Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 46, e20240120 (2024)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0120

Artigos Gerais

Fluxo de Campo Elétrico – Duas abordagens

Electric Flux – Two Approaches

Gildo Cavalcanti[1], Luiz A. Silva[*1]

[1]Universidade Federal Fluminense, 24210-240, Niterói, RJ, Brasil.

Recebido em 05 de abril de 2024. Revisado em 14 de abril de 2024. Aceito em 14 de abril de 2024.

Neste trabalho discutimos a solução para o cálculo do fluxo de campo elétrico produzido por uma carga puntiforme através de uma superfície plana baseado na aplicação direta da definição de fluxo e outra através de uma “extensão” da lei de Gauss. A solução rígida feita a partir da definição de fluxo de campo elétrico rendeu um cálculo trabalhoso, e produziu o mesmo resultado que pode ser obtido a partir da simplificadora aplicação da lei de Gauss, que produz uma solução quase imediata para o problema estudado. Neste trabalho são discutidas também abordagens didáticas distintas para a apresentação da lei de Gauss e qual delas melhor conferiria ao aluno um grau de maturidade maior sobre o tema e uma visão ampliada desta lei. A discussão envolve a questão do ensino-aprendizagem a partir da aceitação-repetição versus demonstração-indução e suas consequências.
Palavras-chave: Ensino de Física, eletromagnetismo, Lei de Gauss.

In this work, we discuss the solution for calculating the electric flux produced by a point charge through a flat surface, based on the direct application of the flux definition and another approach using an ”extension” of Gauss’s law. The rigorous solution derived from the definition of electric flux yielded a laborious calculation and produced the same result that can be obtained from the simplified application of Gauss’s law, which provides an almost immediate solution to the problem. Additionally, this work discusses different didactic approaches for presenting Gauss’s law, with the objective to determine which one would provide a higher degree of maturity regarding the topic and an expanded understanding of this law to students. The discussion involves the issue of teaching and learning through acceptance-repetition versus demonstration-induction, and their consequences.
Keywords: Physics teaching, electromagnetism, Gauss’s law.

1. Introdução

O presente trabalho apresenta duas abordagens distintas para a solução de um problema explorado no curso de graduação como objeto de aprendizagem.

Geralmente há mais de um caminho para se resolver um dado problema, e cada abordagem está claramente ligada ao grau de maturidade que os estudantes conseguiram atingir após o processo de aprendizagem de um determinado conteúdo. Existem diversos problemas propostos aos alunos que podem ter uma solução facilitada, e muito, quando ao invés de partir diretamente em busca da solução de forma autômata, se busca conexões com outros temas relacionados, colocando o conteúdo relacionado em um ponto de vista mais amplo de modo a explorar, por exemplo, leis de conservação, simetrias, rotação de eixos, escolha adequada de sistema de coordenadas etc. Como exemplos podemos citar:

1. Cinemática de um corpo deslizando sem atrito em um tobogã – É muito corriqueira a proposição de um problema em que um corpo de massa m é colocado no alto de um tobogã e se pedir a velocidade deste corpo ao final do trajeto sinuoso, desconsiderando-se o atrito. Mesmo em um campo gravitacional constante, a resultante das forças sobre o corpo muda o tempo todo devido ao fato de que a reação normal que o tobogã exerce sobre o corpo não é constante nem em módulo, nem em direção. A reação normal depende do ponto onde o corpo está sobre a trajetória imposta pelo tobogã, com direção sempre normal à reta tangente à trajetória no ponto onde o corpo está, portanto, sua reta suporte muda sua inclinação com a direção vertical da gravidade, de acordo com as mudanças impostas pela trajetória curvilínea do tobogã. Mesmo se tendo uma equação com o detalhamento geométrico para a trajetória do tobogã, ou seja, equação de sua trajetória, seria muito difícil resolver o problema usando diretamente a segunda lei de Newton neste caso. Por outro lado, a solução usando o princípio de conservação de energia é quase imediata, sendo usada sistematicamente nos livros didáticos como estratégia de solução para o referido problema. Em [1], este problema é solucionado através do princípio de conservação de energia.
2. Rotor rígido em Mecânica quântica – No estudo de física molecular, as equações são ligadas ao princípio de conservação de energia. São três as

[*]Endereço de correspondência: luizalberto@coppe.ufrj.br

energias a serem consideradas ligadas aos modos: vibracional, rotacional e translacional. A rotação de uma molécula diatômica em torno de seu centro de massa pode ser descrita através de um par de coordenadas esféricas, θ e ϕ, exatamente como no caso do rotor rígido. E possível mostrar que a equação de Schrodinger [2] para a rotação molecular tem a mesma forma que a do rotor rígido e, portanto, as soluções são as mesmas. Em [2], o autor tem uma aplicação para o problema dado em física molecular.

3. Lançamento oblíquo em campo gravitacional constante – O primeiro passo para se estudar este problema é escolher adequadamente o sistema de referência. O segundo ponto sagaz é usar o princípio de independência de movimento de Galileu Galilei [3]. Isto está ligado ao fato de as equações do movimento para as duas coordenadas serem desacopladas. Em [1], o autor demonstra a independência do movimento de Galileu e sua aplicação em um lançamento oblíquo.
4. Método da carga imagem no problema de uma carga e um plano de potencial nulo – Outro problema instigante é o de se calcular o potencial elétrico gerado por uma carga puntiforme quando esta é colocada em frente a um plano condutor infinito com potencial nulo. A primeira linha de raciocínio diria para se calcular o potencial da carga puntiforme e somar, pelo princípio de superposição linear, ao potencial da distribuição de carga que seria induzida sobre o referido plano condutor. Mas como seria mesmo a distribuição de carga induzida? Ao invés de ir por esse caminho árduo, trocar o plano infinito por outra carga puntiforme −q, colocada do lado oposto, e equidistante ao da carga q, facilita tremendamente a solução [4].

Todas essas abordagens facilitadoras estão relacionadas a um nível de aprendizado mais profundo do que aquele obtido a partir da informação e mera aceitação. É provável que a orientação fornecida, por meio de aulas e livros didáticos, não tenha sido suficiente para auxiliar na elaboração desses modelos [5].

A inteligência reflete o exercício mental de questionar uma dada informação, interrogando sua faixa de validade, sua aplicabilidade, seu alcance; e sobretudo, de **onde se tirou tal "ideia"?**. Tais questionamentos viabilizam a apropriação do "pleno" conhecimento sobre um dado tema, que significa, em outras palavras, a aprendizagem de um dado conteúdo. "*A criatividade é a inteligência se divertindo*", frase atribuída a Albert Einstein.

Nas seções seguintes apresentamos o enunciado do problema do cálculo do fluxo de campo elétrico da carga puntiforme sobre uma das faces de um cubo, tal como foi encontrado em um livro texto. Em seguida discutimos a resolução do cálculo do fluxo do campo elétrico produzido por uma carga puntiforme q através de uma área quadrada, através de duas estratégias de resolução. Ao final comparamos as duas metodologias de resolução e comentamos duas formas de apresentação para a lei de Gauss [6] e a vinculação destas com o nível de aprendizado atingido.

2. O Problema Específico

No livro Halliday & Resnick [6] tem-se o problema apresentado como o exercício 15 do capítulo 23 com o seguinte enunciado: "Uma partícula de carga +q é colocada no vértice de um cubo gaussiano. Determine o múltiplo de q/ϵ_0 que corresponde ao fluxo do campo elétrico: (a) através de uma das faces do cubo que contêm a partícula e (b) através de uma das outras faces do cubo". O problema que estamos discutindo neste trabalho é o correspondente ao item b. Vamos resolver este problema por meio de duas abordagens. Para isso, vamos relembrar a definição de fluxo.

2.1. Definição de fluxo

O fluxo de um campo vetorial $\vec{F}$ através de uma dada superfície S é uma operação integro-vetorial de interesse em alguns ramos da ciência como física e engenharia e é dado por $\Phi_F = \int_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS}$. Tal operação envolve a integral do produto interno entre o campo vetorial em um dado ponto sobre a superfície S pelo vetor área elementar $\overrightarrow{dS}$ que tem área infinitesimal dS e direção normal à superfície no ponto considerado. A resolução que estamos designando como resolução direta consiste da aplicação da definição de fluxo ao caso em pauta.

O fluxo de campo elétrico sobre uma superfície S é dado por:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} \quad (1)$$

A Figura 1 mostra a situação descrita no problema proposto, com a escolha do sistema de referência que estaremos adotando.

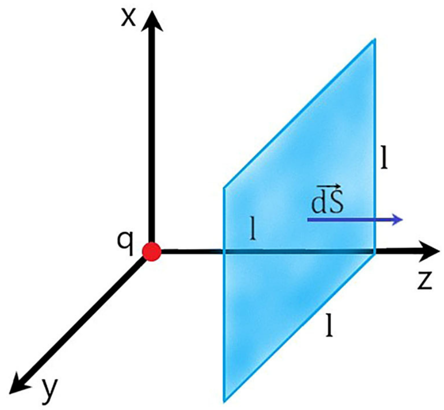

Figura 1: Esquemático do problema. Fonte: Autores.

Na Figura 1 encontram-se a representação da carga q colocada no centro do sistema de referência, do vetor elemento infinitesimal de área $\overrightarrow{dS}$, e do plano quadrado de aresta l. Para o cômputo do fluxo de campo elétrico é necessário estabelecer primeiro qual o campo elétrico. Da lei de Coulomb sabe-se que o campo de uma carga puntiforme é radial, cuja expressão é dada por:

$$\vec{E} = E\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{2}$$

Note que o cálculo do fluxo de campo elétrico não é trivial posto que a orientação relativa entre o campo e o vetor elemento de área não é constante, e além disso o próprio módulo do campo varia à medida que a área de integração é varrida.

2.2. Abordagem por integração direta

A solução através da definição de fluxo, ao que estamos chamando de abordagem direta, requer de início a escolha de um sistema de referências, que por ser arbitrária, pode ser feita de modo a facilitar a resolução, diminuindo o número de projeções do campo elétrico necessário para o cálculo do produto interno. Isto já requer uma maturidade e planejamento prévio. No caso específico a melhor escolha é fazer com que o plano da área em que se calcula o fluxo seja paralelo ao plano XY. Neste caso o vetor elemento infinitesimal de área, $\overrightarrow{dS}$, pode ser reescrito como $dxdy\hat{k}$, onde $\hat{k}$ é o vetor unitário (ou versor) na direção Z. Com essas escolhas, a única projeção do campo elétrico que contribuirá para o fluxo elétrico é a que está orientada na direção Z, e portando basta fazermos o cálculo de:

$$\Phi_E = \iint E_Z dxdy \tag{3}$$

Para isso vamos obter a componente z do campo elétrico fazendo uso das relações entre coordenadas esféricas e coordenadas cartesianas conforme mostrado na Figura 2. Pode-se expressar o versor na direção radial, $\hat{u}_r$, em suas coordenadas cartesianas diretamente da projeção do vetor $\vec{r}$ nos três eixos cartesianos, como segue:

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{\imath} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{\jmath} + \cos(\theta)\hat{k} \tag{4}$$

A componente do campo elétrico na direção Z é dada por $\vec{E}\cdot\hat{k}$ ou como segue:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{z}{r} \tag{5}$$

Na equação (5), usamos que $\cos(\theta)$ pode ser reescrito como $\frac{z}{r} = \frac{l}{r}$.

Logo, a integral do fluxo do campo elétrico pode ser desenvolvida como

$$\int_0^l\int_0^l \frac{ql}{4\pi\epsilon_0}\frac{dxdy}{r^3} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0}\int_0^l\int_0^l \frac{dxdy}{(x^2+y^2+l^2)^{3/2}} \tag{6}$$

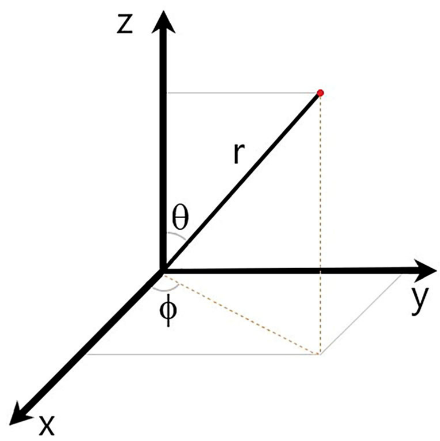

Figura 2: Relações entre coordenadas esféricas e coordenadas cartesianas. Fonte: Autores.

Substituindo (y^2+l^2) por a^2, temos

$$\frac{ql}{4\pi\epsilon_0}\int_0^l dy\int_0^l \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{7}$$

A integral $\int_0^l \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ possui solução tabelada [7] dada por

$$\left.\frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}\right|_{x=0}^{l} = \frac{l}{a^2(l^2+a^2)^{1/2}} \tag{8}$$

Após o cálculo dessa primeira integral, temos

$$\frac{ql^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^l \frac{dy}{(y^2+l^2)(y^2+2l^2)^{1/2}} \tag{9}$$

Para a solução da integral acima também pode ser adotada a substituição de variáveis. Substitui-se (y^2+l^2) por b, portanto

$$\frac{db}{dy} = 2y, \quad dy = \frac{db}{2y} \tag{10}$$

A integral de (9) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\int_{l^2}^{2l^2}\frac{db}{b\sqrt{b-l^2}\sqrt{b+l^2}} = \frac{1}{2}\int_{l^2}^{2l^2}\frac{db}{b\sqrt{b^2-l^4}} \tag{11}$$

Segundo [6], essa integral possui a solução dada abaixo.

$$\int\frac{db}{b\sqrt{b^2-l^4}} = \frac{1}{l^2}arcsec\left(\frac{b}{l^2}\right) \tag{12}$$

Dessa forma, a integral definida pode ser solucionada.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{l^2}arcsec\left(\frac{b}{l^2}\right)\right]\Bigg|_{b=l^2}^{2l^2} = \frac{1}{2l^2}[arcsec(2) - arcsec(1)] = \frac{\pi}{6l^2} \tag{13}$$

Finalmente, o fluxo do campo elétrico sobre a superfície S considerada pode ser dado como

$$\Phi_E = \frac{l^2 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\pi}{6l^2} = \frac{q}{24\epsilon_0} \tag{14}$$

Guardemos, portanto, este resultado para depois compararmos com o resultado de uma abordagem alternativa.

2.3. Abordagem pela lei de Gauss

Podemos avaliar o uso da lei de Gauss para o fluxo "total" de uma carga puntiforme, sobre uma superfície que a envolve totalmente. Como é sabido, o fluxo total do campo elétrico gerado por uma carga puntiforme q, sobre uma superfície que a envolve totalmente, vale q/ϵ_0. Este fluxo é independente da forma da superfície Gaussiana que envolve a carga, podendo ser esta uma superfície esférica centrada na carga, ou um cubo por exemplo. Se construirmos mentalmente uma estrutura de cubos de tal modo a encerrar esta carga, colocada no vértice de cada um destes cubos, sabemos, depois de raciocinar um pouco, que serão necessários 8 cubos, 4 acima e 4 abaixo, para encerrar completamente esta carga. A Figura 3 mostra tal montagem. Passada esta fase, pode-se concluir que por cada um dos cubos, passam 1/8 do fluxo total. Das seis faces de cada cubo, o fluxo nas três que contêm o vértice no qual a carga está colocada é nulo, pois nenhuma das linhas de campo elétrico que emanam da carga atravessam as referidas faces, ou seja, as linhas de $\vec{E}$ estão contidas no plano. Portanto, já que somente três faces contribuem (igualmente) para o fluxo, chega-se à conclusão que cada uma destas faces ativas contribui com 1/24 do fluxo total. O enunciado pede que se calcule o fluxo através de uma das faces ativas deste cubo imaginário e, portanto, cada uma delas contribui para o fluxo com uma parcela de 1/24 de q/ϵ_0, que é o mesmo resultado encontrado na abordagem direta.

Pode-se explorar mais ainda a simetria do problema: se iniciarmos o raciocínio a partir do cubo maior, no qual a carga puntiforme está no centro, tem-se que cada face contribui com 1/6 do fluxo total e, como cada uma destas faces contém quatro faces dos cubos menores, chegamos ao mesmo resultado de 1/24 do fluxo total em cada face dos cubos menores que não contenha a carga em um dos seus vértices.

3. Apresentação da lei de Gauss para Uma Carga Puntiforme

Em geral os livros didáticos, e, seguindo o direcionamento encontrado, os professores também, apresentam a lei de Gauss praticamente como um postulado: **"A lei de Gauss estabelece que ..."**, como encontrado, por exemplo, na referência [8]. Uma vez postulada a lei de Gauss, sua validação se dá, por exemplo, quando esta lei é aplicada ao caso de uma carga puntiforme

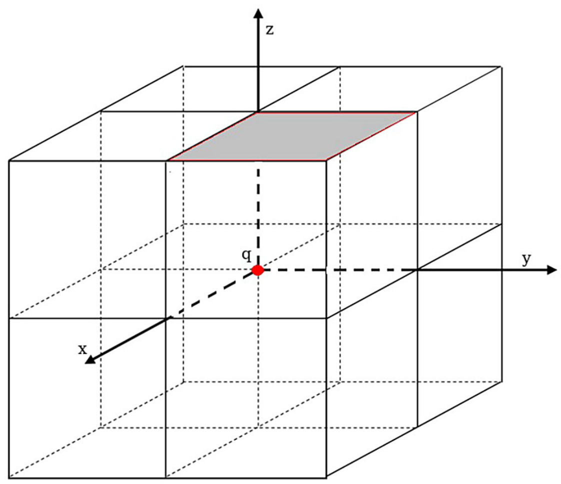

Figura 3: Abordagem alternativa do problema proposto. Fonte: Autores.

envolvida por uma superfície gaussiana que consiste de uma esfera centrada na carga. No caso, a aplicação da lei de Gauss é feita tomando-se como incógnita o próprio campo elétrico, deste só se sabendo que o módulo é constante sobre a superfície gaussiana em questão e que sua direção é radial. No final se conclui que o campo elétrico encontrado é igual ao previsto pela lei de Coulomb. Isto de certa forma denota um pouco de falta de confiança em ambas as leis, que segundo este tipo de abordagem precisa ser confirmado sempre. Uma abordagem construtivista, e alternativa, partiria da lei de Coulomb, tida como certa e indiscutível e da definição do fluxo. Nesta abordagem, a lei de Coulomb é assumida como um axioma inicial e a lei de Gauss é derivada a partir dela, usando a definição de fluxo elétrico. Essa abordagem enfatiza a confiança na lei de Coulomb como ponto de partida e demonstra como a lei de Gauss segue naturalmente a partir dela. A partir daí, se determinaria o fluxo de campo elétrico de uma carga puntiforme. A primeira discussão subsequente seria a da escolha da superfície gaussiana. Depois de alguma argumentação, a escolha de uma esfera centrada na carga, ao invés de um cubo por exemplo, emergiria como a mais simplificadora, posto que neste caso, tanto o módulo do campo elétrico quanto a direção entre os vetores campo elétrico e vetor de área elementar seriam constantes. A partir disto, o fluxo de campo elétrico daria o valor q/ϵ_0. Depois disso, deveriam ser discutidas questões como: 1- Este resultado se manteria para qualquer que fosse a superfície gaussiana? 2- Se a carga não estivesse centrada? 3- E se tivesse uma distribuição discreta de cargas? (começando com a adição de mais uma carga) 4- Ou se fosse em outra forma de distribuição? (como uma linha ou uma superfície carregada) 5- Se colocada uma segunda carga com sinal oposto, o fluxo seria nulo. Isto induz a pensar que a carga descrita na lei de Gauss seria a carga líquida? 6- A lei de Gauss que emerge da discussão é válida para qualquer distribuição, contínua ou discreta?

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0120

Ao considerarmos a escolha da superfície gaussiana, torna-se crucial explorar mais detalhadamente como diferentes opções influenciam o cálculo do fluxo elétrico. A universalidade da escolha da superfície é uma questão fundamental que merece uma análise mais aprofundada. Argumentamos que, ao adotar uma abordagem construtivista, é imperativo entender que o resultado q/ϵ_0 inicialmente obtido não é vinculado a uma única geometria de superfície. Podemos demonstrar que, independentemente da forma escolhida, desde que mantida a carga puntiforme no centro, o resultado do fluxo permanece constante. Ao explorarmos as implicações da carga não centrada, surge a necessidade de examinar como a lei de Gauss se ajusta a essa modificação geométrica. Sob uma abordagem construtivista, encorajamos a consideração de casos nos quais a carga não está no centro da superfície gaussiana escolhida. Através desta análise, busca-se elucidar como variações na posição da carga influenciam a distribuição do campo elétrico e, consequentemente, o fluxo resultante. Além disso, ao estender a discussão para diferentes distribuições de carga, como linhas ou superfícies carregadas, pretendemos proporcionar uma compreensão mais abrangente da aplicabilidade da lei de Gauss em contextos mais complexos. Destacamos a importância de examinar essas variações, não apenas como casos isolados, mas como cenários que enriquecem a compreensão geral da lei de Gauss, reforçando a ideia construtivista de derivar conclusões fundamentadas a partir de diferentes configurações geométricas e distribuições de carga.

Ao final da discussão o professor poderia informar que a lei em pauta é uma das 4 leis fundamentais do eletromagnetismo de Maxwell.

4. Conclusão

Neste trabalho apresentamos e analisamos a solução para questão de qual seria o fluxo através de uma das faces de um cubo que possui uma carga q em um dos seus vértices. Discutimos a solução do referido problema por meio de duas abordagens, uma direta a partir de definições e outra através de uma extensão da lei de Gauss. Discutimos também duas formas didáticas de apresentar a lei de Gauss. A primeira e mais rotineira é feita como postulado e a segunda, através de uma abordagem construtivista.

Estender a lei de Gauss é uma abordagem construtivista valiosa e desafiadora na física. Isso permite que os alunos explorem as fronteiras do conhecimento e desenvolvam uma compreensão mais profunda dos princípios fundamentais do eletromagnetismo. Acreditamos que esta abordagem cria condições cognitivas para que os alunos façam a conexão da lei de Gauss com uma base de conhecimento melhor sedimentada. No entanto, é importante notar que essa é uma tarefa complexa que requer um sólido entendimento das leis fundamentais da física e habilidades avançadas em matemática e experimentação.

Referências

[1] D. Halliday e R. Resnick, *Fundamentos de Física – Mecânica* (LTC, Rio de Janeiro, 1981), v. 1.

[2] D.J. Griffiths, *Mecânica Quântica* (Pearson, Rio de Janeiro, 2011).

[3] H. Moyses Nussenzveig, *Curso de Física Básica – Mecânica* (Editora Edgard Blucher, Rio de Janeiro, 2002), v. 1.

[4] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1998).

[5] M.A. Moreira e I. Krey, Revista Brasileira de Ensino de Física **28**, 353 (2006).

[6] D. Halliday e R. Resnick, *Fundamentos de Física – Eletromagnetismo* (LTC, Rio de Janeiro, 1981), v. 3.

[7] L. Leithold, *O Cálculo com Geometria Analítica* (Editora Harbra, São Paulo, 1994).

[8] D.A. Duarte, *Física 3 (emb5043): Lei de Gauss, 2005*, disponível em: https://diegoduarte.paginas.ufsc.br/files/2020/03/Lei-de-Gauss-.pdf.