por sua vez,

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \tag{C5}$$

terá equação constitutiva da forma

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\vec{v}_h \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{C6}$$

na qual introduzimos os parâmetros

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{(\omega_e^2 - \omega^2)}, \tag{C7}$$

$$\vec{v}_h = -\mu_0 \frac{Ne^3}{m^2} \frac{1}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2}\vec{B}_0, \tag{C8}$$

os quais são, respectivamente, a permissividade elétrica (ϵ) e o parâmetro rotatório magnético (\vec{v}_h) do meio. Havendo N_a íons opticamente ativos do tipo que possui carga e_a , massa m_a , e frequência natural ω_a , as contribuições de todos eles devem ser levadas em conta, no que resulta

$$\epsilon = \epsilon_0 + \sum_a \frac{N_a e_a^2}{m_a} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)}, \tag{C9}$$

$$\vec{v}_h = -\mu_0 \sum_a \frac{N_a e_a^3}{m_a^2} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2}\vec{B}_0. \tag{C10}$$

Ficam assim deduzidas as expressões (70) e (71) apresentadas no texto.

Ainda, tomando a equação de Ampère-Maxwell em sua forma usual

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{C11}$$

e nela usando a equação constitutiva (C6), bem como $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, resulta

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{v}_h \times \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{C12}$$

o que demonstra a equação (68) apresentada no texto. A lei de Faraday aparece aqui em sua forma padrão,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{C13}$$

o que não demanda considerações adicionais.

C.2 Hipótese dos circuitos moleculares

Neste mecanismo considera-se que a dinâmica do íon de massa m e carga e , é determinada somente pela força elástica $-m\omega_e^2\vec{s}$, e pela ação do campo elétrico, $e\vec{E}$ da onda eletromagnética que atravessa o meio. O tratamento mais completo de Drude leva em conta também o atrito local, mas como dissemos, podemos

descartá-lo desde que estejamos longe da frequência natural. A dinâmica do íon é então

$$m\ddot{\vec{s}} + m\omega_e^2\vec{s} = e\vec{E}. \quad (\text{C14})$$

Analogamente ao que foi feito no caso anterior, teremos agora

$$\vec{s} = \frac{e/m}{\omega_e^2 - \omega^2}\vec{E}, \quad (\text{C15})$$

$$\vec{P} = N\frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_e^2 - \omega^2}\vec{E}, \quad (\text{C16})$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad (\text{C17})$$

sendo que

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{(\omega_e^2 - \omega^2)}, \quad (\text{C18})$$

portanto, o mesmo ε do caso anterior.

Se existirem N_a íons ativos, de carga e_a , massa m_a , frequência natural ω_a , a contribuição de todos devem ser levados em conta. Isso significa que ε torna-se

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_a \frac{N_a e_a^2}{m_a} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)}.$$

Mas isto não é tudo. Supõe-se, ainda, que o íon possui momento magnético,

$$\vec{m}_e = \frac{e}{T_e}\vec{S}_e = \frac{1}{2\pi}e\omega_e\vec{S}_e, \quad (\text{C19})$$

sendo T_e o período natural, consequentemente e/T_e a corrente no circuito molecular a ele associado, \vec{S}_e o vetor área do circuito molecular. Tais momentos produzem a magnetização

$$\vec{M} = N\vec{m}_e, \quad (\text{C20})$$

sendo N o número de circuitos moleculares por unidade de volume. O vetor indução magnética a ela associado é $\vec{B}_M = \mu_0\vec{M}$.

Como a oscilação o íon carrega consigo seu momento magnético, havendo N deles por unidade de volume, seus deslocamentos provocam forças eletromotrizes de movimento,

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \vec{B}_M = -\mu_0 \frac{e/m}{\omega_e^2 - \omega^2} \vec{M} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= -\vec{v}_m \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

na qual usamos (C15) e, também com o auxílio de (C20), introduzimos o parâmetro

$$\vec{v}_m := \mu_0 \frac{Ne}{m} \frac{1}{\omega_e^2 - \omega^2} \vec{m}_e. \quad (\text{C21})$$

Existindo N_a íons ativos, de carga e_a , massa m_a , frequência natural ω_a e de momentos magnéticos \vec{m}_a , e tomando-se a contribuição de todos eles, resulta de (C21) que

$$\vec{v}_m := \mu_0 \sum_a \frac{N_a e_a}{m_a} \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2} \vec{m}_a, \quad (\text{C22})$$

o que demonstra aquilo que foi afirmado em (76).

A equação de Maxwell relevante a ser considerada agora é a lei de Faraday. Em sua forma padrão temos

$$\nabla \times \vec{E}_{tot} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{C23})$$

em que \vec{E}_{tot} é a força eletromotriz total que concorre para a variação do fluxo magnético. No presente modelo ela é constituída de duas partes, a força eletromotriz \vec{E} carregada pela onda eletromagnética e a força \vec{E}' . Assim, a Lei de Faraday no mecanismo das correntes moleculares será

$$\nabla \times \left(\vec{E} - \vec{v}_m \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{C24})$$

o que prova a afirmação (73) feita no texto.

A lei de Ampère-Maxwell, por sua vez,

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{C25})$$

torna-se, usando (C17) e $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{C26})$$

conforme afirmado no texto.

Apêndice D

Fórmulas de Dispersão Rotatória de Drude

Cálculo das fórmulas de dispersão para n_0 , ν_h e n_m , associadas aos mecanismos *hall* e dos *circuitos moleculares*, tomando-se um só tipo de íon opticamente ativo, no ultravioleta.

Tomando o fato de que a velocidade da luz no vácuo é expressa em termos das constantes eletromagnéticas como $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, o índice de refração será $n_0 = c\sqrt{\mu_0\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$. De acordo com (70) temos que

$$n_0^2 = 1 + \sum_a \frac{N_a e_a^2}{\varepsilon_0 m_a} \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega^2)}. \quad (\text{D1})$$

Esta é a fórmula da dispersão ordinária, para o índice de refração em ambos os mecanismos, *hall* e *correntes moleculares*. A distinção dos dois modelos aparece ao

avaliarmos a constante de Verdet, devido aos parâmetros de rotação magnética distintos, ν e $\tilde{\nu}$, dados em (71) e (76) respectivamente.

Drude obteve formulas de dispersão ordinária (n_0) e rotatória (constante de Verdet) a dois parâmetros, supondo que os únicos íons de frequência natural próxima de uma frequência do visível, digamos ω_1 , estariam na região do ultravioleta. As frequências naturais de todos os outros muito além. Assim, (D1) pode ser escrita como

$$n_0^2 = 1 + \frac{N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^2} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_1)^2} + \frac{N_2 e_2^2}{\epsilon_0 m_2 \omega_2^2} + \frac{N_3 e_3^2}{\epsilon_0 m_3 \omega_3^2} + \dots,$$

na qual se fez $\{(\omega/\omega_a)^2 \approx 0, a = 2, 3, 4, \dots\}$. Somando e subtraindo o termo

$$\frac{N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^2},$$

pode-se então escrever

$$n_0^2 = \left[1 + \sum_{a=1} \frac{N_a e_a^2}{\epsilon_0 m_a \omega_a^2} \right] + \frac{N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^2} \left[\frac{1}{1 - (\omega/\omega_1)^2} - 1 \right].$$

Como $\omega/\omega_1 = \lambda_1/\lambda$, e $\lambda_1 = 2\pi c/\omega_1$ decorre que

$$\left[\frac{1}{1 - (\omega/\omega_1)^2} - 1 \right] = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_1^2} \frac{1}{\lambda^2 - \lambda_1^2}.$$

Para n_0 então resulta

$$n_0^2 = \left[1 + \sum_{a=1} \frac{N_a e_a^2}{\epsilon_0 m_a \omega_a^2} \right] + 4\pi^2 c^2 \frac{N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^4} \frac{1}{\lambda^2 - \lambda_1^2}.$$

Introduzindo os coeficientes de dispersão

$$a := 1 + \sum_{a=1} \frac{N_a e_a^2}{\epsilon_0 m_a \omega_a^2}, \quad b := 4\pi^2 c^2 \frac{N_1 e_1^2}{\epsilon_0 m_1 \omega_1^4}, \quad (D2)$$

teremos a fórmula de dispersão a dois parâmetros, a qual possui uma só ressonância no ultravioleta

$$n_0^2 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_1^2},$$

em conformidade com (80).

Considerações similares podem ser feitas para o coeficiente rotatório ν_h associado ao mecanismo *hall*. De (71)

$$\begin{aligned} \nu_h &= -\mu_0^2 H_0 \frac{N_1 e_1^3}{m_1^2 \omega_1^4} \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_1)^2]^2} - \mu_0^2 H_0 \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^3}{m_a^2 \omega_a^4} \\ &= -\mu_0^2 H_0 \frac{N_1 e_1^3}{m_1^2 \omega_1^4} \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2} - \mu_0^2 H_0 \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^3}{m_a^2 \omega_a^4}. \end{aligned}$$

Chamando (como Drude)

$$a'' := -\mu_0^2 H_0 \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^3}{m_a^2 \omega_a^4}, \quad b'' := -\mu_0^2 H_0 \frac{N_1 e_1^3}{m_1^2 \omega_1^4}, \quad (D3)$$

virá então que

$$\nu_h = a'' + b'' \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2}. \quad (D4)$$

A lei de rotação magnética (78) para o caso da *hipótese hall* é então

$$\Delta\theta_h = 2\pi^2 c^3 \frac{1}{n_0} \left[\frac{a''}{\lambda^2} + \frac{b'' \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2} \right] d,$$

em conformidade com (81).

Por fim, o coeficiente rotatório $\tilde{\nu}$ do mecanismo dos *circuitos moleculares* (76)

$$\begin{aligned} \nu_m &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{N_1 e_1^2 S_1}{m_1 \omega_1} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_1)^2} + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^2 S_a}{m_a \omega_a} \\ &= \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{N_1 e_1^2 S_1}{m_1 \omega_1} \right) \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^2 S_a}{m_a \omega_a} \right). \end{aligned}$$

Chamando (como Drude)

$$a' := \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{a=2} \frac{N_a e_a^2 S_a}{m_a \omega_a}, \quad b' := \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{N_1 e_1^2 S_1}{m_1 \omega_1}, \quad (D5)$$

virá então que

$$\nu_m = a' + b' \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}. \quad (D6)$$

A lei de rotação magnética com a ressonância ultravioleta é, para o caso das *correntes moleculares*,

$$\Delta\theta_{mol} = 2\pi^2 c n_0 \left[\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b'}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \right] d,$$

em conformidade com (82).

Sobre a lei rotação magnética de Becquerel (85), é possível deduzi-la a partir do mecanismo *hall* acrescida da suposição de que há somente um tipo de íon ativo, qualquer que seja sua frequência natural. De (D1) e (71) podemos escrever, nestas circunstâncias

$$n_0^2 = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^2}{m} \sum_a \frac{N_a}{\omega_a^2 - \omega^2},$$

e

$$\nu_h = -\mu_0^2 H_0 \frac{e^3}{m^2} \sum_a \frac{N_a}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2}.$$

Da primeira igualdade decorre que

$$n_0 \frac{dn_0}{d\omega} = \omega \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^2}{m} \sum_a \frac{N_a}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2},$$

donde

$$H_0 \frac{e}{m} n_0 \frac{dn_0}{d\omega} = \omega \frac{1}{\epsilon_0} H_0 \frac{e^3}{m^2} \sum_a \frac{N_a}{(\omega_a^2 - \omega^2)^2},$$

que, de acordo com a expressão para ν_h , é o mesmo que

$$H_0 \frac{e}{m} n_0 \frac{dn_0}{d\omega} = -\omega \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\nu_h}{\mu_0^2} = -\omega c^2 \frac{\nu_h}{\mu_0}.$$

Assim se no mecanismo *hall* estamos falando de um *íon universal*, o elétron, podemos escrever o parâmetro do poder rotatório como

$$\nu_h = -\frac{1}{c^2} \mu_0 \frac{H_0 e}{m} \frac{1}{\omega} n_0 \frac{dn_0}{d\omega}. \quad (\text{D7})$$

Lembrando que $\omega = 2\pi c/\lambda$, a fórmula da rotação magnética (78) poderá, então, ser escrita como

$$\Delta\theta_h = -\frac{1}{2c} \mu_0 \frac{H_0 e}{m} \omega \frac{dn_0}{d\omega} d, \quad (\text{D8})$$

a qual é a lei (85), desde que identifiquemos a frequência do turbilhão magnético de Becquerel, $2\pi/T_B$, com a frequência Larmor

$$\frac{2\pi}{T_B} = -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{H_0 e}{m} = -\frac{eB_0}{2m}. \quad (\text{D9})$$

Sendo o elétron negativo, a rotação associada é positiva (anti-horária), em conformidade com as observações de Becquerel.

Referências

- [1] J.Z. Buchwald, *The Rise of the Wave Theory of Light* (Chicago Univ. press, Chicago, 1989).
- [2] O. Darrigol, *A History of optics* (Oxford Univ. Press, New York, 2012).
- [3] E.T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity: The classical theories* (Thomas Nelson and Sons Ltd., London, 1951).
- [4] G.N. Cantor e M.J.S. Hodge, *Conceptions of ether* (Cambridge Univ. press, Cambridge, 1981).
- [5] O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein* (Oxford Univ. Press, New York, 2000).
- [6] C. Jungnickel e R. McCormach, *Intellectual Mastery of Nature - Theoretical Physics from Ohm to Einstein* (Univ. Chicago Press, Chicago, 1986), v. 2.
- [7] B.J. Hunt, *The Maxwellians* (Cornell University Press, Ithaca, 1991).
- [8] F. Arago, Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut Impérial de France **P.I**, 93 (1812).
- [9] J.B. Biot, Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut Impérial de France **P.I**, 135 (1812).
- [10] J.B. Biot, Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut Impérial de France **P.I**, 1 (1814).
- [11] I. Newton, *Óptica* (EDUSP, São Paulo, 2002).
- [12] B.A. Moura e C.C. Silva, Lat. Am. J. Phys. Educ. **2**, 218 (2008).
- [13] J.B. Biot, *Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris* (Imprimerie de Plassan, Paris, 1815), p. 190.
- [14] J.B. Biot, Annales de Chimie et Physique **9**, 372 (1818).
- [15] J.B. Biot, Annales de Chimie et Physique **10**, 63 (1819).
- [16] D. Gernez, Annales scientifiques de l'É.N.S. **1**, 1 (1864).
- [17] J.B. Biot, Mémoires de l'Académie royale des sciences **T.2**, 41 (1819).
- [18] A.J. Fresnel e F. Arago, Annales de Chimie et Physique **10**, 288 (1819).
- [19] A.J. Fresnel, Annales de Chimie et Physique **17**, 167 (1821).
- [20] A.J. Fresnel, Oeuvres Complètes **T.2**, 465 (1868).
- [21] A.J. Fresnel, Oeuvres Complètes **T.1**, 731 (1866).
- [22] A.J. Fresnel, Oeuvres Complètes **T.1**, 719 (1866).
- [23] A.J. Fresnel, Oeuvres Complètes **T.1**, 655 (1866).
- [24] A. Cauchy, Mémoire de l'Académie des sciences **X**, 293 (1831).
- [25] A. Cauchy, Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimique **T.14**, 6 (1830).
- [26] F.E. Neumann, Annalen der Physik **101**, 418 (1832).
- [27] G. Green, Transactions of the Cambridge Philosophical Society **7**, 1 (1842).
G. Green, Transactions of the Cambridge Philosophical Society **7**, 121 (1842).
- [28] J. MacCullagh, Philosophical Magazine **X**, 42 (1837).
- [29] J. MacCullagh, Transactions of the Royal Irish Academy **XXI**, 17 (1848).
- [30] J. MacCullagh, *Collected Works* (Longmans, Green & Co., London, 1880), p. 63.
- [31] M. Faraday, Philosophical Transactions of Royal Society **122**, 125 (1832).
- [32] J.C. Maxwell, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Dover Publ. Inc., New York, 1965), p. 786.
- [33] M. Faraday, Philosophical Transactions of Royal Society **120**, 1 (1830).
- [34] M. Faraday, Philosophical Transactions of Royal Society **128**, 1 (1838).
- [35] S. Thompson, *The life of William Thomson* (MACMILLAN and Co. Limited, London, 1910).
- [36] T. Martin, *Faraday's Diary of Experimental Investigation* (HR Direct, 2008).
- [37] M. Faraday, Philosophical Transactions of Royal Society **136**, 1 (1846).
- [38] M. Faraday, Philosophical Magazine **29**, 153 (1846).
M. Faraday, Philosophical Magazine **29**, 249 (1846).
- [39] M. Faraday, Philosophical Magazine **28**, 294 (1846).
- [40] M. Faraday, Annalen der Physik **144**, 105 (1846).
- [41] M. Faraday, Archives des Sciences Physiques et Naturelles de Genève **T.1**, 385 (1846).
- [42] M. Faraday, Annales de Chimie et Physique **17**, 359 (1846).
- [43] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, (Dover ed., New York, 1965), v. 3.
- [44] R. Boettger, Annalen der Physik **143**, 290 (1846).
- [45] R. Boettger, Annalen der Physik **143**, 350 (1846).
- [46] J. Poggendorff, Annalen der Physik **143**, 439 (1846).
- [47] M. Faraday, Comptes Rendus **22**, 113 (1846).
- [48] C. Pouillet, Comptes Rendus **22**, 135 (1846).
- [49] E. Becquerel, Annales de Chimie et Physique **17**, 437 (1846).
- [50] A. Bertin, Annales de Chimie et Physique **23**, 5 (1848).

- [51] G. Wiedemann, *Annalen der Physik* **158**, 215 (1851).
- [52] G. Wiedemann, *Annales de Chimie et Physique* **34**, 121 (1852).
- [53] E. Verdet, *Annales de Chimie et Physique* **41**, 370 (1854).
- [54] E. Verdet, *Annales de Chimie et Physique* **43**, 37 (1855).
- [55] E. Verdet, *Comptes Rendus* **43**, 529 (1856).
- [56] E. Verdet, *Annales de Chimie et Physique* **52**, 129 (1858).
- [57] E. Verdet, *Philosophical Magazine* **9**, 481 (1855).
- [58] E. Verdet, *Philosophical Magazine* **12**, 483 (1856).
- [59] E. Verdet, *Philosophical Magazine* **14**, 78 (1857).
- [60] E. Verdet, *Philosophical Magazine* **14**, 236 (1857).
- [61] E. Verdet, *Philosophical Magazine* **15**, 409 (1858).
- [62] G.B. Airy, *Philosophical Magazine* **28**, 469 (1846).
- [63] E. Verdet, *Annales de Chimie et physique* **69**, 415 (1863).
- [64] C. Neumann, *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes: Versuch einer mathematischen Theorie* (Kessinger Publishing, LLC, Montana, 1863).
- [65] O. Knudsen, *Archive for History of Exact Sciences* **15**, 235 (1976).
- [66] A. Cauchy, *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, (J.G. Calve lib., Prague, 1836).
- [67] W. Weber e R. Kohlrausch, *Annalen der Physik* **175**, 10 (1856).
- [68] J.C. Maxwell, *Philosophical Magazine*, **21**, 161 (1861).
- [69] J.C. Maxwell, *Philosophical Magazine*, **21**, 281 (1861).
- [70] J.C. Maxwell, *Philosophical Magazine* **22**, 12 (1862).
- [71] J.C. Maxwell, *Philosophical Magazine* **23**, 85 (1862).
- [72] J.C. Maxwell, *Philosophical Transactions of Royal Society* **155**, 459 (1865).
- [73] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and Magnetism* (Clarendon Press, Oxford, 1873).
- [74] H. Helmholtz, *Philosophical Magazine* **33**, 485 (1867).
- [75] J. Kerr, *Philosophical Magazine* **3**, 321 (1877).
- [76] J. Kerr, *Philosophical Magazine*, **50**, 337 (1875).
- [77] J. Kerr, *Philosophical Magazine*, **50**, 446 (1875).
- [78] G.F. FitzGerald, *Proceedings of the Royal Society* **25**, 447 (1877).
- [79] J. Kerr, *Philosophical Magazine* **5**, 161 (1878).
- [80] G.F. FitzGerald, *Philosophical Transactions of Royal Society* **171**, 691 (1880).
- [81] H. Becquerel, *Comptes Rendus* **88**, 709 (1879).
- [82] H. Becquerel, *Comptes Rendus* **90**, 1407 (1880).
- [83] E. Bichat, *Comptes Rendus* **88**, 712 (1879).
- [84] E. Bichat, *Journal de Physique* **9**, 275 (1880).
- [85] A. Kundt e W.C. Röntgen, *Annalen der Physik* **242**, 332 (1879).
- [86] A. Kundt e W.C. Röntgen, *Annalen der Physik* **244**, 278 (1879).
- [87] E.H. Hall, *American Journal of Mathematics* **2**, 287 (1879).
- [88] E.H. Hall, *Philosophical Magazine* **9**, 225 (1879).
- [89] E.H. Hall, *American Journal of Mathematics* **20**, 161 (1880).
- [90] E.H. Hall, *Philosophical Magazine* **10**, 161 (1880).
- [91] H.A. Rowland, *American Journal of Mathematics* **2**, 354 (1879).
- [92] H.A. Rowland, *American Journal of Mathematics* **3**, 89 (1880).
- [93] H.A. Rowland, *Philosophical Magazine* **11**, 254 (1881).
- [94] E.H. Hall, *Philosophical Magazine* **12**, 157 (1881).
- [95] E.H. Hall, *Philosophical Magazine* **19**, 419 (1885).
- [96] A. Kundt, *Philosophical Magazine* **18**, 308 (1884).
- [97] A. Kundt, *Annalen der Physik* **263**, 191 (1886).
- [98] A. Righi, *Annales de Chimie et Physique* **4**, 433 (1885).
- [99] H.E.J.G. Du Bois, *Philosophical Magazine* **29**, 253 (1890).
- [100] H. Hertz, *Annalen der Physik* **270**, 551 (1888).
- [101] H. Hertz, *Annalen der Physik* **270**, 609 (1888).
- [102] O. Heaviside, *Electrical Papers* (MacMillan and Co., London, 1892), v. 1.
- [103] H. Hertz, *Annalen der Physik* **276**, 577 (1890).
- [104] W. Sellmeier, *Annalen der Physik* **221**, 399 (1872).
- [105] W. Sellmeier, *Annalen der Physik* **221**, 520 (1872).
- [106] W. Sellmeier, *Annalen der Physik* **223**, 386 (1872).
- [107] W. Sellmeier, *Annalen der Physik* **223**, 525 (1872).
- [108] H. Helmholtz, *Annalen der Physik* **230**, 582 (1875).
- [109] H. Helmholtz, *Annalen der Physik* **284**, 389 (1893).
- [110] H.A. Lorentz, *Archives Néerlandaises* **25**, 363 (1892).
- [111] H.A. Lorentz, *Collected Papers* (Springer, Dordrecht, 1937), v. 5, p. 1.
- [112] P. Drude, *Physik des Äthers auf elektro-magnetischer Grundlage* (Enke, Stuttgart, 1894).
- [113] P. Drude, *Verh Deutsch Phys. Ges.* **1**, 107 (1899).
- [114] P. Drude, *Lehrbuch der Optik* (S. Hirzel, Leipzig, 1900).
- [115] P. Drude, *Lehrbuch der Optik* (S. Hirzel, Leipzig, 1906).
- [116] D. Macaluso e O.M. Corbino, *Comptes Rendus* **127**, 647 (1898).
- [117] W. Voigt, *Annalen der Physik* **303**, 345 (1899).
- [118] P. Drude, *The Theory of optics*, (Dover publ. inc., New York, 1959).
- [119] G.J. Stoney, *Transactions of the Royal Dublin Society* **4**, 563 (1891).
- [120] P. Zeeman, *Nature* **55**, 347 (1897).
- [121] P. Zeeman, *Philosophical Magazine* **44**, 55 (1897).
- [122] P. Zeeman, *Philosophical Magazine* **44**, 255 (1897).
- [123] J. Perrin, *Comptes Rendus* **121**, 1130 (1895).
- [124] E. Wiechert, *Schriften d. Physikalisch-Ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Preussen* **38**, 3 (1897).
- [125] W. Kaufmann, *Annalen der Physik* **297**, 544 (1897).
- [126] W. Kaufmann, *Annalen der Physik* **298**, 596 (1897).
- [127] J.J. Thomson, *Electrician* **39**, 104 (1897).
- [128] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine* **44**, 293 (1897).
- [129] H. Becquerel, *Comptes Rendus* **125**, 679 (1897).
- [130] J. Larmor, *Philosophical Magazine* **44**, 503 (1897).
- [131] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine* **48**, 547 (1899).
- [132] <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/thoms-on-lecture.pdf>
- [133] H.A. Lorentz, *The Theory of electrons* (MacMillan & CO., London, 1909).

- [127] A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics – Optics* (Academic Press Inc., New York, 1954).
- [128] M. Schwartz, *Principles of electrodynamics* (Dover, New York, 1987).
- [129] B. Rossi, *Optics* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1957).
- [130] F.A. Jenkins e H.E. White, *Fundamentals of Optics* (McGraw-Hill Co., New York, 2001).
- [131] E. Hecht, *Optics* (Pearson Educ. Limited, Harlow-England, 2017).
- [132] W. Voigt, *Magneto-und Elektro-Optik* (B.G. Teubner, Leipzig, 1908).
- [133] E. Whittaker, *A History of theories of aether and electricity* (Longmans, Green, and Co., London, 1910).
- [134] R. Wood, *Physical Optics* (MacMillan Co., New York, 1911).
- [135] E. Rutherford, *Philosophical Magazine* **21**, 669 (1911).
- [136] N. Bohr, *Philosophical Magazine* **26**, 1 (1913).
N. Bohr, *Philosophical Magazine*, **26**, 476, (1913).
N. Bohr, *Philosophical Magazine*, **26**, 857 (1913).