

Força de Casimir para potenciais delta de Dirac (Casimir force for Dirac delta potentials)

Luis Alberto Soriano Carrillo e José Alexandre Nogueira¹

Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil
Recebido em 22/2/2008; Revisado em 11/12/2008; Aceito em 29/12/2008; Publicado em 30/6/2009

Neste trabalho mostramos explicitamente como determinar as funções de Green para o cálculo da força de Casimir devido a campos escalares entre fronteiras representadas por duas funções delta de Dirac em 1+1 dimensões. Reobtemos os resultados de K.A. Milton (J. Phys. **A37**, 209 (2004)), porém mostrando de forma detalhada os cálculos das funções de Green.

Palavras-chave: força de Casimir, potenciais delta de Dirac, funções de Green em 1+1 dimensões.

In this work we show explicitly how to determine the Green functions for the calculation of the Casimir force due to scalar fields between boundaries represented by two Dirac delta functions in 1+1 dimensions. With this purpose, we re-obtain the K.A. Milton results (J. Phys. **A37**, 209 (2004)), showing in the detailed form the calculations of the Green functions.

Keywords: Casimir forces, Dirac delta potentials, Green functions in 1+1 dimensions.

1. Introdução

A teoria quântica de campos é a mais bem sucedida teoria que une em uma só estrutura conceitual os princípios da mecânica quântica e da relatividade especial. Nela as partículas são interpretadas como as excitações dos campos. A quantização de uma teoria de campos implica em transformar os campos em operadores que atuam sobre vetores que pertencem a um particular espaço vetorial complexo, chamado espaço de Fock ou de número de ocupação. Esse espaço vetorial é um produto direto dos espaços de Hilbert associados a osciladores harmônicos independentes, onde as excitações elementares desses osciladores são associadas a partículas. Essa teoria quântica mostra que o *vácuo* ou o estado de mínima energia não é um espaço absolutamente vazio, mas sim um espaço no qual pequenas e rápidas flutuações dos campos (oscilações) ocorrem a todo momento e em toda parte. Essas são também conhecidas como *flutuações de ponto-zero*. As flutuações de ponto-zero podem ser interpretadas como uma contínua criação e aniquilação de partículas virtuais, ocorridas em intervalos de tempo muito pequenos. Um campo livre é um sistema com infinitos graus de liberdade, podendo ser considerado como uma coleção infinita de osciladores harmônicos desacoplados, cada um com uma frequência própria de oscilação. Essas

frequências são chamadas de *frequências normais* de vibração. Dessa maneira uma teoria de campos livres quantizados é tratada como um sistema de infinitos osciladores harmônicos quânticos desacoplados.

O efeito Casimir é um fenômeno de natureza quântica, e está associado às oscilações de ponto-zero do estado de vácuo dos campos quânticos. O efeito é uma consequência das distorções na energia do vácuo dos campos devidas à presença de contornos. Esse efeito foi predito por H.B. Casimir [1] em 1948. Em seu trabalho original, Casimir previu que, devido a flutuações quânticas do campo eletromagnético, duas placas metálicas, planas, paralelas e eletricamente neutras (aterradas) se atrairiam com uma força de módulo igual a

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} A, \quad (1)$$

onde A é a área das placas e a a distância entre elas. Para placas de 1 cm^2 de área e separadas de $1 \mu\text{m}$, a força de atração, por unidade de área, entre as placas é de $0,013 \text{ dynas/cm}^2$ ($1,3 \text{ mPa}$).²

Embora as flutuações de ponto-zero dos campos no vácuo do espaço livre (sem contornos) não sejam observadas, a presença de contornos muda essa situação. A energia de Casimir é determinada matematicamente

¹E-mail: nogueira@cce.ufes.br.

²O leitor interessado encontrará revisões em inglês na Ref. [2] e em português na Ref. [3].

como a diferença entre a energia de ponto-zero do vácuo do campo eletromagnético na presença de condições de contorno e a energia de ponto-zero do mesmo campo no espaço livre. Dessa maneira, esse efeito está relacionado com as diferenças na densidade de energia do vácuo, provocadas pelas alterações nas condições de contorno impostas aos campos no vácuo. Assim, delas obtém-se, como resultado, uma força de atração inversamente proporcional à quarta potência da distância entre as placas no vácuo do campo eletromagnético. Essa força foi medida experimentalmente por Sparnaay [4] em 1958, entretanto devido à enorme imprecisão de suas medidas, Sparnaay pode apenas mostrar que seus resultados experimentais eram compatíveis com a previsão teórica de Casimir. Experimentos realizados separadamente por Lamoureux em 1997 [5], usando o pêndulo de torsão, e Mohideen e Roy em 1998 [6], usando o microscópio de força atômica, marcam, devido aos seus altos graus de precisões, uma nova fase (chamada moderna) nas medidas da força de Casimir. Diversos outros experimentos [7] confirmaram o efeito Casimir com alto grau de precisão.

Ao estudar um fenômeno natural, quase sempre procuramos iniciar pela abordagem de um modelo idealizado, mais sem perder as características mais relevantes do fenômeno em estudo. Este é o caso da abordagem tradicional do estudo do efeito Casimir. Nela, as interações físicas entre as flutuações dos campos e a matéria de que são formadas as fronteiras³ são trocadas *ab initio* por condições de contorno idealizadas. Em geral as condições de contorno sob as quais estão sujeitos os campos quânticos restringem os possíveis valores de oscilação dos modos do campo em consideração.⁴ Contudo, esse tratamento convencional de condições de contorno idealizadas para a determinação da energia de Casimir dos campos quânticos, claramente não captura as características dos materiais reais. Um material real não pode confinar modos de excitações do campo eletromagnético com comprimentos de onda muito menores do que o comprimento de onda de plasma do material, não obstante condições de contorno idealizadas confinam todos os modos.

Nos últimos anos, o desenvolvimento de novas técnicas de medidas para a força de Casimir têm permitido atingir elevadas precisões. Em microeletrônica os efeitos das flutuações do vácuo têm se tornados relevantes. Assim, novos interesses têm surgido no efeito Casimir. Entre eles, a necessidade de previsões teóricas mais precisas que possam ser testadas e que sejam de importância considerável no estudo das novas tecnologias de micro e nanodispositivos. Nesses casos, somos levados a considerar condições de contorno mais realistas. Realmente, propriedades detalhadas dos

materiais, tais como: absorção, rugosidade e efeitos de temperatura finita; tornam-se muito relevantes devido às precisões atingidas nos experimentos.

O estudo dos efeitos das flutuações do vácuo, tais como a força e a energia de Casimir, em meios materiais realistas foi inicialmente feito por Lifshitz em 1956 [8]. Ele propôs uma teoria macroscópica para forças atuando entre duas espessas placas paralelas (semi-infinitas), formadas por materiais dielétricos dependentes da frequência $\epsilon(\omega)$, separadas por uma fatia infinita de outro material dielétrico. De acordo com essa teoria, as oscilações do vácuo são modeladas pelas flutuações do campo eletromagnético propagando-se dentro do material dielétrico descrito por uma permissividade dielétrica dependente da frequência. A teoria de Lifshitz nos permite calcular a força de Casimir considerando efeitos de temperatura finita (diferente de zero), bem como de condutividade finita.

Para tratar o efeito Casimir de forma mais realista, devemos considerar as interações das flutuações dos campos com a matéria das fronteiras, que modificam o vácuo do espaço livre, ao invés de introduzir condições de contorno idealizadas. Para esse fim, introduzimos na teoria um potencial de interação dado por

$$\frac{1}{2}\sigma(x)\phi^2(x),$$

onde $\sigma(x)$ representa o campo do material da fronteira. Escolhas adequadas para o campo $\sigma(x)$ permitem modelar as fronteiras. Assim, fronteiras que podem ser consideradas como planos em 3+1 dimensões ou pontos em 1+1 dimensões são descritas por funções delta de Dirac. Dizemos que nesses casos estamos no limite nítido. Nos casos em que os potenciais são funções delta de Dirac, a força de Casimir é em geral determinada empregando-se o método do tensor energia-momento, calculado através das funções de Green. Essas funções de Green podem ser obtidas de uma forma elegante, fazendo uso das propriedades das funções delta de Dirac [9].

O objetivo principal deste trabalho não é reobter a força de Casimir entre fronteiras descritas por potenciais delta de Dirac, utilizando o método baseado no tensor energia-momento. Embora esse resultado já exista na literatura [10], em nosso trabalho, apresentaremos um cálculo detalhado das funções de Green relevantes para o problema.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 calculamos a força de Casimir devido a campos escalares entre fronteiras representadas por duas funções delta de Dirac. A subseção 2.1 é dedicada ao cálculo explícito das funções de Green. Na seção 3 apresentamos nossas considerações finais. Ainda há um apêndice, onde mostramos que, no limite em que

³Por *fronteiras* aqui queremos dizer os objetos que limitam regiões do espaço, e não uma interface entre dois meios.

⁴No caso de placas condutoras paralelas, as frequências são dadas por $\omega_k = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n\pi}{a}}^2$, onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e a é a distância entre as placas, perpendiculares ao eixo Z . Portanto, para cada valor de n existe um conjunto contínuo de valores que ω pode assumir.

as constantes de acoplamento tende para infinito, as funções de Green obtidas na seção 2 são as mesmas obtidas para condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Nós escolhemos realizar nossos cálculos em 1+1 dimensões de forma a simplificar a álgebra, e assim tornar mais transparente o método de determinação das funções de Green.

2. Efeito Casimir com potenciais delta de Dirac em 1+1 dimensões

Nesta seção nós determinaremos a força de Casimir para um campo escalar real, em 1+1 dimensões, interagindo com um potencial descrito por funções delta de Dirac nas posições $x = 0$ e $x = a$. No limite em que as constantes de acoplamento tendem para infinito (chamado limite forte) a teoria se torna aquela do efeito Casimir original [11].

Nós calculamos a força de Casimir a partir do tensor energia-momento, determinado usando-se funções de Green. As funções de Green serão calculadas a partir da função de Green livre (sem interação), e é muito conveniente quando o potencial é descrito por funções delta de Dirac.

A densidade lagrangiana a ser considerada é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad (2)$$

onde

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2(x), \quad (3)$$

e o termo de interação é dado por

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2}\lambda\delta(x)\phi^2(x) - \frac{1}{2}\lambda'\delta(x-a)\phi^2(x), \quad (4)$$

onde os coeficientes das funções delta de Dirac, λ e λ' , têm dimensão de massa.

A energia de Casimir será obtida a partir das funções de Green,

$$G(t, x; t', x') = i \langle T\phi(t, x)\phi(t', x') \rangle, \quad (5)$$

onde sua transformada de Fourier da parte temporal é dada por

$$G(t, x; t', x') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} g(x, x'; \omega). \quad (6)$$

A função de Green reduzida em (6) deve satisfazer a seguinte equação não-homogênea de Klein-Gordon

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 + \lambda\delta(x) + \lambda'\delta(x-a) \right] g(x, x') = \delta(x-x'), \quad (7)$$

onde $\kappa^2 = \mu^2 - \omega^2$ é uma constante.⁵

⁵Nós omitimos o ω de $g(x, x'; \omega)$ para simplificar a notação.

2.1. Determinação das funções de Green

Para resolvermos a Eq. (7), definimos o operador \hat{H}_0 como

$$\hat{H}_0 := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2. \quad (8)$$

A função de Green $g_0(x, x')$ associada ao operador \hat{H}_0 ,

$$\hat{H}_0 g_0(x, x') = \delta(x-x'), \quad (9)$$

é bem conhecida e facilmente determinada [9].

Fazendo \hat{H}_0^{-1} agir à esquerda na Eq. (9), temos

$$\hat{H}_0^{-1}\delta(x-x') = g_0(x, x'). \quad (10)$$

Substituindo a definição (8) na equação para a função de Green reduzida (7), obtemos

$$g(x, x') = g_0(x, x') - \lambda\hat{H}_0^{-1}\delta(x)g(x, x') - \lambda'\hat{H}_0^{-1}\delta(x-a)g(x, x'). \quad (11)$$

Usando a Eq. (10), o segundo termo do lado direito da Eq. (11) pode ser escrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} &\lambda\hat{H}_0^{-1}\delta(x)g(x, x') = \\ &\lambda \int \hat{H}_0^{-1}\delta(x-z)\delta(z)g(z, x')dz = \\ &\lambda g_0(x, 0)g(0, x'). \end{aligned} \quad (12)$$

De forma semelhante, o último termo pode ser escrito como

$$\lambda'\hat{H}_0^{-1}\delta(x-a)g(x, x') = \lambda'g_0(x, a)g(a, x'). \quad (13)$$

Substituindo as Eqs. (12) e (13) em (11) obtemos uma nova expressão para a função de Green reduzida,

$$g(x, x') = g_0(x, x') - \lambda g_0(x, 0)g(0, x') - \lambda'g_0(x, a)g(a, x'). \quad (14)$$

Agora avaliando a Eq. (14) para os casos em que $x = 0$ e $x = a$, temos

$$g(0, x') = \frac{g_0(0, x') - \lambda'g_0(0, a)g(a, x')}{1 + \lambda g_0(0, 0)}, \quad (15)$$

$$g(a, x') = \frac{g_0(a, x') - \lambda g_0(a, 0)g(0, x')}{1 + \lambda'g_0(a, a)}. \quad (16)$$

Usando a Eq. (16) para eliminarmos $g(a, x')$ na Eq. (15), temos

$$g(0, x') = \frac{g_0(0, x') [1 + \lambda' g_0(a, a)] - \lambda' g_0(0, a) g_0(a, x')}{[1 + \lambda g_0(0, 0)] [1 + \lambda' g_0(a, a)] - \lambda' \lambda g_0(0, a) g_0(a, 0)}. \quad (17)$$

De forma análoga, usamos (15) para eliminar $g(0, x')$ na Eq. (16),

$$g(a, x') = \frac{g_0(a, x') [1 + \lambda g_0(0, 0)] - \lambda g_0(a, 0) g_0(0, x')}{[1 + \lambda g_0(0, 0)] [1 + \lambda' g_0(a, a)] - \lambda' \lambda g_0(0, a) g_0(a, 0)}. \quad (18)$$

Queremos, agora, encontrar os valores de $g_0(0, 0)$, $g_0(a, a)$, $g_0(0, a)$ e $g_0(a, 0)$. Para isso devemos resolver a Eq. (9),

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} g_0(x, x') + \kappa^2 g_0(x, x') = 0, \quad (19)$$

cujas soluções são

$$g_0(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|} = \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa(x'-x)}, & x < x' \\ \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa(x-x')}, & x > x' \end{cases}. \quad (20)$$

A partir da Eq. (20), podemos obter os valores de $g_0(0, 0)$, $g_0(a, a)$, $g_0(0, a)$ e $g_0(a, 0)$

$$\begin{aligned} g_0(0, 0) &= \frac{1}{2\kappa}, & g_0(a, a) &= \frac{1}{2\kappa}, \\ g_0(0, a) &= \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa a}, & g_0(a, 0) &= \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa a}. \end{aligned} \quad (21)$$

Substituindo os valores acima nas Eqs. (17) e (18) obtemos uma expressão para a função de Green reduzida nos pontos $x = 0$ e $x = a$

$$g(0, x') = \frac{g_0(0, x') \left[1 + \lambda' \frac{1}{2\kappa}\right] - \lambda' \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa a} g_0(a, x')}{\Delta e^{-2\kappa a}}, \quad (22)$$

$$g(a, x') = \frac{g_0(a, x') \left[1 + \lambda \frac{1}{2\kappa}\right] - \lambda \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa a} g_0(0, x')}{\Delta e^{-2\kappa a}}, \quad (23)$$

onde

$$\Delta = \left[1 + \frac{\lambda}{2\kappa}\right] \left[1 + \frac{\lambda'}{2\kappa}\right] e^{2\kappa a} - \frac{\lambda\lambda'}{(2\kappa)^2}. \quad (24)$$

Para encontrarmos os valores de $g_0(0, x')$, $g_0(x, 0)$, $g_0(a, x')$ e $g_0(x, a)$, devemos ser cuidadosos e analisarmos a solução (20) nas três regiões: $x, x' < 0$; $0 < x, x' < a$ e $a < x, x'$.

a) Para a região $x, x' < 0$, obtemos os valores:

$$g_0(0, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa x'} \quad x > x', \quad (25)$$

$$g_0(x, 0) = \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa x} \quad x < x', \quad (26)$$

$$g_0(a, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa(a-x')} \quad x > x', \quad (27)$$

$$g_0(x, a) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa(a-x)} \quad x < x'. \quad (28)$$

Substituindo os valores acima nas Eqs. (22) e (23), obtemos uma expressão para a função de Green reduzida nos pontos $x = 0$ e $x = a$

$$g(0, x') = \frac{e^{\kappa x'}}{2\kappa\Delta} \left[\left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa}\right) e^{2\kappa a} - \frac{\lambda'}{2\kappa} \right], \quad (29)$$

$$g(a, x') = \frac{e^{\kappa(x'+a)}}{2\kappa\Delta} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa}\right) - \frac{\lambda}{2\kappa} \right]. \quad (30)$$

Dos resultados anteriores podemos obter uma expressão explícita para a função de Green reduzida (14) na região $x, x' < 0$, dada por

$$\begin{aligned} g(x, x') &= \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|} - \frac{1}{2\kappa\Delta} e^{\kappa(x+x')} \times \\ &\times \left\{ \frac{\lambda'}{2\kappa} \left(1 - \frac{\lambda}{2\kappa}\right) + \frac{\lambda}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa}\right) e^{2\kappa a} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

b) Para a região $0 < x, x' < a$, obtemos os seguintes valores

$$g_0(0, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa x'} \quad x < x', \quad (32)$$

$$g_0(x, 0) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa x} \quad x > x', \quad (33)$$

$$g_0(a, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa(a-x')} \quad x > x', \quad (34)$$

$$g_0(x, a) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa(a-x)} \quad x < x'. \quad (35)$$

Substituindo novamente os valores acima nas Eqs. (22) e (23), obtemos outra expressão para a função de Green reduzida nos pontos $x = 0$ e $x = a$

$$g(0, x') = \frac{1}{2\kappa\Delta} \left[\left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right) e^{\kappa(2a-x')} - \frac{\lambda' e^{\kappa x'}}{2\kappa} \right], \quad (36)$$

$$g(a, x') = \frac{1}{2\kappa\Delta} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) e^{\kappa(a+x')} - \frac{\lambda}{2\kappa} e^{\kappa(a-x')} \right]. \quad (37)$$

Dos resultados anteriores, podemos obter uma expressão explícita para a função de Green reduzida (14) na região $0 < x, x' < a$, dada por

$$g(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|} + \frac{1}{2\kappa\Delta} \times \left\{ \frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa)^2} \cosh \kappa|x-x'| - \frac{\lambda'}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) e^{\kappa(x+x')} \right\} - \frac{1}{2\kappa\Delta} \frac{\lambda}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right) e^{2\kappa a} e^{-\kappa(x+x')}. \quad (38)$$

c) Para a região $a < x, x'$, obtemos os seguintes valores

$$g_0(0, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa x'} \quad x < x', \quad (39)$$

$$g_0(x, 0) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa x} \quad x > x', \quad (40)$$

$$g_0(a, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa(x'-a)} \quad x < x', \quad (41)$$

$$g_0(x, a) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa(x-a)} \quad x > x'. \quad (42)$$

Como nos casos anteriores, substituindo os valores acima nas Eqs. (22) e (23), obtemos mais outra expressão para a função de Green reduzida nos pontos $x = 0$ e $x = a$

$$g(0, x') = \frac{e^{\kappa(2a-x')}}{2\kappa\Delta} \left[\left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right) - \frac{\lambda'}{2\kappa} \right], \quad (43)$$

$$g(a, x') = \frac{e^{2\kappa a}}{2\kappa\Delta} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) e^{-\kappa(x'-a)} - \frac{\lambda}{2\kappa} e^{-\kappa(x'+a)} \right]. \quad (44)$$

Por fim, dos resultados anteriores, podemos obter uma expressão explícita para a função de Green reduzida (14) na região $a < x, x'$, dada por

$$g(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|} - \frac{1}{2\kappa\Delta} e^{-\kappa(x+x'-2a)} \times \left\{ \frac{\lambda'}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) e^{2\kappa} + \frac{\lambda}{2\kappa} \left(1 - \frac{\lambda'}{2\kappa} \right) \right\}. \quad (45)$$

Desta maneira, calculamos as expressões para a função de Green reduzida nas três regiões.

Podemos observar que, no limite de acoplamento forte, isto é, para $\lambda, \lambda' \rightarrow \infty$ (veja Apêndice), restabelecemos os resultados já conhecidos na literatura [11]. Por exemplo, para a região $0 < x, x' < a$, temos

$$g(x, x') \xrightarrow{\lambda, \lambda' \rightarrow \infty} - \frac{\sinh \kappa x < \sinh \kappa(x > - a)}{\kappa \sinh \kappa a}. \quad (46)$$

Evidentemente, como esperávamos, esta função de Green reduzida (46) é nula em $x = 0$ e em $x = a$.

2.2. Força de Casimir

A determinação da função de Green nos permite calcular a força em uma das fronteiras (em um dos pontos da função- δ) fazendo uso do valor esperado no vácuo do tensor energia momento

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \lim_{t, x \rightarrow t', x'} \left[\left(\partial^\mu \partial^{\nu'} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\lambda \partial'_\lambda \right) \times \frac{1}{i} G(t, x; t', x') \right]. \quad (47)$$

Assim,

$$\langle T^{00} \rangle = \langle T_{xx} \rangle = \lim_{t, x \rightarrow t', x'} \left[\frac{1}{2i} \left(\partial_0 \partial'_0 + \partial_x \partial'_x \right) G(t, x; t', x') \right]. \quad (48)$$

Definindo o tensor energia-momento reduzido como.

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle := \int \frac{d\omega}{2\pi} t^{\mu\nu}, \quad (49)$$

teremos

$$t_{xx} = \lim_{x \rightarrow x'} \left[\frac{1}{2i} (\omega^2 + \partial_x \partial_{x'}) g(x, x'; \omega) \right]. \quad (50)$$

Note que fizemos $t = t'$.

Para o caso em que a função de Green reduzida encontra-se na região $0 < x, x' < a$, temos

$$\omega^2 g(x, x')|_{x=x'} = \frac{\omega^2}{2\kappa} + \frac{\omega^2}{2\kappa\Delta} \times \left[\frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa)^2} - \frac{\lambda}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right) e^{-2\kappa(x-a)} - \frac{\lambda'}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) e^{2\kappa x} \right], \quad (51)$$

e, além disso, temos

$$\partial_x \partial'_x g(x, x')|_{x=x'} = -\frac{\kappa^2}{2\kappa} - \frac{\kappa^2}{2\kappa\Delta} \left[\frac{2\lambda\lambda'}{(2\kappa)^2} + \frac{\lambda}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right) e^{-2\kappa(x-a)} + \frac{\lambda'}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) e^{2\kappa x} \right]. \quad (52)$$

Substituindo (51) e (52) na Eq. (50), obtemos

$$t_{xx} = \frac{(\omega^2 - \kappa^2)}{4i\kappa\Delta} \left[1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \quad 1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right] e^{2\kappa a} + \frac{\lambda\lambda'}{(2\kappa)^2} \left] - \frac{\omega^2 + \kappa^2}{4i\kappa\Delta} \left[\frac{\lambda}{2\kappa} \quad 1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right] e^{-2\kappa(x-a)} + \frac{\lambda'}{2\kappa} \quad 1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \quad e^{2\kappa x} \right]. \quad (53)$$

Finalmente, lembrando que $\kappa^2 = \mu^2 - \omega^2$, temos:

$$t_{xx} = \frac{(2\omega^2 - \mu^2)}{4i\kappa\Delta} \left[1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \quad 1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right] e^{2\kappa a} + \frac{\lambda\lambda'}{(2\kappa)^2} \left] - \frac{\mu^2}{4i\kappa\Delta} \left[\frac{\lambda}{2\kappa} \quad 1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right] e^{-2\kappa(x-a)} + \frac{\lambda'}{2\kappa} \quad 1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \quad e^{2\kappa x} \right]. \quad (54)$$

Tomando agora o limite de massa nula, $\mu = 0$, a relação (53) fica

$$t_{xx} = \frac{-\kappa}{2i\Delta} \left[1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \quad 1 + \frac{\lambda'}{2\kappa} \right] e^{2\kappa a} + \frac{\lambda\lambda'}{(2\kappa)^2} \left] = \frac{-\kappa}{2i} \left[\frac{\frac{2\kappa}{\lambda} + 1}{\frac{2\kappa}{\lambda} + 1} \quad \frac{\frac{2\kappa}{\lambda'} + 1}{\frac{2\kappa}{\lambda'} + 1} \quad \frac{e^{2\kappa a} + 1}{e^{2\kappa a} - 1} \right] \quad (55)$$

Assim a componente t_{xx} do tensor energia-momento reduzido no limite à esquerda do ponto $x = a$ é

$$t_{xx}|_{x=a^-} = -\frac{\kappa}{2i} \left\{ 1 + 2 \quad \frac{2\kappa}{\lambda} + 1 \quad \frac{2\kappa}{\lambda'} + 1 \quad e^{2\kappa a} - 1 \quad \right\}^{-1}. \quad (56)$$

Agora devemos subtrair o tensor energia-momento no limite à direita do ponto $x = a$. Este é obtido substituindo o resultado (45) na Eq. (50). Portanto, obtemos

$$t_{xx} = \frac{1}{4i\kappa} \left[\mu^2 - 2\kappa^2 - \frac{\mu^2}{\Delta} e^{-2\kappa(x-a)} \left\{ \frac{\lambda}{2\kappa} \left(1 - \frac{\lambda'}{2\kappa} \right) + \frac{\lambda'}{2\kappa} \left(1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) e^{2\kappa a} \right\} \right]. \quad (57)$$

Fazendo $\mu = 0$ e tomando o limite $x \rightarrow a$ pela direita, temos

$$t_{xx}|_{x=a^+} = -\frac{\kappa}{2i}. \quad (58)$$

Note que (58) justamente cancela o primeiro termo de (56). A força no ponto $x = a$ devido às flutuações quânticas do campo escalar é dada por

$$F = \langle T_{xx} \rangle|_{x=a^-} - \langle T_{xx} \rangle|_{x=a^+} \\ = -\frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty dy y \frac{1}{\left(\frac{y}{\lambda a} + 1\right)\left(\frac{y}{\lambda' a} + 1\right)e^y - 1}, \quad (59)$$

onde fizemos $y = 2\kappa a$.

No limite $\lambda, \lambda' \rightarrow \infty$, (61) se reduz ao conhecido resultado de Lüscher [13, 14], isto é,

$$F = -\frac{\pi}{24a^2}. \quad (60)$$

Nós podemos eliminar a dependência de a (a distância entre as placas) na integral da Eq. (59), fazendo $\lambda = \frac{\alpha}{a}$ e $\lambda' = \frac{\alpha'}{a}$. Assim,

$$F = -\frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty dy y \frac{1}{\left(\frac{y}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{y}{\alpha'} + 1\right)e^y - 1}. \quad (61)$$

A dependência da distância entre as placas é completamente eliminada multiplicando-se ambos os lados da Eq. (61) por a^2 . Veja o gráfico para $\alpha = \alpha'$.

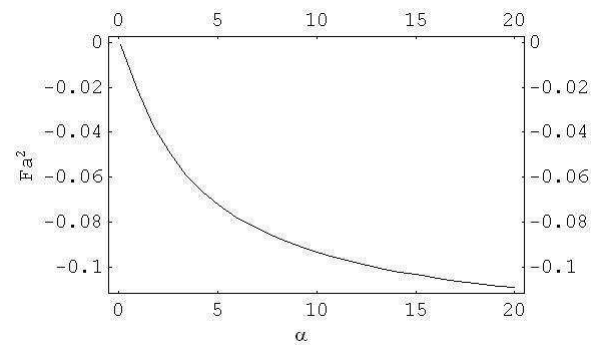


Figura 1 - Gráfico de $F a^2 \times \alpha$.

Note que a força de Casimir é sempre negativa, portanto de atração entre as placas, para quaisquer valores positivos de α e α' (α e $\alpha' > 0$). No caso em que $\alpha = \alpha' = 0$, a integral (61) tem uma divergência logarítmica, como pode ser visto expandindo-se a Eq. (61) em potências de α . Isto já era esper-

ado, pois reflete a divergência infravermelha existente no cálculo dos diagramas de Feynman da teoria de um campo escalar de massa nula em 1+1 dimensões. É claro que se mantivéssemos a massa diferente de zero e tomássemos o limite $\alpha = \alpha' \rightarrow 0$, a força de Casimir se anulava, pois não existiria interação entre os materiais das fronteiras e as flutuações do campo.

No caso simples de massa nula, o cálculo da densidade de energia é idêntico, devido a que $t_{xx} = t^{00}$ (Eq. (54) com $\mu = 0$). A densidade de energia renormalizada é obtida pela subtração da parte independente de a que é a densidade de energia se o potencial não está presente.⁶ É fácil vermos que, como esperavamos, $F = -\frac{\partial E}{\partial a}$, onde E é a energia total.

3. Considerações finais

A crescente melhoria nas medidas experimentais do efeito Casimir tem levado à obtenção de altas precisões. Isto, aliado ao também crescente desenvolvimento dos micro e nano-dispositivos, obriga um tratamento mais realista do efeito Casimir. As previsões teóricas obtidas na abordagem tradicional de se trocar "ab initio" as interações das flutuações dos campos com os materiais de que são feitas as fronteiras por condições de contorno, já não estão de acordo com os experimentos. Portanto, uma abordagem mais realista e rigorosa é necessária.

Fronteiras que podem ser consideradas superfícies são representadas por funções delta de Dirac. O cálculo das funções de Green envolvidas nestes casos não, ou dificilmente, é encontrado na literatura. A demonstração explícita e detalhada de como obter tais funções de Green são de grande interesse, não só àqueles que estudam o efeito Casimir, mas sim também a todos cujos trabalhos envolvam equações diferenciais de segunda ordem que além da função delta ordinária, $\delta(x-x)$, tenham duas outras, $\delta(x)$ e $\delta(x-a)$.

Nesse trabalho, consideramos um campo escalar em

1+1 dimensões na presença de duas fronteiras parcialmente transparentes, descritas por potenciais delta de Dirac, e usando o tensor energia-momento, calculamos detalhadamente a força de Casimir entre as fronteiras.

Sobre o resultado da força de Casimir, é interessante fazermos alguns observações:

i) Embora tomarmos a massa nula facilite em muito os cálculos, isto torna a força (61) divergente para $\alpha = \alpha' = 0$ ou $\lambda = \lambda' = 0$. Isto é uma consequência da divergência infravermelha existente em uma teoria de campo escalar de massa nula em 1+1 dimensões (tomar $\alpha = \alpha' = 0$ ou $\lambda = \lambda' = 0$ significa eliminar a interação entre o campo e as fronteiras).

ii) Por fim, se mantivéssemos a massa diferente de zero para evitar o problema da divergência infravermelha e, então, tomássemos o limite $\lambda = \lambda' \rightarrow 0$ ou $\alpha = \alpha' \rightarrow 0$, a força de Casimir se anulava, refletindo o fato que nesse limite as interações são eliminadas e a teoria seria aquela de um campo em um espaço livre.

É claro que, embora o objetivo final fosse a determinação da função de Green para o cálculo da força de Casimir, o trabalho serve como referência a qualquer situação que envolva equações diferenciais com funções delta de Dirac.

Agradecimento

Os autores agradecem ao CNPq e à FAPES pelo apoio financeiro.

Apêndice

Neste apêndice é demonstrada a relação

$$g(x, x') \xrightarrow{\lambda, \lambda' \rightarrow \infty} - \frac{\sinh \kappa x < \sinh \kappa (x > - a)}{\kappa \sinh \kappa a}.$$

A função de Green (38), na região $0 < x, x' < a$, pode ser expressa da seguinte forma

$$g(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|} + \frac{\lambda\lambda'}{2\kappa\Delta} \left\{ \frac{2}{(2\kappa a)^2} \cosh \kappa|x-x'| - \frac{1}{2\kappa a} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\kappa a} \right) e^{\kappa(x+x')} \right\} - \frac{\lambda\lambda'}{2\kappa\Delta} \frac{1}{2\kappa a} \left(\frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{2\kappa a} \right) e^{2\kappa a} e^{-\kappa(x+x')}, \tag{62}$$

onde

$$\Delta = \lambda\lambda' \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\kappa a} \right) \left(\frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{2\kappa a} \right) e^{2\kappa a} - \frac{1}{(2\kappa a)^2} \right]. \tag{63}$$

Substituindo (63) na função de Green (62) e tomando o limite quando $\lambda, \lambda' \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{\lambda, \lambda' \rightarrow \infty} g(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|} + \frac{1}{2\kappa(e^{2\kappa a}-1)} \left\{ 2 \cosh \kappa|x-x'| - e^{\kappa(x+x')} - e^{2\kappa a} e^{-\kappa(x+x')} \right\}, \tag{64}$$

⁶Este resultado difere daquele encontrado nas Refs. [15, 16, 17]. A origem dessa diferença está na existência da contribuição de um termo de superfície, não considerado em nossos cálculos. Para mais detalhes veja a Ref. [18].

ou

$$\lim_{\lambda, \lambda' \rightarrow \infty} g(x, x') = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|} + \frac{1}{2\kappa(e^{2\kappa a}-1)} \left\{ e^{\kappa|x-x'|} + e^{-\kappa|x-x'|} - e^{\kappa(x+x')} - e^{2\kappa a} e^{-\kappa(x+x')} \right\}. \quad (65)$$

A expressão acima, após algumas manipulações, toma a forma

$$\lim_{\lambda, \lambda' \rightarrow \infty} g(x, x') = \frac{1}{2\kappa(e^{2\kappa a}-1)} \left\{ e^{\kappa(x+x')} - e^{\kappa|x-x'|} \right\} \left\{ e^{2\kappa a} \frac{e^{-\kappa|x-x'|}}{e^{\kappa(x+x')}} - 1 \right\}. \quad (66)$$

Agora, se $x > x'$, a expressão acima fica

$$\lim_{\lambda, \lambda' \rightarrow \infty} g(x, x') = -\frac{\sinh \kappa x < \sinh \kappa(x > - a)}{\kappa \sinh \kappa a}, \quad (67)$$

conforme queríamos demonstrar.

Referências

- [1] H.B.G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. **51**, 793 (1948).
- [2] T.H. Boyer, Ann. Phys. **56**, 474 (1970); I.J.R. Aitchison, Contemp. Phys. **26**, 333 (1985); G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 89 (1986); M. Bordarg, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, Phys. Rept. **353**, 1 (2001); K.A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy* (World Scientific, River Edge, 2001); C. Farina, Braz. J. Phys. **36**, 1137 (2006); G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko, [arXiv:quant-ph/0609145]; V.M. Mostepanenko, [arXiv:quant-ph/0702061].
- [3] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina e A.C. Tort, Revista Brasileira de Ensino de Física **22**, 122 (2000); J.J. Passos Sobrinho e A.C. Tort; Revista Brasileira de Ensino de Física **23**, 401 (2001).
- [4] M.J. Sparnaay, Physica **24**, 751 (1958).
- [5] S.K. Lamoureux, Phys. Rev. Lett. **28**, 5 (1997).
- [6] U. Mohideen and A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 21 (1998).
- [7] G.L. Klimchitskaya, A. Roy, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, Phys. Rev. A **60**, 3487 (1999); B.W. Harris, F. Chen and U. Mohideen, Phys. Rev. A **62**, 05109 (2000); G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio and G. Ruoso, Phys. Rev. Lett. **88**, 041804 (2002); R.S. Decca, E. Fischbach, G.L. Klimchitskaya, D.E. Krause, D. López and V.M. Mostepanenko, Phys. Rev. D **68**, 116003 (2003); Ann. Phys. (N.Y.) **318**, 37 (2005); Int. J. Mod. Phys. A **28**, 2205 (2005); Phys. Rev. D **75**, 077101 (2007); Eur. Phys. J. C **51**, 963 (2007); F. Chen, U. Mohideen, G.L. Klimchitskaya and V.M. Mostepanenko Phys. Rev. Lett. **88**, 101801 (2002); Phys. Rev. A **66**, 032113 (2002); Phys. Rev. A **69**, 022117 (2004); Phys. Rev. A **72**, 020101 (2005); Phys. Rev. A **74**, 022103 (2006); Phys. Rev. Lett. **97**, 170402 (2006); Opt. Express **15**, 4823 (2007); Phys. Rev. B **76**, 035338 (2007).
- [8] E.M. Lifshitz, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 94 (1956) (Tradução inglesa: Soviet. Phys. JETP **2**, 73 (1956)).
- [9] R.M. Cavalcanti, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 336 (1999).
- [10] K.A. Milton, J. Phys. **A37**, 209 (2004).
- [11] K.A. Milton, Phys. Rev. **D68**, 065020 (2003).
- [12] M. Bordag, D. Hennig and D. Robaschik, J. Phys. A: Math. Gen **25**, 4483 (1992).
- [13] M. Lüscher, K. Symanzik and P. Weisz, Nucl. Phys. B **173**, 365 (1980).
- [14] M. Lüscher, Nucl. Phys. B **180**, 317 (1981).
- [15] N. Graham, R.L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, M. Scandurra and H. Weigel, Nucl. Phys. B **645**, 49 (2002).
- [16] N. Graham, R.L. Jaffe, V. Khemani, M. Quandt, M. Scandurra and H. Weigel, Phys. Lett. B **572**, 196 (2003).
- [17] R.L. Jaffe, AIP Conf. Proc. **687**, 3 (2003).
- [18] K.A. Milton, J. Phys. **A37**, 6391 (2004).