

Oscilador harmônico com massa variável e a segunda lei de Newton

(Variable mass harmonic oscillator and the Newton's second law)

Eberth Correa¹, J.S. Espinoza Ortiz, Mauro Valério e Jomhara Dutra

Instituto de Ciências Tecnológicas e Exatas, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, Brazil
Departamento de Física, Universidade Federal de Goiás, Catalão, GO, Brazil

Recebido em 24/1/2011; Aceito em 22/6/2011; Publicado em 29/11/2011

Empregamos a segunda lei de Newton para descrever o sistema de oscilador com massa variável. Um aparato experimental para medir as oscilações e outros parâmetros importantes é montado e aqui descrito com a ajuda de equipamentos disponíveis comercialmente. Usando um modelo pré-concebido para tal sistema somos capazes de ajustar os resultados experimentais com boa concordância. Para realizarmos essa tarefa desenvolvemos um programa na linguagem C++ ao qual pode extrair os valores experimentais da amplitude do movimento oscilatório bem como rotacionar o sistema de coordenadas para separar o movimento translacional do movimento oscilatório.

Palavras-chave: oscilador harmônico, massa variável, modos normais.

We employ the Newton's second law to describe the variable mass oscillator system. We describe and set up an experimental apparatus in order to measure the oscillations and other parameters with the help of equipments available commercially. By using a preconceived model for such a system we are able to fit the experimental results with a good agreement. To accomplish this task we developed a C++ program which can extract the experimental values of the amplitude of the oscillatory movement as well as to rotate the coordinates system in order to set apart the translational movement from the oscillatory one.

Keywords: harmonic oscillator, variable mass, normal modes.

1. Introdução

O oscilador harmônico simples (OHS) é um dos sistemas mais empregados para modelagem na física [1–3]. Devido a sua simplicidade e fácil descrição pelas equações de Newton na mecânica clássica, tal sistema descreve perfeitamente o balanço energético entre energia potencial elástica e energia cinética. Na Mecânica Quântica é o principal protagonista das hipóteses de quantização com resultados empíricos fantásticos. Como sistema mecânico é um excelente sistema para o estudo e a modelagem para movimentos periódicos.

Devido a sua simplicidade podemos ter como um bom ponto de partida para a análise do OHS a segunda lei de Newton. Dentre as diferentes formas de OHS estamos interessados no oscilador pendurado por uma mola no qual a força peso está diretamente associada com a posição de equilíbrio em repouso. Além disso, queremos fazer com que o sistema perca massa através do escoamento de um material granular (areia).

O estudo de tais sistemas com a variação de certos parâmetros constitui-se um bom aprofundamento no que tange as famosas leis que mudaram o mundo no

século XVII, as leis de Newton.

Partiremos de um modelo teórico pré-estabelecido no estudo desse sistema [4] para descrevermos meticulosamente os dados experimentais obtidos. Mostraremos que o movimento resultante será composto por dois modos normais: um de translação e outro de oscilação através da segunda lei de Newton.

2. Aparato experimental

Para a aquisição de medidas utilizamos os sensores disponíveis pela CIDEPE. Um sensor de força, um sensor de posição e a interface com o computador chamado Lab100. A primeira aquisição se refere ao escoamento de massa montado segundo a Fig. 1.

Nesse trabalho foram utilizadas duas tampas de uma garrafa plástica média com área de secção transversal regular. Em cada tampa foi feito um orifício circular de diâmetros 5.20 mm e 7.73 mm. Na garrafa, para efeitos de medidas de posição, foi transpassado perpendicularmente à linha de centro de massa um arame grosso para se pendurar dois suportes de pequenas massas de 10 g que, além de adicionar massa

¹E-mail: eberthcorrea@gmail.com.

própria, servem de superfície refletora para o sensor de posição.

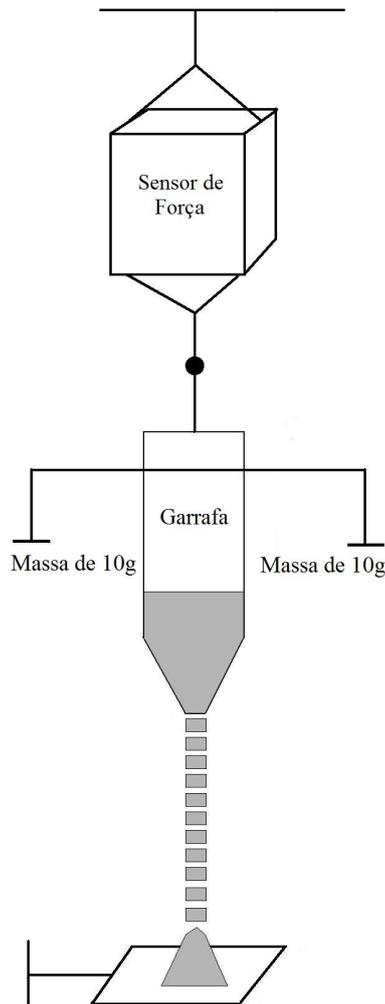


Figura 1 - Esquema de montagem do aparato experimental utilizado para medir o escoamento de massa.

Na Fig. 2 mostramos o resultado desse escoamento com a garrafa em repouso, onde dividimos a força medida pela aceleração da gravidade g . Fica evidente o comportamento linear do escoamento granular da areia contida na garrafa. É importante peneirar a areia a fim de se eliminar grãos de diâmetro médio maiores que 1,5 mm. Para tanto, utilizamos uma peneira de aço fina que permite a passagem de grãos com diâmetros um pouco maiores que um diâmetro médio de 1,0 mm. O ajuste das curvas que melhor representam esses dados são do tipo $m(t) = m_0 - ct$, cuja inclinação fornece $c_1 = 0,0020$, kg/s e $c_2 = 0,0064$ kg/s para os orifícios menor e maior respectivamente. Esses valores estão de acordo com a previsão teórica de que para um material granular de densidade ρ , fluindo por um orifício circular de diâmetro D sob a ação da aceleração da gravidade g , a taxa de escoamento será dada pela fórmula [5]

$$c = -\frac{dm}{dt} = \text{const} \times \rho g^{1/2} (D - d)^{5/2}, \quad (1)$$

onde d é o diâmetro médio do grão de areia que em nosso caso vale cerca de 1,0 mm e a constante pode ser determinada experimentalmente. Considerando que para um diâmetro D_1 temos um c_1 associado, e o mesmo para D_2 e c_2 , se por intermédio da Eq. (1) dividirmos os escoamentos c_2 por c_1 chegaremos a

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{D_2 - d}{D_1 - d} \right)^{5/2}. \quad (2)$$

Dessa forma, com os valores obtidos para c_1 , D_1 e D_2 obtemos $c_2 = 0,0062$ kg/s (cerca de 3% menor do que o obtido). Isso confirma a previsão teórica para o fluxo de areia de acordo com o diâmetro do orifício [5].

Devemos salientar que o fluxo de areia é afetado pelas oscilações e, portanto, devemos introduzir uma maneira de se medir esse fluxo dinâmico. Na verdade, veremos na próxima seção como prever o valor de c a partir das medidas de posição. O aparato experimental para as medidas de posição é mostrado na Fig. 3. Note que o sensor fica posicionado abaixo da garrafa e afastado do escoamento da areia. O sensor de posição funciona emitindo um pulso de ultrassom e detecta o sinal de retorno calculando a posição da garrafa. Por essa razão é importante que os pesos que servem de superfície refletora sejam de um metal que refletem bem esse tipo de sinal. Por outro lado, deformações na mola e outras perturbações iniciais podem causar pequenas oscilações no plano perpendicular à linha de oscilação vertical, desalinhando a superfície refletora. Isso poderia afetar as medidas diretamente, mas o sensor utilizado apresentou uma certa flexibilidade tal que essas perturbações não afetaram de forma significativa nossas medidas.

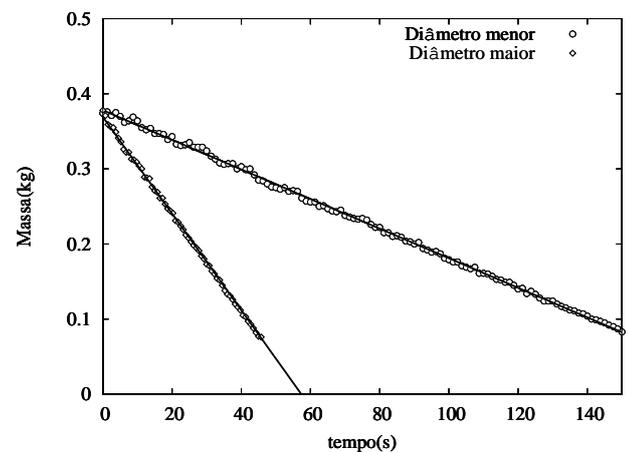


Figura 2 - Escoamento de massa em função do tempo para dois furos de diâmetro menor igual a 5,20 mm e diâmetro maior de 7,73 mm.

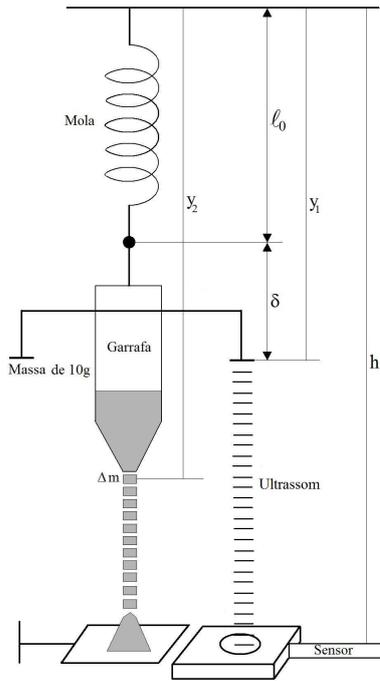


Figura 3 - Esquema de montagem do aparato experimental utilizado para as medidas de posição.

O aparato da Fig. 3 mostra várias quantidades que são importantes para a realização do experimento. $\ell_0 \approx 0,116$ m é o comprimento inicial da mola. $\delta \approx 0,183$ m é a distância entre o ponto de junção mola-garrafa e a extremidade de um dos pesos, como mostrado na figura. Uma outra quantidade que deve ser medida é a altura $h \approx 1,195$ m que é a distância do ponto de fixação superior da mola até o sensor. Esses são os valores aproximados utilizados na realização de nosso experimento. A constante da mola utilizada vale $k = 6,6$ N/m. Mais adiante, com a análise teórica, essas quantidades se mostrarão bastante úteis.

3. Análise teórica

Inicialmente, vamos considerar a origem do sistema como sendo o ponto de fixação do oscilador. Assim, definiremos y_1 e y_2 como a distância entre o ponto de fixação e a extremidade do suporte do peso e a distância entre o ponto de fixação e a pequena porção de massa Δm que sai da garrafa, respectivamente, como mostra a Fig. 3. A escolha desse referencial é bastante conveniente para se derivar a equação de movimento a partir da segunda lei de Newton. Além disso, uma vez obtida a equação de movimento, basta fazermos uma transformação de coordenadas para que a origem coincida com a posição do sensor, como veremos a seguir.

Como no problema de perda de massa em um foguete [6, 7], nosso ponto de partida será a variação de momento após a pequena porção de massa Δm deixar a garrafa. Portanto, se considerarmos um certo instante de tempo t e um pequeno intervalo de tempo Δt

imediatamente posterior, poderemos escrever

$$\begin{aligned} P(t) &= m(t)\dot{y}_1, \\ P(t + \Delta t) &= (m(t) - \Delta m)(\dot{y}_1 + \Delta\dot{y}_1) + \Delta m\dot{y}_2, \end{aligned} \quad (3)$$

onde $\Delta m = m(t) - m(t + \Delta t)$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(t + \Delta t) - P(t) = m(t)\Delta\dot{y}_1 + \\ & q\Delta m - \Delta m\dot{y}_1, \end{aligned} \quad (4)$$

onde $q = \dot{y}_2 - \dot{y}_1$ é a velocidade relativa da porção de massa Δm com relação à garrafa. Dividindo-se esta última equação por Δt e tomando-se o limite $\Delta t \rightarrow 0$ chegamos à tão conhecida equação

$$\frac{dP}{dt} = m(t)\ddot{y}_1 - q\frac{dm(t)}{dt}. \quad (5)$$

O segundo termo dessa equação é o responsável pelo impulso devido à ejeção de massa, como o recuo de uma arma ao ser disparada. Contudo, podemos ser levados a pensar que a velocidade relativa q é inicialmente zero. Apesar de considerarmos Δt pequeno para essa análise, em termos práticos, não podemos tomar Δt tão pequeno a ponto de afirmarmos que $q = 0$ em $t = 0$. Isso se deve ao fato de não podermos estender qualquer análise física ao nível do escoamento granular, pois este possui uma natureza complexa, os grãos de areia interagem entre si, introduzindo vínculos internos. Para evitarmos essas dificuldades, assim como na análise mecânica de impulso e quantidade de movimento, basta pensarmos que Δt é pequeno o suficiente para que uma pequena porção de massa de areia Δm , após diversos tipos de interações internas, seja ejetado com uma velocidade relativa q bem pequena. Isso se justifica pelo fato da ejeção se dar apenas pela força da gravidade, mas nossa análise começa apenas após essa pequena porção de massa deixar de ter qualquer vínculo com o sistema garrafa-areia. Portanto, podemos afirmar que a pequena quantidade de impulso assim que Δm deixa a garrafa é desprezível em relação à grande quantidade de momento da garrafa, ou seja, podemos fazer $q\Delta m \approx 0$ na Eq. (4) que implica desprezarmos o segundo termo da Eq. (5). Consequentemente, a segunda lei de Newton para a garrafa poderá ser escrita como

$$m(t)\ddot{y}_1 \approx \frac{dP}{dt} = -k(y_1 - \Delta) - b\dot{y}_1 + m(t)g, \quad (6)$$

onde $\Delta = \ell_0 + \delta$ e b é a constante de resistência do ar. Entretanto, queremos que a origem do sistema de coordenadas coincida com a posição do sensor de posição e, para tanto, devemos fazer $y_1 \rightarrow h - y_1 \Rightarrow \dot{y}_1 \rightarrow -\dot{y}_1$ na Eq. (6), resultando

$$m(t)\ddot{y} = -ky + k(h - \Delta) - b\dot{y} - m(t)g, \quad (7)$$

onde retiramos o rótulo 1, pois de agora em diante estaremos nos referindo apenas a posição da garrafa em relação ao sensor. Essa equação ainda não está escrita de modo a que apenas o movimento oscilatório possa ser descrito. Para atingirmos esse objetivo vamos tentar fazer o mesmo que se faz com o oscilador sem perda de massa, reescrevendo a equação em função do ponto de equilíbrio. Todavia, a função $m(t)$ do lado direito desta equação torna essa tarefa um pouco mais laboriosa. Substituindo a expressão para $m(t)$ do lado direito, poderemos reescrever a Eq. (7) como

$$m(t)\ddot{y} = -k \left[y - \left((h - \Delta) - \frac{m_0 g}{k} + \frac{cg}{k} t \right) \right] - b\dot{y}. \quad (8)$$

Somos fortemente tentados a escrever $y_{osc} = y - ((h - \Delta) - m_0 g/k + cgt/k)$, mas por causa do fator de resistência do ar essa não seria a melhor saída. Se escrevermos $y_p(t) = A + Bt$ como uma solução particular da Eq. (8) e, em seguida, fizermos $y(t) = y_{osc}(t) + y_p(t)$, é fácil verificar que

$$y_p(t) = (h - \Delta) - \frac{m_0 g}{k} - \frac{cbg}{k^2} + \frac{cg}{k} t, \quad (9)$$

$$m(t)\ddot{y}_{osc} + b\dot{y}_{osc} + ky_{osc} = 0. \quad (10)$$

Com isso, conseguimos separar o movimento da garrafa como a combinação de dois tipos de movimento: um com relação ao deslocamento do ponto de equilíbrio como uma função linear de t expresso por $y_p(t)$ na forma da Eq. (9) e o outro com relação ao movimento puramente oscilatório descrito pela função $y_{osc}(t)$ na forma da Eq. (10). A independência desses dois movimentos nos revela que são modos normais.

Devemos salientar a importância da Eq. (9) para a realização do experimento. $y_p(t)$ descreve exatamente a equação da reta que passa pelo ponto médio das oscilações. Portanto, sua determinação a partir dos dados experimentais fornece informações sobre alguns valores importantes, como a taxa de escoamento c dinâmica e a massa inicial m_0 que nada mais é do que a massa do objeto a partir do início da observação em $t = 0$. É importante destacar o fato de que há uma imprecisão antes do acionamento do sensor e isso implica perda de massa. Portanto, a partir de dados previamente fornecidos como Δ , h , g e k , é possível determinar com boa precisão a massa em $t = 0$.

Como exemplo, na Fig. 4 mostramos o ajuste de curvas para os dados experimentais do deslocamento em função do tempo, tendo como posição inicial a posição de equilíbrio sem escoamento. Ao observar o movimento do oscilador, notamos que este se dá por meio de um “stick-slip”, ou seja, prende e desliza. Na verdade, à medida que a taxa de escoamento c aumenta, esse efeito se torna cada vez mais evidente. Isso ocorre porque há um tempo de relaxação para acomodação do sistema em torno do ponto de equilíbrio. O aumento

de c , que entra como uma perturbação no sistema, aumenta esse tempo de relaxação. Felizmente, esse efeito pode ser minimizado utilizando-se uma mola com constante k bem maior. Além disso, realizamos a transformada rápida de Fourier em busca de uma frequência de fundo devido ao escoamento e não encontramos nenhuma frequência relevante. Isso implica que podemos aproximar $y_{osc}(t) \approx 0$ e $y(t) \approx y_p(t)$.

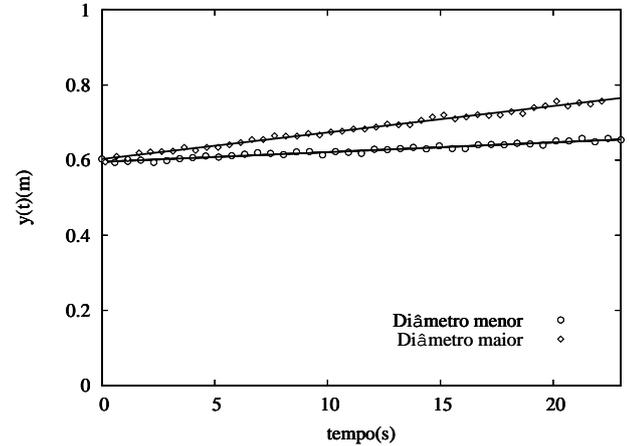


Figura 4 - Variação da posição em função do tempo para o escoamento partindo-se do repouso na posição de equilíbrio, tanto para a tampa com o furo de 5.20 mm quanto para a tampa com furo de 7.73 mm.

As retas ajustadas na Fig. 4 tanto para o escoamento com orifício menor quanto para o escoamento com orifício maior são respectivamente $y_1(t) = 0.0026t + 0.595$ (m) e $y_2(t) = 0.0071t + 0.603$ (m), cujas inclinações fornecem cg/k de onde podemos ver claramente que $c_1 = 0.0018$ kg/s e $c_2 = 0.0048$ kg/s. Esses valores são menores do que os obtidos na seção anterior. Por esse motivo, dizemos que temos uma taxa dinâmica de escoamento, o que é bem razoável do ponto de vista físico, pois o fato da garrafa entrar em movimento ascendente compacta mais a areia no fundo da garrafa, resultando nesse efeito.

Falta-nos apenas dar uma solução para a Eq. (10). No artigo de Flores e cols. [4] há uma demonstração de uma solução aproximada para uma equação idêntica à Eq. (10). Embora os autores abordem um sistema semelhante, há questões referentes a esse sistema que não são aprofundadas ou, até mesmo, abordadas como estamos expondo aqui. Primeiramente, as medidas experimentais da posição são uma aproximação das medidas obtidas por um sensor de força, colocado num recipiente em repouso logo abaixo da garrafa posta a oscilar. Por esse motivo, questões como o escoamento dinâmico e o deslocamento do ponto de equilíbrio não são abordadas com a devida atenção no artigo. As quantidades dinâmicas são tratadas através da análise da energia do sistema, cujas aproximações, acabam deixando de lado tais efeitos. Apesar disso, a análise teórica desse sis-

tema, com suas aproximações, leva a uma descrição correta do que ocorre com o movimento oscilatório, como veremos a seguir. Por esse motivo não faremos toda a demonstração da solução da Eq. (10). Enunciaremos apenas o resultado principal e sugerimos a leitura desse artigo caso o leitor queira maiores detalhes.

Partindo-se de uma análise da energia mecânica e do fato de que $b/2m_0$ é muito pequeno se comparado com a frequência angular natural do sistema, os autores chegaram a uma expressão aproximada para y_{osc} igual a

$$y_{osc}(t) = A(t)\text{sen}(h_0(t) + \phi), \quad (11)$$

com

$$A(t) = A_0 \left(1 - \frac{ct}{m_0}\right)^\varepsilon = A_0 f(t), \quad (12)$$

onde $\varepsilon = b/2c + 1/4$ e $b/2c$ representa a taxa de perda de energia pelo arraste e a energia deixando o sistema devido à perda de massa. A_0 e ϕ são a amplitude e a fase determinadas pelas condições iniciais. Substituindo-se as Eqs. (11) e (12) na Eq. (10) obteremos uma equação em função de senos e cossenos igual a zero. Portanto, se quisermos que a equação seja satisfeita levando-se em conta a independência dessas funções devemos igualar seus coeficientes a zero, o que implica diretamente que

$$m(t) \left[\ddot{f} - f \dot{h}_0^2 \right] + b \dot{f} + k f = 0, \quad (13)$$

$$m(t) \left[2 \dot{f} \dot{h}_0 + f \ddot{h}_0 \right] + b f \dot{h}_0 = 0. \quad (14)$$

Dessa forma, a função $h_0(t)$ deve ser tal que satisfaça essas duas equações. Primeiramente, com o auxílio da Eq. (12), a Eq. (13) fornece

$$\dot{h}_0(t) = \left(\frac{k}{m(t)} - \frac{(b+c/2)(b+3c/2)}{4(m(t))^2} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

A função $h_0(t)$ será então a integral no intervalo $[0, t]$ desta última equação, resultando em

$$h_0(t) = \frac{2\sqrt{m_0 k \alpha}}{c} \left\{ \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \alpha - ct/m_0}{\alpha}} \right) - \sqrt{\frac{1 - \alpha - ct/m_0}{\alpha}} \right\}, \quad (16)$$

onde $\alpha = (b+c/2)(b+3c/2)/4m_0k$. Essa será a solução geral que empregaremos na análise dos resultados. Entretanto, para que $h_0(t)$ satisfaça simultaneamente ambas Eqs. (13) e (14) é necessário que

$$\frac{(b+c/2)(b+3c/2)}{4(m(t))^2} \ll \frac{k}{m(t)}, \quad (17)$$

ou ainda

$$\frac{(b+c/2)(b+3c/2)}{4k} \ll m(t), \quad (18)$$

isto é, a aproximação só vale para medidas realizadas num intervalo de tempo longe do tempo necessário para acabar a areia na garrafa. Portanto, na análise de dados experimentais devemos levar isso em conta.

4. Como funciona o programa

No Apêndice A colocamos a disposição do leitor o programa desenvolvido para fazer a análise dos pontos de máximos e de mínimos do movimento oscilatório na linguagem C++. Além de extrair os pontos dos extremos da aquisição de dados, o programa também utiliza a regressão linear para determinar a reta que passa pelo ponto médio de oscilação. Em caso de escoamento de areia, os dados provenientes de tal regressão serão utilizados para se fazer uma rotação de eixos fazendo-se sobressair somente o movimento oscilatório.

Ao compilar e executar o programa, o leitor será perguntado sobre o nome do arquivo de dados para análise. O passo seguinte será fornecer a informação da qual os dados se referem a escoamento ou não. Caso a resposta seja sim, o programa calculará a regressão linear para determinar o eixo que passa pelo ponto médio e automaticamente fará uma rotação de eixos para que apenas o movimento oscilatório prevaleça. A confirmação disso será um novo cálculo da regressão linear em que a inclinação da reta que passa pelo ponto médio será aproximadamente zero. É importante anotar o valor de y_0 , pois ele determinará a quantidade de massa inicial a partir do início da observação. Finalmente, o programa perguntará se deve imprimir os pontos de máximo ou de mínimo. A separação facilita a análise e a confecção de gráficos.

Ao término de sua execução o programa gerará automaticamente os arquivos de saída "Amplitude.out", "dadosrot.out", "dados.out" e "perquad.out". No arquivo "Amplitude.out" serão listados os pontos de máximo ou de mínimo rotacionados. Em "dadosrot.out" serão fornecidos os dados após a rotação de eixos, mostrando apenas o movimento oscilatório. Em "dados.out" temos os pontos de máximo ou de mínimo rotacionados. Esses dados são úteis para se conferir se o programa está fazendo a análise correta plotando-se ambos "dados.out" e "dadosrot.out". O resultado será a visualização dos pontos de máximo ou de mínimo em cima dos dados adquiridos rotacionados. Finalmente, o programa imprime o arquivo do quadrado do período

em função do tempo de medida em “perquad.out” para simples conferência com a previsão teórica.

O programa também pode ser usado para calcular máximos e mínimos em caso de não haver escoamento. Para tanto, basta responder não ao ser questionado sobre movimento com ou sem escoamento. Automaticamente o programa fará a regressão linear dos dados para a determinação do ponto médio de oscilação e perguntará se deve imprimir os pontos de máximo ou de mínimo. Neste caso, os arquivos de saída serão apenas “Amplitude.out”, “dados.out” e “perquad.out” já descritos anteriormente, mas sem nenhuma rotação de eixos.

O algoritmo utilizado envolve o cálculo de derivadas para “frente”. Isso significa que é necessário um certo número de pontos a frente do ponto em que se calcula a derivada. A função *devfw*, chamada no corpo principal do programa, é responsável por esse cálculo e leva em conta dois pontos a frente, ou seja, é uma derivada de três pontos. Contudo, devido a ruídos durante a aquisição de dados, o critério de derivação fará com que vários máximos ou mínimos locais sejam candidatos. Mesmo utilizado-se derivadas com mais pontos o problema ainda persistirá. Por essa razão decidimos pela derivada de três pontos que apresenta uma precisão razoável para esse tipo de aplicação.

O resultado dessa primeira etapa é impresso no arquivo “auxiliar.dat” onde alguns pontos próximos dos prováveis máximos ou mínimos também são impressos. Isso faz com que tenhamos certeza de que o provável máximo ou mínimo estará no meio deles. Nesse ponto, utilizamos a subrotina *filtro* que filtra os candidatos a máximo ou mínimo em relação ao ponto médio de oscilação produzindo os arquivos “Amplitude.out”, “dados.out” e “perquad.out” já mencionados.

As outras subrotinas que aparecem no programa são *troca*, *reglinear* e *roteixos*. A subrotina *troca* é chamada no corpo principal para trocar os três pontos necessários para derivação. Cada vez que um ponto novo é lido, é necessário trocar os pontos considerados na derivação. As subrotinas *reglinear* e *roteixos* são responsáveis pelos cálculos da regressão linear e rotação de eixos respectivamente. Na verdade, a subrotina *reglinear* deve sempre ser chamada antes da subrotina *roteixos*, pois uma depende dos dados da outra.

5. Principais resultados

Analisaremos a seguir os principais resultados considerando-se o exposto nas duas últimas seções. Primeiramente, precisamos determinar o valor da constante de resistência do ar b que desempenhará um papel fundamental em nossos cálculos. Para tanto, confeccionamos um gráfico mono-log com as medidas da amplitude em função do tempo, sem haver escoamento, como mostra a Fig. 5. Para todas as medidas realizadas, a massa inicial sem escoamento foi de $m_0 = 0.264$ kg. Isso não sig-

nifica que essa será a massa em $t = 0$, pois como foi dito anteriormente, há uma imprecisão no início da medida que leva a uma pequena perda de massa. Mas, nesse caso, como não há escoamento, a massa se mantém fixa desde o início.

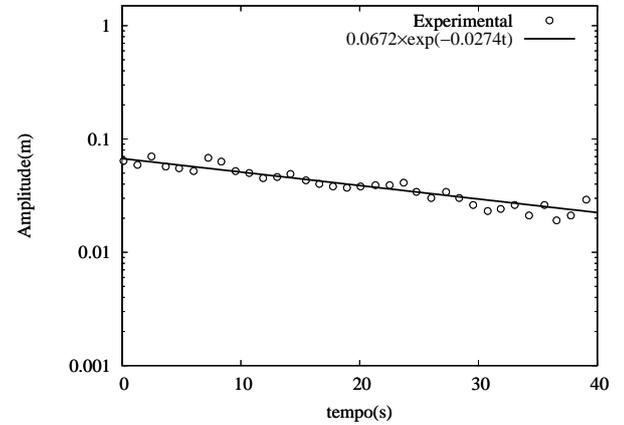


Figura 5 - Amplitude em função do tempo para o movimento oscilatório amortecido sem escoamento. O ajuste na escala logarítmica no eixo y permite a determinação do coeficiente de amortecimento $\gamma = b/2m_0 = 0.0274\text{s}^{-1}$.

Essa situação é prevista na análise teórica, pois basta tomarmos o limite $c \rightarrow 0$ na Eq. (12). Com a ajuda da relação de Euler, é fácil ver que

$$\lim_{c \rightarrow 0} A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{b}{2m_0}t\right), \quad (19)$$

que é a função ajustada na figura. Dessa forma, $b/2m_0$ vale 0.0274 s^{-1} o que implica um valor de $b = 0.0145\text{ kg/s}$. Podemos então passar para as medidas com escoamento. A Fig. 6 mostra as medidas da posição em função do tempo para os dois tipos de orifício com oscilação. Note os valores diferentes para $y_p(0)$. Esses valores são importantes, pois uma vez que se tenham os valores de h , Δ , c , g , k e b pode-se calcular m_0 através da Eq. (9). A relação para $y_p(t)$ é determinada através da regressão linear dos dados obtidos.

Uma vez que tenhamos obtido os dados, devemos utilizar o programa disponível no Apêndice para sua análise. Após uma rotação de eixos com base na expressão para $y_p(t)$, o programa gera como uma primeira saída a variação da amplitude em função do tempo. Esses dados são plotados na Fig. 7. Com o auxílio da forma funcional prevista na análise teórica através da Eq. (12), podemos ver a curva que melhor se ajusta aos dados experimentais. Consequentemente, utilizando-se os valores já determinados anteriormente de c , b e m_0 , a amplitude inicial para cada tamanho de orifício é determinada pelo ajuste.

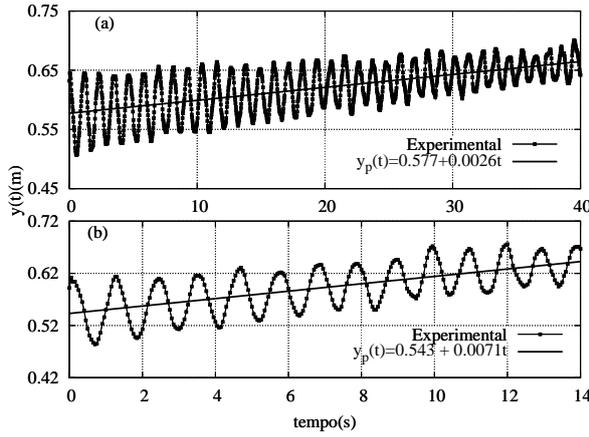


Figura 6 - Posição em função do tempo para o movimento com escoamento partindo-se do repouso numa posição fora da posição de equilíbrio. O gráfico (a) refere-se à tampa com furo menor e o gráfico (b) ao furo maior.

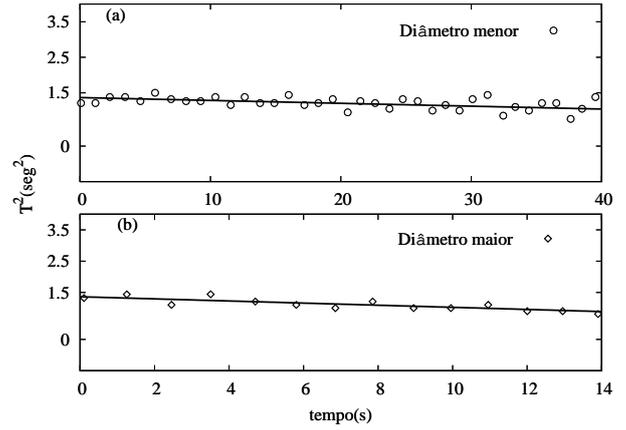


Figura 8 - Variação do quadrado do período das oscilações em função do tempo. Em (a) dados referentes à tampa com furo menor. Em (b) dados referentes à tampa com furo maior.

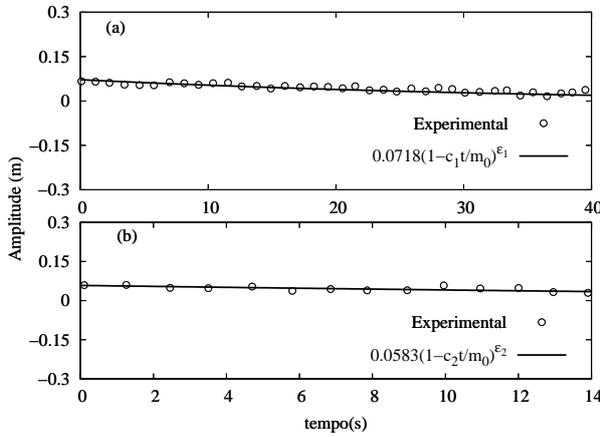


Figura 7 - Ajuste da amplitude pela função descrita em nosso procedimento teórico. O gráfico (a) refere-se à tampa com furo menor e $\epsilon_1 \approx 5,083$ e $c_1/m_0 \approx 0,008 \text{ s}^{-1}$. O gráfico (b) refere-se ao furo maior e $\epsilon_2 \approx 1,726$ e $c_2/m_0 \approx 0,020 \text{ s}^{-1}$.

Na Fig. 8 plotamos o período ao quadrado das oscilações em função do tempo para testarmos as aproximações do modelo teórico. Se considerarmos como período a quantidade de tempo necessária para que $h_0(t) = 2\pi$ então poderemos escrever

$$h_0(t) = \int_0^T \dot{h}_0(t) dt \approx \dot{h}_0(t)T(t) = 2\pi, \quad (20)$$

que elevando-se ao quadrado e com o auxílio da Eq. (19) e da desigualdade (17) é fácil verificar que

$$T^2(t) \approx 4\pi^2 \frac{m(t)}{k}. \quad (21)$$

As retas ajustadas na Fig. 8 são tais que $T_1^2(t) = 1,37 - 0,01t \text{ (s}^2\text{)}$ e $T_2^2(t) = 1,37 - 0,03t \text{ (s}^2\text{)}$. Ao passo que se calcularmos as inclinações das retas pela equação acima chegaremos aos mesmos valores de forma aproximada, demonstrando uma boa concordância entre o modelo teórico e as medidas experimentais.

Finalmente, plotamos os dados experimentais rotacionados pelo programa e o ajuste do modelo teórico na Fig. 9 tanto para o escoamento com o furo menor quanto para o escoamento com furo maior. Para o ajuste dessas curvas é essencial que se determine a massa m_0 no instante do início da observação, pois, do contrário, a curva de ajuste irá se atrasar ou adiantar-se em relação aos dados experimentais. Plotamos também a amplitude em função do tempo dada pela Eq. (12). Podemos ver claramente que a previsão teórica se ajusta bem aos dados experimentais, tornando o modelo que leva em conta os efeitos da perda de massa e da perda de energia pela resistência do ar um bom ponto de partida para o estudo de tais sistemas.

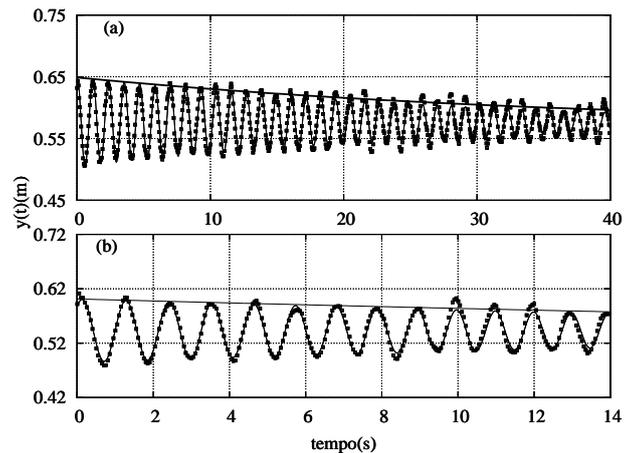


Figura 9 - Ajuste da curva teórica prevista na Eq. (11). Em (a) dados referentes à tampa com furo menor rotacionados com o programa, os quadrados se referem aos dados experimentais. A amplitude em relação ao ponto médio de oscilação dada pela Eq. (12) também é plotada. Em (b) o mesmo referente à tampa com furo maior.

6. Conclusão

Nesse trabalho realizamos várias medidas experimentais a fim de se confirmar várias previsões teóricas e experimentais disponíveis na literatura [4, 5]. Para tanto, utilizamos sensores de força e de posição fornecidos pela CIDEPE.

Para o escoamento granular utilizamos a fórmula empírica de Yersel [5] para orifícios circulares. Medindo-se a taxa de escoamento para dois orifícios com diâmetros diferentes com o sensor de força, fomos capazes de confirmar a previsão de Yersel. Embora correta, esta não se aplica ao caso de um escoamento dinâmico que, como vimos, deve ser determinada levando-se em conta outras constantes físicas como a constante da gravidade g e a constante da mola k .

Passamos então às medidas de posição para o oscilador com massa variável. Primeiramente, medimos a posição em função do tempo para a garrafa partindo do repouso no ponto de equilíbrio inicial a fim de se determinar as taxas de escoamento dinâmicas. Vimos que estas são necessariamente menores do que as medidas pelo sensor de força devido ao fato de haver uma certa acomodação da areia na garrafa.

Finalmente, partindo-se do repouso e de uma posição inicial fora do equilíbrio inicial, medimos as oscilações do oscilador com a massa variável. A análise desses dados se deu por conta do programa disponível no Apêndice que permitiu fazermos uma regressão linear e rotacionarmos os dados obtidos para que se sobressaíssem apenas as oscilações. Seguimos, então, a descrição teórica exposta na Análise Teórica, na qual tem como ponto de partida a segunda lei de Newton para descrever o movimento da garrafa. Vimos que dois tipos de movimento estão presentes: o movimento de translação do ponto de equilíbrio e o movimento puramente oscilatório, constituindo um movimento composto por dois modos normais. Nesse ponto, utilizamos a descrição analítica de Flores e cols. [4] para as oscilações em um sistema com massa variável. Encontramos uma boa concordância entre o modelo proposto pelos autores e nossos dados experimentais analisados pelo programa, para ambos escoamentos com furo menor e com furo maior.

Podemos então concluir que o oscilador com massa variável é um bom sistema para se trabalhar as equações de Newton em sua plenitude. Variando-se o parâmetro que confere inércia ao sistema, conseguimos explicar os dados experimentais a partir de um modelo teórico que leva em conta tanto a variação de energia devido ao arraste quanto devido à perda de massa.

Apêndice

6.1. O programa

```
#include <fstream>
#include <cstring>
```

```
#include <string>
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

double devfw(double t[], double y[])
{
    double valdev,h;
    h = t[1]-t[0];
    valdev = (-y[2]+4.0f*y[1]-3.0f*y[0])/(2.0f*h);
    return valdev;
}

void troca(double t[], double y[], double tnew, double ynew)
{
    for(int i=0; i<2;i++)
    {
        t[i]=t[i+1];
        y[i]=y[i+1];
    }
    y[2] = ynew;
    t[2] = tnew;
}

void filtro(double ymed)
{
    ifstream fin("auxiliar.dat");
    ofstream fout("dados.out");
    ofstream fout1("Amplitude.out");
    ofstream fout2("perquad.out");
    double difnew,dif,difmax,difmin,t,y,tmax,ymax,tmin,ymin,
           diftmin,diftmax,tminold[2],tmaxold[2];
    int var,n=0,caux=-1;
    cout << "Entre com 0 para minimos ou 1 para maximos: ";
    cin >> var;
    fin >> t >> y;
    dif = y-ymed;
    while (!fin.eof())
    {
        if (dif > 0)
        {
            if (n == 0)
            {
                difmax = dif;
                ymax = y;
                tmax = t;
                n +=1;
            }
            else
            {
                if (dif > difmax)
                {
                    difmax = dif;
                    ymax = y;
                    tmax = t;
                }
            }
        }
        else
        {
            if (n == 0)
            {
                difmin = dif;
                ymin = y;
                tmin = t;
                n +=1;
            }
            else
            {
                if (fabs(dif) > fabs(difmin))
                {
                    difmin = dif;
                    ymin = y;
                    tmin = t;
                }
            }
        }
    }
    fin >> t >> y;
    difnew=y-ymed;
    if(difnew*dif < 0 || fin.eof() )
    {
        if (dif < 0 && var == 0)
        {
            fout << tmin << " " << ymin << endl;
            fout1 << tmin << " " << difmin << endl;
            caux +=1;
            tminold[caux] = tmin;
            if(caux == 1)
            {
                diftmin = tminold[1] - tminold[0];
                fout2 << tminold[0] << " " << diftmin*diftmin << endl;
                tminold[0] = tminold[1];
                caux = 0;
            }
        }
        if (dif > 0 && var == 1)
        {
            fout << tmax << " " << ymax << endl;
            fout1 << tmax << " " << difmax << endl;
            caux +=1;
            tmaxold[caux] = tmax;
            if(caux == 1)
            {
                diftmax = tmaxold[1] - tmaxold[0];
                fout2 << tmaxold[0] << " " << diftmax*diftmax << endl;
                tmaxold[0] = tmaxold[1];
                caux = 0;
            }
        }
    }
    n = 0;
}
```

```

    dif = difnew;
}
fin.close();
fout.close();
fout1.close();
fout2.close();
}

void reglinear(char nfile[],double &y0, double &coefang)
{
    ifstream fin(nfile);
    double somax=0.0f,somat=0.0f,somaxt=0.0f,somatq=0.0f,
        fatordiv,ynew,tnew;
    int nmed=0;
    fin >> tnew >> ynew;
    while (!fin.eof())
    {
        somax += ynew;
        somat += tnew;
        somaxt += ynew*tnew;
        somatq += tnew*tnew;
        nmed ++;
        fin >> tnew >> ynew;
    }
    fin.close();
    fatordiv = nmed*somatq-somat*somat;
    coefang = (nmed*somaxt-somax*somat)/fatordiv;
    y0 = (somax*somatq-somat*somaxt)/fatordiv;
    if(coefang > 0)
        cout << "Regressao linear: y(t)= " << y0 << " + "<<
            coefang << "t " << endl;
    else
        cout << "Regressao linear: y(t)= " << y0 <<
            coefang << "t " << endl; }

void roteixos(char infile[], char outfile [], double a) {
    ifstream fin(infile);
    ofstream fout(outfile);
    double y,t,tp,yp,theta;
    theta = atan(a);
    fin >> t >> y;
    while (!fin.eof())
    {
        tp = t*cos(theta)+y*sin(theta);
        yp = -t*sin(theta)+y*cos(theta);
        fout << tp << " " << yp << endl;
        fin >> t >> y;
    }
    fin.close();
    fout.close();
}

int main()
{
    double y[3],t[3],yold,told,tnew,ynew,derivnew,
        derivold,y0,coefang;
    int m=0,n=0,nmed=0;
    char file[25], swap[25],s1[]="auxiliar.dat",
        s2[]="arqtroca.dat",s3[]="dadosrot.out",resp;
    cout << "Digite o nome do arquivo de dados: ";
    cin.getline(file,25);
    cout << file << "\n";
    ifstream fin(file);
    cout << "Os dados sao para escoamento ? [s] ou [n] : ";
    cin >> resp;
    if (resp == 's') strcpy(swap,s2);
    else strcpy(swap,s1);
    ofstream fout(swap);
    for(int i=0; i<3;i++) fin >> t[i] >> y[i];
    derivold = devfw(t,y);
    fin >> tnew >> ynew;
    while (!fin.eof())
    {
        if (!fin.eof())
        {
            told = t[0];
            yold = y[0];
            troca(t,y,tnew,ynew);
            derivnew = devfw(t,y);
            if (derivnew*derivold <= 0)

```

```

        {
            if (n > 1)
            {
                fout << told << " " << yold << endl;
                for(int m=0;m<2;m++)
                    fout << t[m] << " " << y[m] << endl;
                n=0;
            }
            derivold = derivnew;
            n+=1;
        }
        fin >> tnew >> ynew;
    }
    fin.close();
    fout.close();
    reglinear(file,y0,coefang);
    if (resp == 's')
    {
        roteixos(file,s3,coefang);
        roteixos(s2,s1,coefang);
        reglinear(s3,y0,coefang);
    }
    filtro(y0);
    return 0;
}

```

Agradecimentos

Gostariamos de agradecer o empenho e a presteza dos técnicos de laboratório Gilmar da Silva Neto e Anivaldo Ferreira de Rezende do curso de Física do campus Catalão da Universidade Federal de Goiás.

Referências

- [1] B.E. Palladino e P. Leal Ferreira, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 490 (1999).
- [2] Claudio Ichiba, Rogerio Ichiba e José Noboru Maki, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 512 (1999).
- [3] A.C. Bertuola, M.S. Hussein e M.P. Pato, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 327 (2005).
- [4] J. Flores, G. Solovey e S. Gil, Am. J. Phys. **71**, 721 (2003).
- [5] Metin Yersel, Phys. Teach. **38**, 290 (2000).
- [6] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentals of Physics* (John Wiley and Sons, Nova York, 2010), 8ª ed.
- [7] Para uma melhor discussão sobre esse problema veja A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics* (Academic, Nova York, 1964), 2ª ed., v. I, cap. I.