

# Caracterización de motores DC de imán permanente mediante un sistema motor-generator

Characterization of DC permanent magnet motors using a motor-generator system

Dany Yadir Jaimes<sup>\*1</sup>, Fabio Fajardo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Física, Bogota, Colombia.

Recibida en 18 de Julio, 2022. Aceptado en 09 de Agosto, 2022.

En este trabajo se realiza la caracterización de un motor DC mediante el análisis de la corriente de entrada, el voltaje de entrada y la velocidad angular. Para lo cual se utilizaron dos motores de características similares acoplados mediante un sistema motor-generator, donde el generador actúa como un freno electromecánico que se le pone al motor. Se calcularon características como el torque, la potencia de entrada, la potencia de salida y la eficiencia. También se logró estimar los valores de la fuerza contra-electromotriz (FEM) y la potencia mecánica. Se determinaron las constantes características  $k_e = 1.62 \frac{mV}{rpm}$  y  $k_\tau = 1.69 \frac{mV}{rpm}$  y se calculó la potencia mecánica de dos formas, con una discrepancia máxima del 10%. Lo anterior muestra que el sistema motor-generator es un método viable para estudiar las principales características de un motor, sin necesidad de utilizar elementos de alto valor como los torquímetros. Este experimento puede ser implementado en los laboratorios de enseñanza del electromagnetismo, tanto para los estudiantes de ciencias como de ingeniería a un costo muy bajo.

**Palabras clave:** Motor DC, FEM, Torque, Potencia, Eficiencia.

In this work the characterization of a DC motor is performed by analyzing the input current, the input voltage and the angular velocity. For this purpose, two motors of similar characteristics coupled by means of a motor-generator system were used, where the generator acts as an electromechanical brake applied to the motor. Characteristics such as torque, input power, output power and efficiency were calculated. It was also possible to estimate the values of the counter-electromotive force (back EMF) and the mechanical power. The characteristic constants  $k_e = 1.62 \frac{mV}{rpm}$  and  $k_\tau = 1.69 \frac{mV}{rpm}$  were determined and the mechanical power was calculated in two ways, with a maximum discrepancy of 10%. This shows that the motor-generator system is a viable method to study the main characteristics of a DC Motor, without the need to use expensive elements such as torque meters. This experiment can be implemented in electromagnetics teaching laboratories for both science and engineering students at a very low cost.

**Keywords:** DC Motor, EMF, Torque, Power, Efficiency.

## 1. Introducción

Los motores eléctricos son dispositivos que surgieron a partir de la necesidad de convertir energía eléctrica a energía mecánica ó energía mecánica a energía eléctrica [1]. Actualmente son muy utilizados en prácticamente todas las actividades humanas en el día a día, como en el hogar, la industria y el transporte, a tal punto que no es posible concebir la vida de hoy sin estos dispositivos [2, 3].

Cualquier sistema físico para ser estudiado necesita un modelo que describa sus características y comportamientos. Un motor eléctrico se puede modelar como un sistema eléctrico y un sistema mecánico que se encuentran unidos entre sí, para lo cual se relacionan la fuerza electromotriz y la velocidad angular del eje del motor. La caracterización de un motor permite encontrar sus propiedades intrínsecas, así como determinar su comportamiento ante diferentes señales de entrada [4].

En la literatura se encuentra una gran variedad de estudios sobre los motores acerca de su funcionamiento, características, para dimensionar sus capacidades de trabajo y potenciales aplicaciones. Algunos trabajos presentan modelos teóricos acerca de las generalidades y comportamientos de los motores [1–3, 5, 6]. También hay estudios de modelos estáticos y dinámicos simplificados, con el fin de analizar la transferencia de potencia eléctrica a potencia mecánica [7]. Los cuales permiten realizar sistemas de control a partir de características intrínsecas como el coeficiente de fricción, la constante contraelectromotriz y la constante de par de los motores [4, 8]. Para encontrar experimentalmente los valores característicos de los motores se les suele trabajar con diferentes rangos de voltaje de alimentación y se mide la respuesta en velocidad angular y el torque que generan [9, 10]. La medición del torque producido por un motor se hace generalmente usando torquímetros dinámicos u otros equipos especializados para dicha labor. En [11] se presenta un opción alternativa para medir el torque de manera indirecta utilizando un

\* Correo electrónico: [dyajaimesc@unal.edu.co](mailto:dyajaimesc@unal.edu.co)

sistema motor-generador, lo que posibilita el cálculo de eficiencias y características propias de los motores de una forma más sencilla. Con esto, se facilita el entendimiento del funcionamiento de los motores a los estudiantes con conocimientos no especializados, mediante el empleo de un modelo sencillo y de fácil análisis.

El objetivo principal de este trabajo es realizar la caracterización de un motor para encontrar las constantes contra-electromotriz y de par, las relaciones de potencia de salida y eficiencia, empleando un modelo simplificado del motor DC con el cual se contrastan los resultados experimentales. Lo anterior se hace utilizando montajes y materiales de fácil acceso, como un sistema motor-generador, el arduino-UNO, fuentes DC y multímetros, que están disponibles usualmente en los laboratorios de enseñanza del electromagnetismo. En la siguiente sección se presentan algunos aspectos teóricos sobre los motores relevantes para el trabajo, luego se describe el montaje experimental haciendo énfasis en el sistema motor-generador, posteriormente se discuten los resultados de las diferentes caracterizaciones. Finalmente se presentan las principales conclusiones del trabajo.

## 2. Marco Teórico

La teoría electromagnética es el pilar fundamental para el desarrollo de motores eléctricos. Los estudios realizados por Ampere permiten analizar y describir los efectos del campo magnético formado en el espacio que rodea a un conductor por el que circula una corriente eléctrica. Las teorías expuestas por Faraday explican la relación entre la tensión inducida en un circuito cerrado y el cambio del flujo magnético que pasa a través de dicho circuito o espira [1, 5, 6]. En el siglo XIX diversos ingenieros y científicos aportaron en el desarrollo del motor eléctrico, llevándolo desde prototipos teóricos a escalas industriales, entre ellos se destacan Moritz Jacobi quien se estima creó el primer motor eléctrico giratorio real en 1834. Los aportes de Heinrich Lenz acerca de la reciprocidad de los fenómenos electromagnéticos fueron muy importantes en el uso de motores como generadores eléctricos, idea implementada por Werner Siemens en la invención de dinamos en 1866. Sobre esa base muchas más personas contribuyeron en este desarrollo, como Nicola Tesla y Galileo Ferraris, quienes introdujeron el motor de inducción eléctrica que funciona con corriente alterna. A partir de ese punto los motores se siguieron desarrollando hasta el día de hoy, en donde se utilizan diariamente como generadores eléctricos y proveen la mayoría de electricidad que se consume actualmente [12].

En los motores la conversión a energía electromecánica se debe a la interacción entre campos eléctricos y campos magnéticos, los cuales se generan por la circulación de corriente en sus devanados [7]. Cuando se utiliza una corriente eléctrica para obtener un movimiento mecánico se tiene un motor. En el caso de obtener corriente

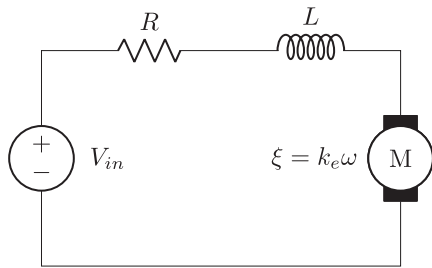
eléctrica a partir de un movimiento mecánico se tiene un generador, que pueden ser de dos tipos: alternador si genera corriente AC, o un dinamo si la corriente eléctrica obtenida es directa DC [1, 13]. Los motores de corriente eléctrica dependiendo de la forma como se han construido y del tipo de corriente con la que se alimentan, se pueden dividir en motores de corriente directa (DC) y motores de corriente alterna (AC). Aunque esta es solo una forma de categorizar, ya que hay motores que pueden trabajar tanto con alimentación DC y AC [3, 5]. Existen diversos tipos de motores AC, tales como: los motores universales que pueden trabajar tanto con alimentación AC o DC, motores asíncronos o motor de inducción, motores síncronos y los motores jaula de ardilla. Algunos de los tipos más conocidos de motores DC con respecto a sus características de diseño son: motores shunt o paralelo, motores serie, motores compuestos y los motores de imán permanente [1, 5, 9, 13, 14].

Existen motores DC con escobillas y sin escobillas. Los que tienen escobillas utilizan un conmutador que invierte la polaridad de las bobinas, de manera que puedan mantener un giro constante y en una misma dirección [14]. Por lo tanto la velocidad se controla simplemente con el cambio del voltaje de alimentación, además son de bajo costo. Estos motores tienen tres partes principales: el estator, el rotor y el conmutador. Cuando el estator contiene imanes permanentes que interactúan con el campo del devanado para producir el giro del motor, se conocen como motores de imán permanente [15, 16]. Los imanes permanentes proporcionan un flujo magnético sin necesidad de otro embobinado, evitando así una alimentación adicional. El rotor gira dentro del campo magnético producido por los imanes [5].

El funcionamiento de todo motor tiene como base fundamental la ley de Lorentz que describe la fuerza que experimenta una partícula cargada moviéndose dentro de un campo magnético. Si un conductor con un flujo de corriente es colocado dentro del campo magnético hay una fuerza que se ejercerá sobre dicho conductor [2, 6, 17]. Por la ley de Ampere se tiene que la fuerza producida es proporcional a la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$  y a la dirección de la corriente  $I$  que pasa por el conductor y es perpendicular a ambas, la magnitud de la fuerza depende de la intensidad de la corriente y de la longitud del cable [2, 3, 14, 17].

En un motor en lugar de tener un solo cable dentro del campo magnético, se tiene una bobina formada por espiras las cuales se colocan alrededor de un eje. Al aplicar corriente se generan fuerzas opuestas, una hacia arriba y otra hacia abajo a cada lado de las espiras, por lo que estas comienzan a girar alrededor del eje. Por lo tanto el efecto neto de las dos fuerzas sobre la bobina produce un momento de giro o torque. En el caso que la bobina tenga  $N$  vueltas, el torque está dado por:

$$\tau = 2NBli r \quad (1)$$



**Figura 1:** Diagrama de circuito equivalente que representa un motor DC de imán permanente.

donde  $r$  es la distancia entre el eje y la espira,  $i$  es la corriente que fluye en la espira y  $B$  es el campo magnético producido por un imán permanente en los motores DC [3]. Considerando que tanto  $N$ ,  $B$  y  $l$  son constantes, el torque se puede expresar como el producto de la corriente  $i$  que circula en la espira por una constante  $k_\tau$ , llamada constante de torque o par con unidades de  $\frac{N \cdot m}{A}$  [2, 3, 8, 17], obteniendo:

$$\tau = k_\tau i \tag{2}$$

Un modelo completo de un motor DC puede llegar a ser muy complicado dada la gran cantidad de variables que involucra. Para el caso de un motor DC de imán permanente existe un modelo sencillo y simplificado [10], que se aproxima a su comportamiento real, dicho modelo se muestra en la Figura 1. El cual describe el motor como un sistema que tiene una resistencia interna  $R$ , una inductancia  $L$  y un rotor. Tal que cuando la corriente ( $I$ ) circula por el devanado, genera una fuerza contra-electromotriz que hace girar el rotor [17]. La interacción entre el flujo creado al circular la corriente por el devanado y el campo magnético del imán permanente genera un par electromagnético, como se muestra en la ecuación (2).

Esta fuerza contra-electromotriz es proporcional a la velocidad angular del eje del motor [2, 10] y esta dada por:

$$\xi = k_e \omega \tag{3}$$

Siendo  $k_e$  una constante de proporcionalidad llamada constante de fuerza contra-electromotriz [4, 17].

El momento de fuerza que se debe aplicar sobre el eje del motor para que mantenga cierta velocidad angular se conoce como par o torque. En general el par se puede encontrar mediante la relación  $\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}$ , cuya magnitud esta dada por  $\tau = Fr \sin \theta$ , donde  $F$  es la magnitud de la fuerza aplicada,  $r$  es el radio del eje y  $\theta$  corresponde al ángulo que forma la línea de acción de fuerza y el vector posición al eje de rotación [1, 17]. En el caso que la fuerza aplicada, es decir la línea de acción de la fuerza sea perpendicular, el torque se puede expresar como [13]:

$$\tau = Fr \tag{4}$$

El trabajo en el movimiento rotatorio es la aplicación del par a lo largo de un ángulo. Para obtener un par

constante el trabajo se puede expresar como el producto del torque  $\tau$  por el ángulo  $\theta$  [1], por lo tanto la potencia mecánica realizada por el eje del motor es :

$$P_m = \tau \omega \tag{5}$$

Donde  $\tau$  es el torque o par que ejerce el motor y  $\omega$  es la velocidad angular a la que gira el eje.

Teniendo que la potencia mecánica del rotor esta dada por la ecuación (5) y que la potencia eléctrica absorbida por la fuerza contra-electromotriz para mover el rotor es el producto de la corriente por la fuerza contra-electromotriz, al igualar estas ecuaciones se obtiene:

$$P_m = \tau \omega = k_\tau I \omega = I k_e \omega = I \xi = P_e \tag{6}$$

Con lo que se concluye que para que haya conservación de energía electromecánica  $k_\tau = k_e$  [17]. Partiendo del modelo que se muestra en la Figura 1, el voltaje aplicado es la suma del voltaje que cae sobre la resistencia, más el voltaje que cae sobre la bobina, más la fuerza contra-electromotriz, de donde se obtiene la ecuación que describe el modelo eléctrico del motor [14, 16]:

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} + k_e \omega \tag{7}$$

Realizando el análisis en estado estable, es decir con corriente constante, se obtiene que  $\frac{dI}{dt} = 0$  y al reemplazar la ecuación (3) en la ecuación (7) se tiene:

$$V = RI + \xi \tag{8}$$

Si la corriente del motor es constante, entonces la corriente es proporcional al torque producido tal como se indica en la ecuación (2), donde  $k_\tau$  relaciona linealmente la corriente con el par generado en motores de imán permanente [8, 14]. Utilizando la ecuación (3), despejando  $I$  en la ecuación (2) y sustituyendo este valor en la ecuación (8), resulta:

$$V = \frac{R}{k_\tau} \tau + k_e \omega \tag{9}$$

Al despejar  $\tau$  se encuentra una relación entre el torque y la velocidad angular:

$$\tau = \frac{V k_\tau}{R} - \frac{k_\tau k_e}{R} \omega \tag{10}$$

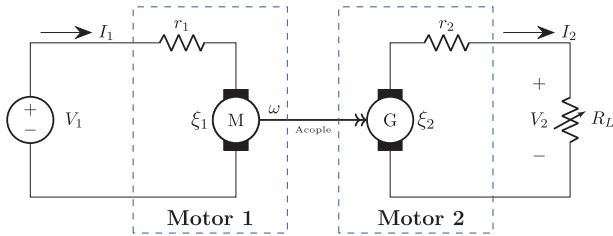
La potencia de entrada se describe como:

$$P_{in} = VI \tag{11}$$

Al despejar  $I$  de la ecuación (8) y reemplazarla en (11) se llega a una ecuación que relaciona la potencia de entrada con la velocidad angular:

$$P_{in} = \frac{V^2}{R} - \frac{V k_e}{R} \omega \tag{12}$$

Para encontrar una relación entre la potencia mecánica y la velocidad angular, se despeja  $\tau$  de la ecuación (5)



**Figura 2:** Diagrama esquemático en estado estable del sistema motor-generador.

y se sustituye en la ecuación (10), luego se despeja  $P_m$  obteniendo:

$$P_m = \frac{k_\tau}{R} V \omega - \frac{k_e k_\tau}{R} \omega^2 \quad (13)$$

Durante la caracterización de un motor se busca analizar como se comporta bajo la acción de distintas cargas, para lo cual se miden los valores de la corriente, la velocidad angular y el torque capaz de proporcionar a diferentes voltajes de entrada. Un método para realizar esta caracterización es implementar un sistema motor-generador mediante el acople de dos motores, en el cual el motor que actúa como generador se ve como una carga de freno electro-magnético. Al conectar los bornes del generador a resistencias de carga de diferentes valores, se produce que varíe la resistencia al movimiento del eje de rotación, generando también un cambio en el par de frenado [9].

En este trabajo se va a utilizar el método propuesto en [11], para encontrar de manera indirecta el valor de la potencia mecánica transmitida ( $P_m$ ) entre el motor y el generador, siguiendo un procedimiento similar al que plantean. En la Figura 2 se presenta un esquema simplificado del sistema motor-generador, en donde  $r_1$  y  $r_2$  son las resistencias internas del motor y del generador respectivamente. Partiendo que el análisis se hace en estado estable, el efecto de la inductancia interna se desprecia y se puede utilizar un modelo sin inductancias. La ecuación de potencias para el motor queda:

$$V_1 I_1 = \xi_1 I_1 + I_1^2 r_1 + P_m + \Delta P_1 \quad (14)$$

La ecuación de potencias del generador es:

$$P_m = \xi_2 I_2 + I_2^2 (r_2 + R_L) + \Delta P_2 \quad (15)$$

Donde  $R_L$  es la resistencia de carga que se le conecta al generador y  $\Delta P_1$ ,  $\Delta P_2$  son las potencias debidas a pérdidas en el motor y en el generador respectivamente. Para poder hallar  $P_m$  es necesario utilizar motores iguales, tal que se pueda asumir  $\xi_1 = \xi_2$ ,  $r_1 = r_2$  y  $\Delta P_1 = \Delta P_2$ . Resolviendo las ecuaciones (14) y (15), se obtiene el valor de la potencia mecánica  $P_m$ :

$$P_m = \frac{(V_1 + V_2) I_1 I_2 + (I_1 - I_2) (\Delta P - I_1 I_2 r_1)}{(I_1 + I_2)} \quad (16)$$

Este resultado es válido cuando se supone que los motores tienen las mismas características. Para medir

$\Delta P$  se deja el circuito del generador abierto, es decir sin  $R_L$ . Al ser  $\xi$  y  $P_m$  función de la velocidad angular del motor, tanto la potencia mecánica como las pérdidas por fricción son equivalentes en el sistema sin carga y en el sistema con carga, cuando se hacen girar a una misma velocidad angular. Dado que  $I_2 = 0$  en el sistema sin  $R_L$ , se obtiene de la ecuación (8) que la tensión de salida del generador es la FEM ( $V_2 = \xi$ ) y también se cumple que  $P = \Delta P$  en la ecuación (15). Es decir que toda la potencia mecánica se gasta en las pérdidas por fricción del mecanismo de movimiento del generador [11]. Mediante este análisis se puede estimar el valor de las pérdidas  $\Delta P$  para diferentes velocidades en el motor utilizando la ecuación (14), obteniendo:

$$\Delta P = \frac{I_1 (V_1 - V_2 - I_1 r_1)}{2} \quad (17)$$

La eficiencia del motor relaciona la potencia mecánica  $P_m$  con la potencia eléctrica de entrada, por:

$$\eta_m = \frac{P_m}{P_{in}} 100\% = \frac{P_m}{I_1 V_1} 100\% \quad (18)$$

Mientras la eficiencia del generador relaciona la potencia eléctrica de salida y la potencia mecánica  $P_m$ , por:

$$\eta_g = \frac{P_{out}}{P_m} 100\% = \frac{I_2 V_2}{P_m} 100\% \quad (19)$$

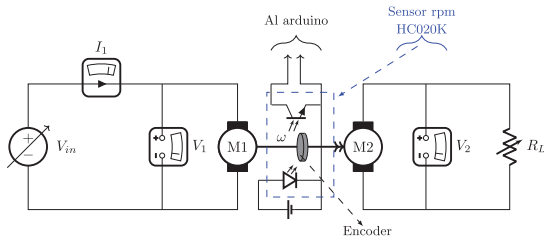
La eficiencia total del sistema motor-generador se obtiene de multiplicar las eficiencias del motor y del generador respectivamente:

$$\eta_{total} = \eta_m \eta_g = \frac{I_2 V_2}{I_1 V_1} 100\% \quad (20)$$

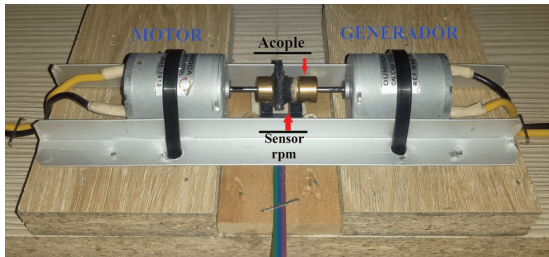
### 3. Montaje Experimental

En la implementación de este trabajo se utilizaron dos motores de 9 V de 5600 rpm con referencia MME3919 y se empleó el módulo regulador XL4015 a 5 A como fuente de alimentación DC variable. Para la medición de la velocidad angular de los motores se utilizó el módulo HC020K sensor-encoder óptico, que consta de un fotodiodo y un fototransistor, alimentados con un voltaje DC de 5 V. Este módulo proporciona una señal alta cuando hay un objeto entre el haz que sale desde el fotodiodo hacia el fototransistor y caso contrario aporta una señal baja. Esta señal cuadrada se envió a un ARDUINO UNO y mediante la medición del tiempo de flancos ascendentes consecutivos se calculó la velocidad en rpm, el sensor utilizado puede medir frecuencias hasta de 100 KHz. Las mediciones de voltajes y de corrientes se realizaron mediante voltímetros y amperímetros digitales, con resoluciones de 0.01 V y 0.1 mA respectivamente.

Para el estudio del comportamiento del motor bajo el efecto de una carga se utilizó un sistema motor-generador. Mediante un acople mecánico se alinearon y



**Figura 3:** Diagrama esquemático del montaje implementado con los respectivos medidores de corriente, voltaje y frecuencia angular.



**Figura 4:** Montaje experimental del sistema motor-generador acoplado.

ajustaron los ejes de los dos motores. Tal que el segundo motor que trabaja como generador (M2) actúa como freno mecánico del primer motor (M1), al cual se le va a realizar la caracterización. En la Figura 3 se presenta un diagrama esquemático con los elementos utilizados en el montaje y la ubicación de los medidores de voltaje, corriente y velocidad angular.

El motor es alimentado por una fuente DC variable, se mide el voltaje sobre los bornes del motor y la corriente que ingresa al mismo. Los bornes del generador se conectan a una resistencia de carga  $R_L$  y se mide el voltaje sobre dicha resistencia que corresponde al voltaje entregado por el generador. Dado que la carga es completamente resistiva la corriente de salida se puede hallar mediante la ley de Ohm.

La Figura 4 presenta el diagrama del montaje implementado, en el cual se observa el motor y el generador alineados mediante un acople de metal que conecta sus ejes. Los motores son ajustados mediante abrazaderas plásticas a un carril de aluminio, que esta fijo sobre una base de madera, para que permanezcan estáticos durante todo el experimento. Es muy importante que los motores queden completamente fijos y bien alineados, para evitar pérdidas por vibraciones. El sensor de velocidad se encuentra debajo del acople y mide la cantidad de vueltas del eje.

### 3.1. Procedimiento

Para realizar el experimento se siguieron las etapas que se describen a continuación:

1. Se identificaron las características de cada uno de los dos motores por separado, sin carga mecánica.

Para esto se conecto cada motor a la fuente de alimentación DC y se midió la corriente y la velocidad angular en rpm. Realizando medidas con voltajes de entrada desde 2V hasta 9V con incrementos de 1V.

2. Se midió la resistencia interna de cada motor utilizando las recomendaciones expuestas en [18] para las mediciones de resistencias en motores de imán permanente. Se bloquea el eje del motor, con lo que se anula la fuerza contra-electromotriz generada por el devanado. Se aplican voltajes de alimentación por debajo del voltaje nominal con el fin de evitar daños en el embobinado. Para cada voltaje utilizado se midió la corriente que circula, obteniendo como resultado que la relación entre el voltaje y la corriente, proporciona el valor de la resistencia interna.
3. Luego se realizó la caracterización de uno de los motores (motor M1), utilizando como carga un generador, el cual es el segundo motor (motor M2). Como se observará en los resultados, tanto el motor (M1) como el generador (M2), tenían características muy similares. Para realizar este paso se acoplaron los ejes de los motores como se muestra en la Figura 4, con el fin de implementar el sistema motor-generador. Se aplicaron voltajes de entrada al motor M1 desde 4V hasta 9V con incrementos de 1V y se midió: el voltaje de entrada del motor M1, la corriente de entrada del motor M1, la velocidad del sistema y el voltaje sobre la resistencia de carga, que corresponde al voltaje generado por el motor M2. Este procedimiento se realizó para diferentes valores de resistencia de carga " $R_L$ ", primero dejando el generador sin carga y luego variando las resistencias de carga entre 5.3Ω y 328.8Ω. Las incertidumbres para los valores de resistencia utilizados fue de 0.1Ω.

## 4. Resultados y análisis

El desarrollo del trabajo se fundamenta en dos etapas: primero se estudia cada uno de los motores sin carga, con el fin de verificar que los dos tienen características similares, luego se caracteriza el motor M1 utilizando el sistema motor-generador. Los resultados se presentan a continuación:

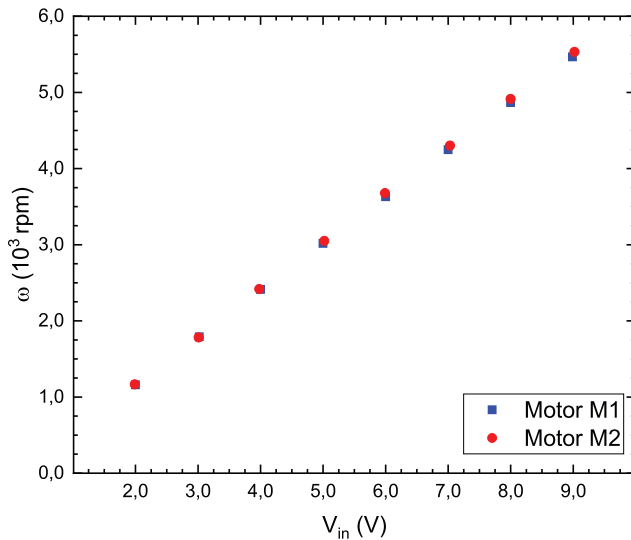
### 4.1. Medición de los motores M1 y M2 sin carga

En esta parte del trabajo se presentan los resultados de la medida para cada uno de los motores de la dependencia entre la velocidad angular con el voltaje de entrada y de su resistencia interna.

#### 4.1.1. Relación entre $\omega$ y $V_{in}$

La Figura 5 muestra la relación entre la velocidad angular  $\omega$  y el voltaje de entrada  $V_{in}$  para los motores





**Figura 5:** Relación entre la velocidad angular y el voltaje de entrada para los motores M1 y M2 sin carga.

M1 y M2. Se observa que la velocidad angular varía linealmente en función de el voltaje aplicado, presentando una relación proporcional entre  $\omega$  y  $V$ . Realizando un ajuste lineal a las dos curvas, se obtuvo una pendiente de  $616 \frac{rpm}{V}$  para el motor M1 y  $623 \frac{rpm}{V}$  para el motor M2.

Los valores de las pendientes encontradas son muy cercanos, con una diferencia porcentual de 1.1%. Considerando la ecuación (7) con  $I$  constante, se tiene que la velocidad angular  $\omega$  es proporcional al voltaje aplicado ( $\omega \propto V$ ), donde la constante de proporcionalidad es el inverso de la constante contra-electromotriz  $\frac{1}{k_e}$ . Por lo tanto al calcular el inverso de la pendiente de los ajustes lineales en la Figura 5 se obtiene el valor de la constante  $k_e$  para cada motor. Para el motor M1 se encontró  $k_e = 1.62 \frac{mV}{rpm}$  y para el motor M2 se encontró  $k_e = 1.61 \frac{mV}{rpm}$ , obteniendo una diferencia porcentual entre dichas constantes del 0.6%.

#### 4.1.2. Medición de la resistencia interna de los motores M1 y M2

En la Figura 6 se presenta la relación entre voltaje y corriente para los motores M1 y M2 con el eje bloqueado, se observan tendencias lineales con pendientes similares. Realizando ajustes lineales a las curvas se obtienen las siguientes expresiones:

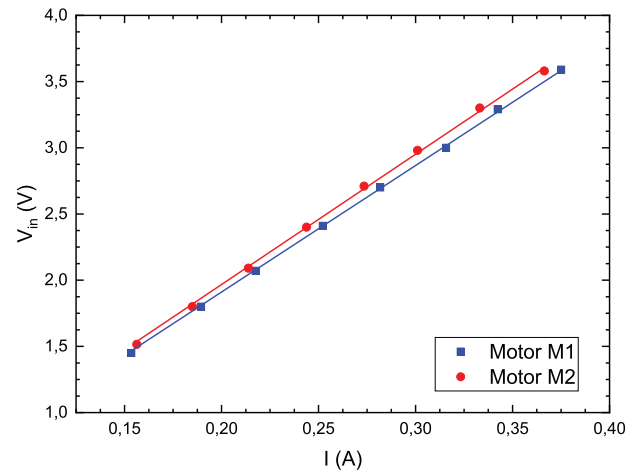
Motor M1

$$V[V] = 9.6 I \quad (21)$$

Motor M2:

$$V[V] = 9.8 I \quad (22)$$

Las pendientes de las ecuaciones (21) y (22) corresponden a la resistencias internas de los motores. Para el motor M1 se obtuvo  $r_1 = 9.6 \Omega$ , y para el motor



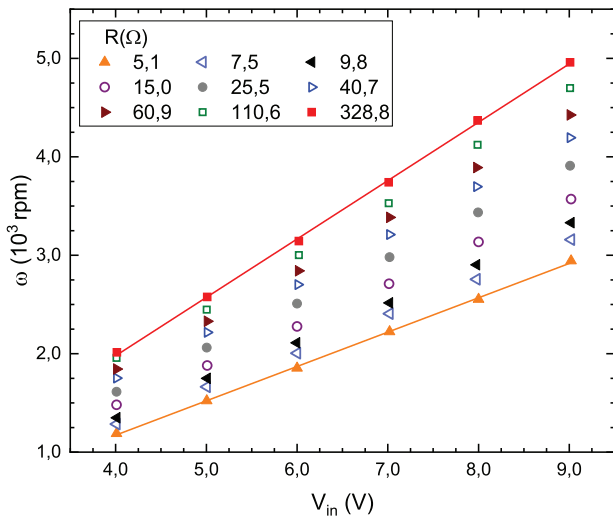
**Figura 6:** Relación de voltaje en función de corriente con el eje bloqueado para los motores M1 y M2.

M2 se obtuvo  $r_2 = 9.8 \Omega$ , cuyos valores presentan una diferencia porcentual de 2%.

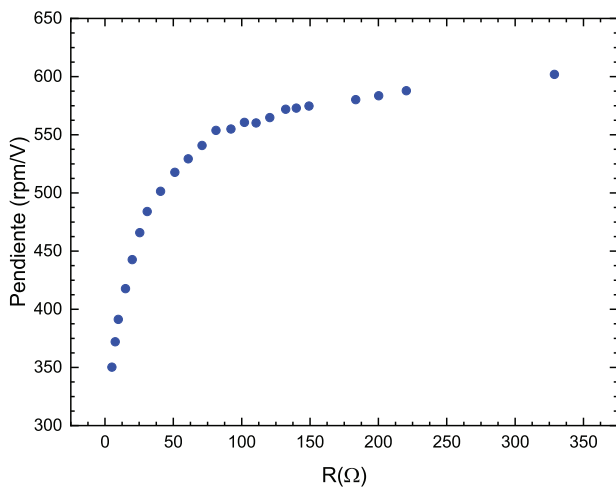
Vemos que las diferencias presentadas entre las variaciones de  $\omega$  en función de  $V_{in}$ , las constantes contra-electromotriz y las resistencias internas de los dos motores son menores al 2%. Por lo tanto es razonable asumir que las características de los motores M1 y M2 son similares. Esto permite emplear el procedimiento propuesto en [11] y utilizar el sistema motor-generador para realizar la caracterización del motor M1.

#### 4.2. Caracterización del sistema motor-generador

La caracterización del sistema motor-generador se utiliza para encontrar valores intrínsecos del motor M1, tales como las constantes  $k_e$ ,  $k_\tau$ , el comportamiento de la eficiencia y de la potencia. Como primer paso se verificó la relación entre  $\omega$  y  $V_{in}$  para el sistema motor generador. En la Figura 7 se presenta esta gráfica para algunas resistencias de carga, las cuales se variaron entre  $5.1 \Omega$  y  $328.8 \Omega$ . Se hizo esta medida para 23 valores diferentes de la resistencia de carga, pero por claridad solo se muestran algunos resultados de la medida en la Figura 7. Cabe resaltar que no se utilizaron resistencias de mayor valor, ya que para  $R_L = 328.8 \Omega$  la velocidad angular se acercaba a la velocidad del generador sin carga. Como se aprecia en la figura se obtienen relaciones lineales entre  $\omega$  y  $V_{in}$ . Además se observa que la pendiente, que representa el incremento de la velocidad angular del motor en función del voltaje de entrada, aumenta con el valor de la resistencia de carga, donde la pendiente máxima corresponde al sistema sin carga. El ajuste lineal para los valores de resistencia menor (línea naranja) presenta una pendiente de  $350 \frac{rpm}{V}$ , mientras el de la resistencia mayor (línea roja) tiene una pendiente de  $601 \frac{rpm}{V}$ , que es muy similar al valor encontrado para el motor en vacío, con una diferencia porcentual del 3.5%.



**Figura 7:** Relación entre la velocidad angular y el voltaje de entrada para el sistema motor-generador, con diferentes valores de resistencias de carga en el generador.

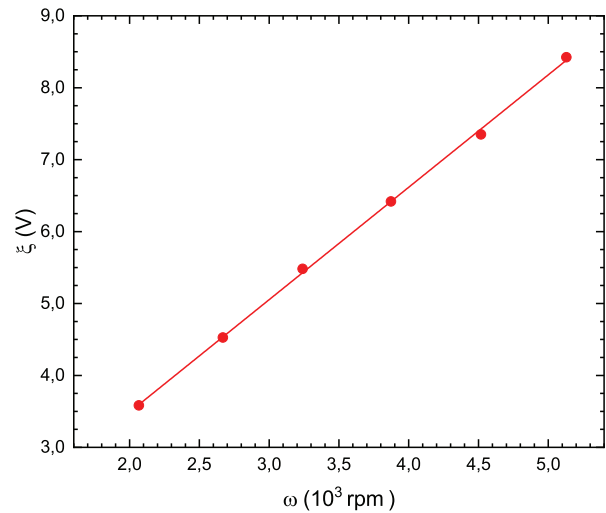


**Figura 8:** Relación entre la resistencia de carga  $R_L$  y la pendiente del ajuste lineal entre la velocidad angular  $\omega$  y el voltaje de entrada  $V_{in}$ .

En la Figura 8 se presenta la relación entre las pendientes de los ajustes lineales de la relación entre  $\omega$  y  $V_{in}$ , para cada una de las resistencias de carga con las que se hizo la medida. Se observa una relación no lineal, donde el cambio de los valores de las pendientes es mucho mas apreciable para valores bajos de resistencia de carga. Esto es debido a que la carga que se utiliza también es un motor cuyo torque varia linealmente con la velocidad angular. Por lo tanto cada resistencia de carga no ofrece un torque constante de freno sobre el motor, sino que varia linealmente con el voltaje de entrada aplicado.

#### 4.2.1. Medida de la FEM y el torque en el sistema motor-generador

Partiendo del análisis de la Figura 2, se observa que al utilizar una resistencia de carga  $R_L$  muy grande o



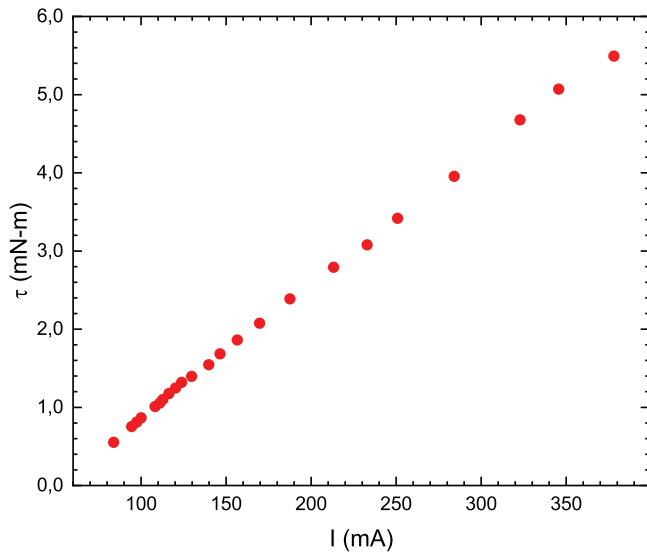
**Figura 9:** FEM ( $\xi$ ) en función de la velocidad angular ( $\omega$ ).

dejar el circuito abierto, la corriente  $I_2$  se hace cero, y entonces se obtiene que el voltaje sobre la resistencia interna  $r_2$  es cero. Por lo tanto el voltaje en la salida de los bornes del generador  $V_2$  es la FEM del motor M2 ( $\xi_2$ ), lo que permite encontrar una relación directa para medir la FEM. Como se mostró anteriormente los dos motores son de características muy similares, por lo tanto se espera que la FEM sea la misma. De la ecuación (3) se tiene que la FEM es proporcional a la velocidad angular y al estar los motores acoplados por su eje, la velocidad angular es la misma en cada motor.

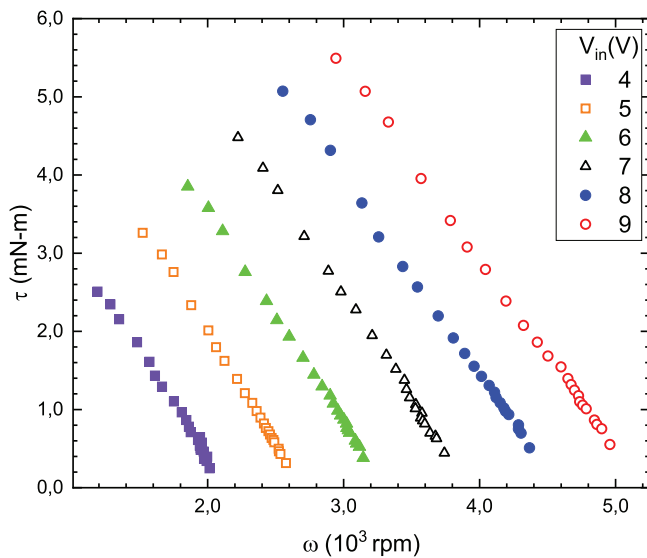
En la Figura 9 se muestran los valores encontrados de la FEM en función de la velocidad angular para los voltajes de entrada entre 4 V y 9 V. Se observa un comportamiento lineal, de donde se obtiene que la constante de proporcionalidad es  $k_e = 1.54 \frac{mV}{rpm}$ . Encontrando una discrepancia de 4.9% con respecto al valor hallado previamente para los motores en vacío.

Otra característica importante en los motores DC es la constante de par  $k_\tau$ , que da cuenta del torque que puede ejercer el motor en función de la corriente aplicada, como se indica en la ecuación (2). La Figura 10 presenta la relación del torque  $\tau$  y la corriente  $I$  del motor M1 para diferentes valores de resistencia de carga en el generador, para el voltaje nominal de 9 V. Con el fin de conocer el valor del torque generado, se despejó  $\tau$  de la ecuación (5) y se utilizó la potencia mecánica calculada mediante la ecuación (16). En la Figura 10 se observa un comportamiento lineal, que corrobora la proporcionalidad que hay entre el torque generado y la corriente aplicada al motor. La pendiente de esta recta corresponde a la constante del par, cuyo valor es  $k_\tau = 16.7 \frac{mN \cdot m}{A}$ . Teniendo en cuenta que  $1 \frac{mN \cdot m}{A}$  equivale a  $\frac{2\pi}{60} \frac{mV}{rpm}$ , la constante de par se puede representar en las mismas unidades de la constante eléctrica, obteniendo que  $k_\tau = 1.7 \frac{mV}{rpm}$ .

En la Figura 11 se representa la relación entre el torque generado en el motor en función de la velocidad



**Figura 10:** Relación entre el torque y la corriente del motor M1, para un voltaje nominal de 9 V.



**Figura 11:** Relación entre el torque y la velocidad angular para el motor M1, tomando como parámetro el voltaje de entrada.

angular, para voltajes de alimentación entre 4 V y 9 V. Se observa una tendencia lineal decreciente para todas las curvas con una pendiente muy similar. De acuerdo con la ecuación (10) se tiene que la pendiente corresponde a  $\frac{k_\tau k_e}{R}$ , de donde se puede obtener también el valor de  $k_\tau$ . Al promediar el valor de las pendientes de la Figura 11, multiplicarlo por la resistencia interna y dividirlo por el valor de  $k_e$  obtenido para el motor M1 sin carga, se obtuvo una constante de torque  $k_\tau = 1.69 \frac{mV}{rpm}$ . La cual es muy similar al valor obtenido a partir de la Figura 10, con una discrepancia del 4%.

Se encontró también que la constante de torque tiene una discrepancia de 5.2% con la constante  $k_e$  encontrada para el motor trabajando sin carga. Esta

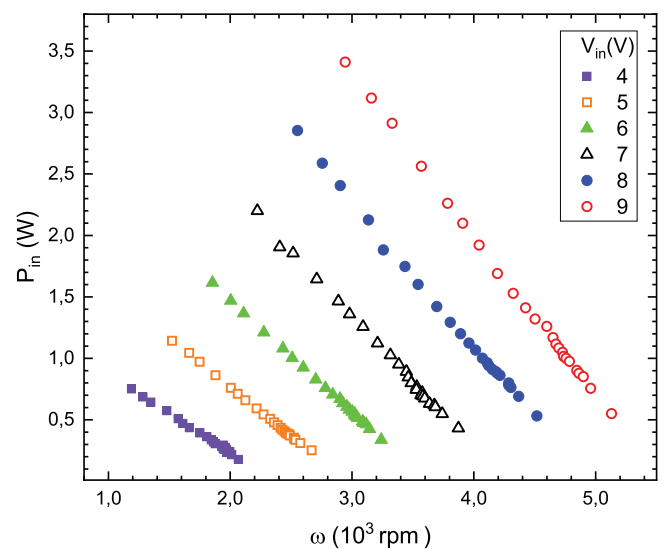
diferencia puede indicar que toda la energía eléctrica no se convierte en energía mecánica, ya que hay pérdida por calentamientos en el embobinado y fricciones en los mecanismos del motor. De todas formas los valores obtenidos son lo suficientemente cercanos, tal que es válido trabajar con la hipótesis de conservación de energía electromecánica del modelo que se está usando para el sistema motor-generador.

#### 4.2.2. Relaciones de potencia

La Figura 12 muestra la relación entre la potencia de entrada y la velocidad angular. Se observan relaciones lineales decrecientes para cada uno de los voltajes de entrada, lo cual concuerda con la forma de la ecuación (12) y con los resultados experimentales presentados en [9]. La pendiente de estas curvas representan el decremento de la potencia de entrada por aumento de la velocidad angular en rpm. Es decir se evidencia que a mayor velocidad menor consumo de potencia, debido a que las mayores velocidades se presentan cuando el motor tiene cargas menores.

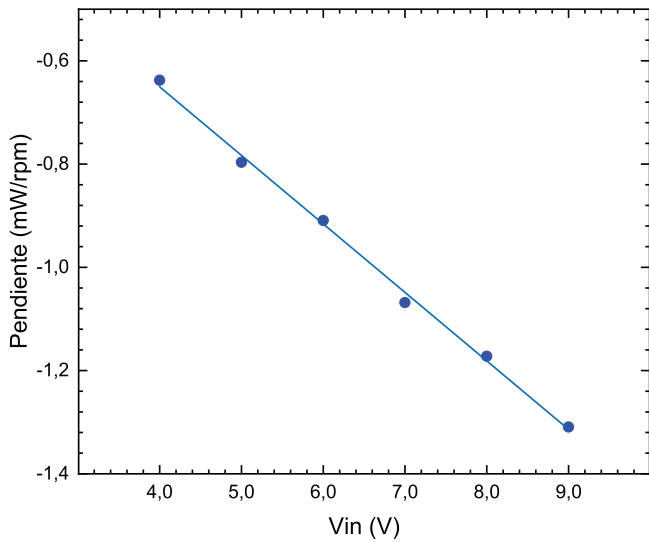
En el rango de voltajes de alimentación utilizados, se observó que la magnitud de la pendiente es mayor a mayores voltajes de entrada. De las pendientes de la Figura 12 se encontró que la relación de cambio entre  $P_{in}$  y  $\omega$  presenta un comportamiento lineal en función del voltaje de entrada, tal como se muestra en la Figura 13, obteniendo una pendiente de  $-0.13 \frac{mW/rpm}{V}$ .

En la Figura 14 se representan las relaciones de potencia mecánica en función de la velocidad angular para voltajes de entrada entre 4 V y 9 V. Observe que los datos medidos no alcanzan a dar la forma completa a la gráfica, ya que la carga mecánica puesta (el generador con diferentes resistencias de carga) no logra llevar al motor cerca del punto de bloqueo o de máximo torque

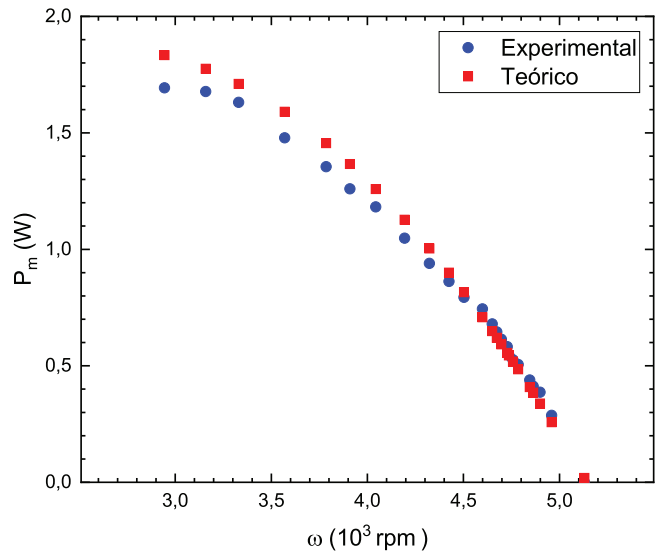


**Figura 12:** Potencia de entrada en función de la velocidad angular, para voltajes de entrada entre 4 V y 9 V.

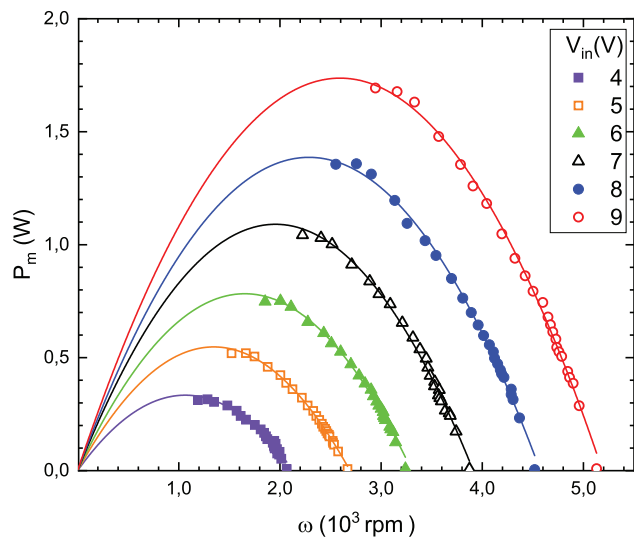




**Figura 13:** Variación de las pendientes de las curvas de la Figura 12 en función del voltaje de entrada.



**Figura 15:** Potencia mecánica teórica y medida, en función de la velocidad angular, para voltaje de entrada de 9 V.



**Figura 14:** Relación entre la Potencia mecánica y la velocidad angular, para voltajes de entrada entre 4 V y 9 V.

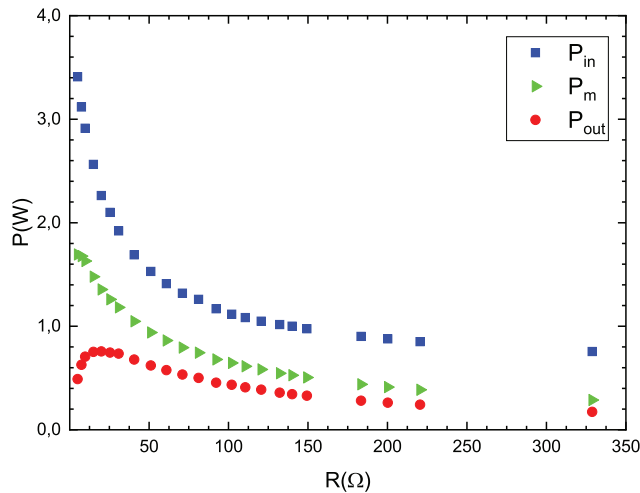
generado. Note que las curvas tienden a tener una forma parabólica. Cabe señalar que la máxima potencia que entrega el motor aumenta significativamente al aumentar el voltaje de entrada y con esto también se aumenta el rango de velocidades que logra generar. Realizando un ajuste parabólico que pasa por el origen se obtuvieron las curvas que se muestran en la Figura 14, estos ajustes presentaron un coeficiente  $r^2$  superior a 0.98 en todos los casos y están dados por la expresión  $P_m = c_1 V \omega - c_2 \omega^2$ , la cual es análoga a la ecuación (13), siendo  $c_1$  y  $c_2$  valores constantes que dependen de los parámetros del motor. Se obtuvo que  $c_1 = 1.56 \times 10^{-4} \frac{W}{rpmV}$  y  $c_2 = 2.82 \times 10^{-7} \frac{W}{rpm^2}$ . Al reemplazar los valores de  $k_\tau$  y  $k_e$  encontrados anteriormente en la ecuación (13), se encuentra una diferencia de 11.3% para  $c_1$  y de 1.1%

para  $c_2$ . Lo que corrobora que la ecuación (13) se puede utilizar para obtener la potencia mecánica del sistema motor-generador.

La ecuación (13) representa una relación entre la potencia de salida en función del voltaje de entrada, la velocidad angular, la resistencia interna y las constantes características  $k_e$  y  $k_\tau$ . En la Figura 15 se presenta la comparación de la potencia mecánica obtenida usando la ecuación (13) y la potencia medida para  $V_{in} = 9 V$ ,  $R = 9.6 \Omega$  y las constantes  $k_e = 1.62 \frac{mV}{rpm}$  y  $k_\tau = 1.69 \frac{mV}{rpm}$ . Tal como se observa en la figura, los valores calculados no presentan inconsistencias con respecto a los resultados teóricos, obteniendo discrepancias menores al 10%. Estas discrepancias son resultado de que el modelo teórico no contempla pérdidas por cambios en la temperatura de los motores. Se tiene que para menores velocidades el motor esta realizando un mayor torque, consumiendo más corriente. Lo anterior causa mayores temperaturas en los embobinados del motor, haciendo que aumente la resistencia interna. Por lo tanto es de esperar mayores diferencias entre los valores experimentales y teóricos.

En la Figura 16 se comparan las relaciones entre la resistencia de carga con la potencia eléctrica de entrada del motor ( $P_{in}$ ), la potencia mecánica ( $P_m$ ) y la potencia de salida del generador ( $P_{out}$ ), utilizando un voltaje de alimentación de 9 V. Se observa que las curvas de  $P_{in}$  y  $P_m$  son decrecientes y que el cambio de la potencia es menor al aumentar el valor de la resistencia de carga. Esto se debe a que al aumentar el valor de  $R_L$  la corriente de salida  $I_2$  disminuye, tendiendo a cero para valores grandes. Lo que implica que el sistema se acerca a comportarse como si no tuviera resistencia de carga, en decir se obtiene el punto mínimo de la potencia de entrada y la potencia mecánica.

La potencia de salida del generador no es decreciente para todo el rango de resistencias utilizadas. Cuando



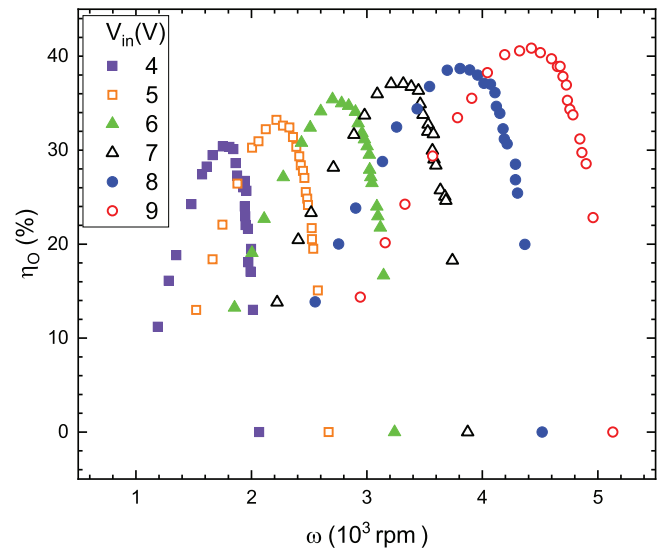
**Figura 16:** Potencia de entrada del motor ( $P_{in}$ ), potencia mecánica ( $P_m$ ) y potencia de salida del generador ( $P_{out}$ ), en función de la resistencia de carga, para un voltaje de alimentación de  $9\text{ V}$ .

la resistencia de carga es cero el voltaje de salida es cero, por lo tanto  $P_{out} = 0$ . Al aumentar el valor de  $R_L$ , se incrementa la potencia de salida hasta llegar a un valor máximo. Este comportamiento se debe a que el generador se puede ver como una fuente con una impedancia interna. Por lo tanto por el teorema de máxima transferencia de potencia, se tiene que alcanza su potencia máxima cuando la resistencia de carga es igual a la impedancia Thevenin del generador. Luego al seguir aumentando  $R_L$  la potencia decrece hasta llegar a cero cuando el generador no tiene carga, ya que en este caso la corriente de salida  $I_2 = 0$ .

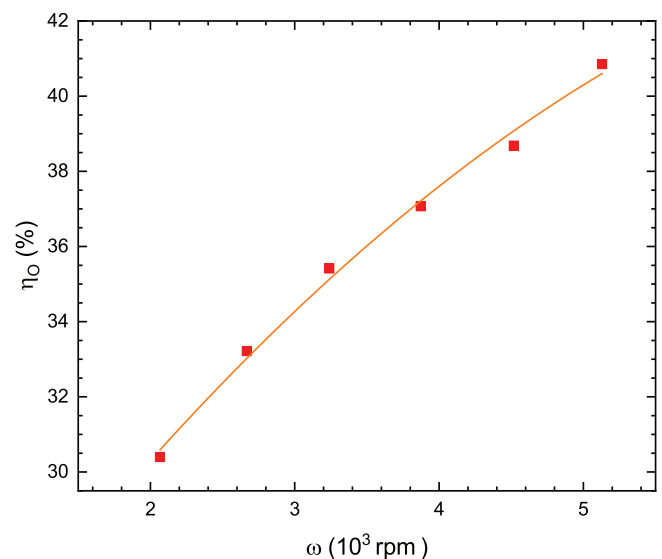
#### 4.2.3. Relaciones de eficiencia

La eficiencia para el sistema motor-generador se define usando la ecuación (20) y se muestra en función de la velocidad angular en la Figura 17 para diferentes voltajes de alimentación. Se obtienen curvas con concavidad hacia abajo, cuyo valor máximo aumenta al incrementarse el voltaje de alimentación utilizado. Al incrementarse la velocidad angular por el aumento de la resistencia de carga, las pérdidas por fricción en los rodamientos se van haciendo más significativas, produciendo que en determinado momento la eficiencia disminuya. También se observa que la tasa de crecimiento de la curva es mas lento comparado con la tasa de decaimiento. Con lo que se deduce que si se trabaja el sistema motor-generador en un rango mayor al de máxima eficiencia, se debe tener cuidado con las variaciones de la velocidad angular, que pueden llevar rápidamente a valores de menor eficiencia, lo que implica mayores pérdidas.

Al observar los máximos de las eficiencias en la Figura 17 se ve que aumentan a medida que se incrementa el voltaje de entrada  $V_{in}$ . En la Figura 18 se representan los valores máximos de cada una de las eficiencias en



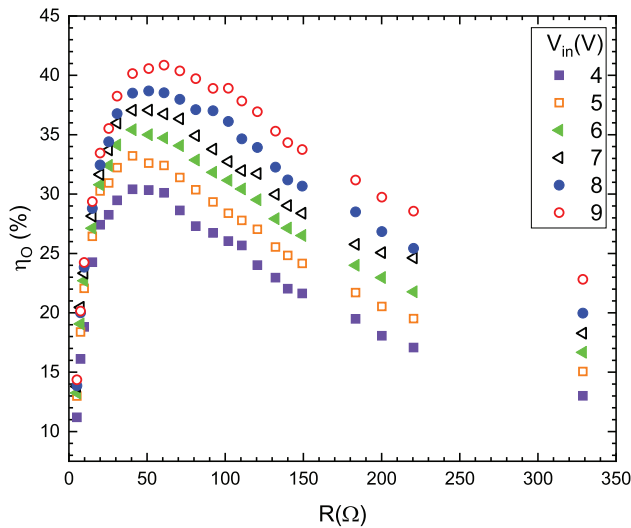
**Figura 17:** Relación entre la eficiencia de salida del sistema motor-generador y la velocidad angular para diferentes voltajes de entrada del motor.



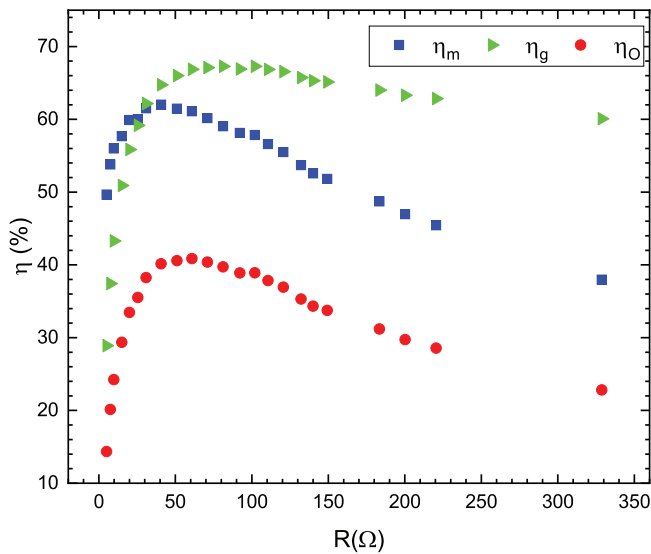
**Figura 18:** Relación entre los picos máximos de las curvas de eficiencia y la velocidad angular, para diferentes voltajes de entrada.

función de la velocidad angular, para los diferentes voltajes de entrada. De donde se aprecia claramente que la eficiencia máxima aumenta al incrementar la velocidad angular del sistema motor-generador.

En la Figura 19 se representa la relación entre la resistencia de carga y la eficiencia total del sistema motor-generador. Se observa que la forma de las curvas es similar para todos los voltajes de alimentación utilizados, y que el valor de la eficiencia máxima cambia, siendo mayor al incrementarse el voltaje de entrada. Por lo tanto en el rango de resistencias de carga estudiado, el comportamiento fenomenológico de la eficiencia del sistema no cambia al variar el voltaje de entrada.



**Figura 19:** Eficiencia de salida en función de la resistencia de carga, para voltajes de alimentación entre 4 V y 9 V, para el sistema motor-generator.



**Figura 20:** Eficiencia del motor M1 ( $\eta_m$ ), del generador M2 ( $\eta_g$ ) y del sistema motor-generator ( $\eta_o$ ) en función de la resistencia de carga, para un voltaje de alimentación de 9V.

Como se mostró anteriormente, los motores M1 y M2 cumplen las condiciones necesarias para poder aplicar la ecuación (16), ya que se puede asumir que tienen las mismas características. Conociendo el valor de la potencia mecánica hallado mediante la ecuación (16), se puede calcular la eficiencia del motor y la eficiencia del generador a partir de las ecuaciones (18) y (19) respectivamente. En la Figura 20 se presentan las relaciones entre la eficiencia del motor, la eficiencia del generador y la eficiencia del sistema motor-generator en función de la resistencia de carga del generador. Se observa que la eficiencia del generador crece hasta alcanzar un punto máximo. Para resistencias de carga mayores al valor

donde se presenta la máxima eficiencia, se tiene que la corriente consumida por la carga es muy baja y se acerca al comportamiento de un circuito abierto. Es decir el par de frenado que presenta el generador al motor es muy similar, por lo tanto varía muy poco la velocidad de trabajo del sistema, con lo que la disminución de la eficiencia se hace lenta.

La región en la que la eficiencia del motor es mayor a la eficiencia del generador corresponde en buena medida a la parte creciente de la potencia de salida de la Figura 16. Debido a que la resistencia de carga es menor a la impedancia del generador, la potencia que se entrega al devanado es mayor o igual a la que se entrega a la carga.

Es de suponer, que las pérdidas principales del motor y del generador se deben al calentamiento y a las pérdidas mecánicas por efecto del rozamiento. Estas últimas aumentan con la velocidad angular del motor. Dado que se tienen motores con características similares y acoplados, es decir con la misma velocidad angular, se puede asumir que las pérdidas mecánicas son las mismas en el motor y en el generador. Por lo tanto, las pérdidas por temperatura en los embobinados marcan la diferencia entre la eficiencia del motor y el generador. En el caso de resistencias mayores a la impedancia del generador, las pérdidas del motor son mayores a las pérdidas del generador debido a que la corriente por el devanado del motor es superior, provocando un mayor calentamiento. La eficiencia del sistema siempre es menor a las eficiencias del motor y del generador, ya que corresponde al producto de estas dos.

### 5. Conclusiones

Se observó que para los motores DC utilizados, el modelo lineal que relaciona el voltaje de entrada en función de la velocidad angular y la corriente de entrada se ajusta correctamente, por lo que es válido para analizar este tipo de motores. Además tiene la ventaja que es un modelo sencillo, que facilita la enseñanza de conceptos como potencia eléctrica, potencia mecánica, conservación de la energía y conversión de energía eléctrica a mecánica en los motores.

El sistema motor-generator se puede utilizar para la caracterización de los motores DC de imán permanente. El sistema permite el cálculo indirecto de la potencia mecánica y el torque generado por el motor, sin necesidad de utilizar instrumentos de medida como torquímetros. Se debe cuidar que tanto el motor como el generador utilizados tengan características muy similares.

Se calcularon las constantes eléctrica y de torque, tal que  $k_e = 1.62 \frac{mV}{rpm}$  y  $k_\tau = 1.68 \frac{mV}{rpm}$ , con una discrepancia entre ambos valores de 5.2%. Por lo que es viable considerar la aproximación de conservación de energía electromecánica  $k_e \approx k_\tau$  para los motores utilizados.

Este experimento se puede implementar a muy bajo costo en los laboratorios de enseñanza del electromagnetismo, para medir o calcular indirectamente algunas

características de los motores DC, como la FEM, torque, potencia y eficiencia. Las cuales son variables que los estudiantes muy pocas veces tienen la oportunidad de trabajar en los laboratorios de física.

## Referencias

- [1] S.J. Chapman, *Máquinas Eléctricas* (McGraw-Hill, Mexico, 2012), 5. ed.
- [2] A. Hughes y B. Drury, *Electric Motors and Drives Fundamentals, Types and Applications* (Newnes, Oxford, 2019), 5. ed.
- [3] M.S.Z. Salah, *Parameters Identification of a Permanent Magnet DC Motor*. Tesis de Maestría, The Islamic University of Gaza, Gaza (2009).
- [4] T. Pal, C. Shekhar y H.D. Sharma, en: *2009 International Conference on Advances in Computing, Control, and Telecommunication Technologies (ACT)* (Bangalore, 2009).
- [5] E.F.C. Villamizar y R.S. Rodríguez *Diseño y construcción de un banco de prácticas en motores eléctricos, como apoyo a la asignatura Máquinas II*. Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander, Santander, (2010).
- [6] ELECTRO-CRAFT CORPORATION, *DC Motors, Speed Controls, Servo Systems. An Engineering Handbook* (Pergamon Press, New York, 1977).
- [7] S.D. Umans, *Fitzgerald & Kingsley's Electric Machinery* (McGraw-Hill, New York, 2013).
- [8] M. Sadre, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials* **10**, 227 (1999).
- [9] J.C. Osorio, *Prueba de un motor DC como generador para Pico – Generación Eléctrica*. Proyecto de Grado, Universidad de los Andes, Colombia (2016).
- [10] M.G. Quijano y C.G. Hernández, *Obtención experimental de los parámetros del motor que se utilizará en el sistema de locomoción de una esfera rodante*. Trabajo de Grado, Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga (2009).
- [11] P.H. Ng, S.L. Wong y S.Y. Mak, *Physics Education* **44**, 639 (2009).
- [12] M. Doppelbauer, *The invention of the electric motor*, disponible en: <https://www.eti.kit.edu/english/1376.php>, accedido en 25/05/2021.
- [13] ELECTRICITY AND NEW ENERGY, *Permanent Magnet DC Motors, Student Manual 86357-00* (Festo Didactic Ltée/Ltd, Quebec, 2011).
- [14] BODINE ELECTRIC COMPANY, *Small Gearmotors, Motors, and Controls Handbook* (Bodine Electric Company, Illinois, 2018).
- [15] A. Harrington y C.M. Kroninger, *Characterization of small dc brushed and brushless motors*, Army Research Laboratory – ARL Tech Report ARL-TR-6389, Maryland (2013).
- [16] A. Konkani, R. Bera y S. Paul, *Advances in Systems, Control and Automation* (Springer, Singapore, 2018).
- [17] J. Chiasson, *Modeling and High Performance Control of Electric Machines* (John Wiley, New York, 2005).
- [18] E. Glueck, *Measuring Armature Circuit Resistance in a PMDC Motor*, disponible en: <https://gearmotorblog.wordpress.com/2012/04/26/armature-resistance-dc-motors/>, accedido en 01/06/2021.