

## Artigos Gerais

# Um enfoque didático às equações de Maxwell

(*A pedagogical approach to Maxwell's Equations*)

G.F. Leal Ferreira

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brazil*

Recebido em 4/9/2014; Aceito em 2/2/2015; Publicado em 30/6/2015

Mostra-se como encarar as equações de Maxwell, tanto para fenômenos periódicos, reunindo emissão e o campo de radiação, como para o caso geral, mais interessante, dos aperiódicos, com as equações dependentes do tempo, e, em especial, sobre o significado daquelas independentes do tempo. Comenta-se a diferença do enfoque propiciado pela aproximação de estados quase-permanentes, em que as fontes, cargas e correntes atuais determinam completamente os campos, e o das equações exatas, em que isto, “stricto sensu”, já ocorre.

**Palavras-chave:** equações de Maxwell, estados quase-permanentes, fenômenos periódicos, fenômenos aperiódicos.

It is shown how to regard Maxwell's equations for both periodic, putting together emission and radiation fields, and non-periodic phenomena, discussing both the time dependent equations as well as the role played by the time-independent ones. The difference in approach resulting from the quasi-permanent approximation, in which the sources feed the fields, and that of the exact equations, in which, strictly speaking, that is no longer true, is commented.

**Keywords:** Maxwell's equation, quasi-permanent states, periodic phenomena, aperiodic phenomena.

## 1. Introdução

No ensino do eletromagnetismo, grande parte do tempo é dedicada aos aspectos estáticos, tanto na eletrostática e como na magnetostática: isso permite ao aluno familiarizar-se com os entes, campo elétrico e campo magnético [1] (um bi-vetor na compacta linguagem da álgebra geométrica [2]). Os fenômenos dependentes do tempo aparecem na lei da indução de Faraday, abordando-se então, usualmente, os fenômenos quase-permanentes de indução e mesmo os de carga de condensadores, estes envolvendo correntes 'abertas'. Mas estas abordagens são realizadas na linguagem de circuitos elétricos e fluxos magnéticos e não na de campos. Quando retornamos a estes, verifica-se, como Maxwell fez, que para se obter compatibilidade entre as equações dos campos, e a equação da continuidade (conservação da carga elétrica), deve-se introduzir na equação do rotacional do campo magnético, ao lado das correntes reais, a corrente de deslocamento, alcançando-se assim o sistema completo das equações de Maxwell. Mas neste ponto, não há usualmente a preocupação de se procurar estabelecer o conjunto de equações que cobrem aqueles importantes estados quase-permanentes antes estudados. Relembraremos aqui (ver Seção 5) que nesta aproximação, construída a partir de emenda às equações

estáticas, a corrente de deslocamento envolve o campo eletrostático e não o campo elétrico total [3]. Isto cinge as soluções à região próxima das cargas, omitindo a descrição de emissão de ondas eletromagnéticas. Neste trabalho, trataremos de alguns pontos relativos à apresentação didática das equações de Maxwell. De posse do seu arcabouço completo, a primeira abordagem é feita num caso muito particular, o das ondas eletromagnéticas livres, em que as fontes são ignoradas. Embora cubra o aspecto importante da transmissão, gostaríamos de mostrar que nesse tipo de problema, envolvendo soluções periódicas no tempo, as fontes podem ser mantidas sem onerar de forma significativa o cálculo, permitindo expor, em princípio, não só a transmissão como a criação de ondas eletromagnéticas pelas suas fontes. A nossa análise irá adiante, abordando o caso geral não-periódico — certamente o mais interessante —, onde, seguindo L. Jánossy [4], verificar-se-á na Seção 4 que duas são efetivamente as equações de Maxwell — somente aquelas envolvendo o tempo —, as outras duas sendo apenas equações acessórias, de definição de grandezas. Aí veremos que os campos elétrico e magnético são determinados a partir de seus valores iniciais e da densidade de corrente como fonte e gozam em relação a esta última de uma certa autonomia que viola a estreita correlação entre fontes e campos presu-

mida da conceituação vinda da apresentação inicial da estática. Mas aquela correlação de fato existe na aproximação dos estados quase-permanentes quando cargas e correntes determinam os campos, como será examinado na Seção 5.

## 2. As equações de Maxwell

Tomaremos as equações de Maxwell no CGS gaussiano, com  $c$  a velocidade da luz. Elas são, no vácuo,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \frac{\mathbf{J}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

em que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  são os campos elétrico e magnético,  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ , as densidades de carga e de corrente de condução, todas as grandezas em princípio funções da posição  $\mathbf{x}$  e do tempo  $t$ .

Notemos que se achamos a divergência da Eq. (4), obtemos a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

que não necessita ser considerada como integrante do sistema das equações de Maxwell, mas que desempenhará seu papel na aproximação dos estados quase-permanentes.

## 3. Fenômenos periódicos

No caso de fenômenos periódicos, de frequência angular  $\omega$ , a dependência no tempo é do tipo  $e^{i\omega t}$ , e as Eqs. (1)-(4) tornam-se em

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \frac{\mathbf{J}}{c} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}, \quad (9)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{i\omega}{c} \rho, \quad (10)$$

em que, por economia de símbolos, mantivemos as designações das grandezas embora elas agora só dependam da posição  $\mathbf{x}$ .

Substituindo o valor de  $\mathbf{B}$  em função de  $\mathbf{E}$  pela Eq. (7) e desenvolvendo o termo  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$  na Eq. (9), vem

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c} \left( 4\pi \frac{\mathbf{J}}{c} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{E} \right). \quad (11)$$

Usando agora a equação de Poisson, Eq. (5), e substituindo  $\rho$  em função de  $\mathbf{J}$  na Eq. (18), vem

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{4\pi i}{\omega} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{J} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{J} \right), \quad (12)$$

equação que exhibirá explicitamente as fontes do campo elétrico ao separarmos  $\mathbf{J}$  em uma corrente longitudinal  $\mathbf{J}_L$  e outra transversal  $\mathbf{J}_T$ , tais que  $\nabla \times \mathbf{J}_L = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0$ .

A corrente longitudinal (irrotacional) contribui em ambos os termos entre parênteses no lado direito da Eq. (12), termo temporal e termo espacial, enquanto que a transversal (solenoidal), apenas no termo temporal, dependente de  $\omega$ . Pela Eq. (7),  $\mathbf{B}$  é proporcional ao rotacional de  $\mathbf{E}$ . Logo, se aplicarmos o rotacional a ambos os membros da Eq. (12), obteremos uma relação mais simples — na verdade uma simples equação de onda inhomogênea —, tendo em vista que o rotacional de um gradiente é nulo. Tem-se então

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J}_T, \quad (13)$$

mostrando que as fontes do campo magnético oscilante são exclusivamente as correntes transversais.

No caso de fontes localizadas, como no caso de um fio retilíneo com corrente,  $\mathbf{B}$  tem origem na descontinuidade transversal da corrente, gerando correntes superficiais azimutais na sua superfície. Levado esse caso ao limite do dipolo oscilante, este fato mostra que o campo magnético irradiado pelo dipolo oscilante faz formalmente papel semelhante ao do potencial vetor no tratamento usual, e é também exclusivamente azimutal.

## 4. Equações de Maxwell, fenômenos aperiódicos

Como gerar solução de sistema de equações envolvendo o tempo é construir o futuro, dadas as fontes e condições iniciais adequadas em  $t = 0$  [4], vemos que as equações importantes no sistema da Seção 2 são as Eqs. (2) e (4), envolvendo o tempo, tendo a densidade de corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  como fonte. Mas que papel têm as Eqs. (1) e (3)? Elas são equações acessórias, de definição a Eq. (1), e de condição inicial a Eq. (3). De fato, dados  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0)$ , este satisfazendo a condição  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, 0) = 0$ , a Eq. (1) define a densidade inicial de carga, e as Eqs. (2) e (4) geram  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \Delta t)$  e  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \Delta t)$  no tempo  $\Delta t$ .

Note-se que em  $\Delta t$  e, *ipso facto*, em qualquer estágio de uma integração exata, a Eq. (3) continua sendo satisfeita, da mesma forma que a Eq. (1) [ou alternativamente a Eq. (5), a da continuidade] irá determinando a densidade de carga a cada tempo  $t$ . Resulta desta análise que a densidade de carga joga papel subsidiário, como grandeza derivada, a reboque da integração. Esta conclusão choca-se com a visão usual, segundo a qual os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  derivam diretamente das cargas e

correntes, e que manter-se-á na aproximação dos estados quase-permanentes, que analisaremos na próxima seção.

Concluindo, vê-se que os campos ganham autonomia em relação às fontes atuais, já que não é possível inferi-los diretamente das fontes a partir de um instante inicial: o conhecimento de  $\rho(\mathbf{x}, 0)$  não permite o cálculo de  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)$ . E haverá uma dinâmica mesmo que  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  seja nulo para  $t \geq 0$ , devido ao campo eletromagnético livre, agora abrangido na solução (o que não ocorrerá com as equações aproximadas). Note-se também que poderíamos transformar as duas equações, Eqs. (2) e (4), em uma única, de ordem superior, em termos de um dos campos, porém com perda de visão da mecânica da solução.

## 5. Aproximação de estados quase-permanentes

Na Eletrostática aprendemos a calcular o campo eletrostático  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  e o campo magnetostático solenoidal  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  a partir de suas fontes, cargas e correntes. Com a Lei da Indução, os fenômenos e os campos agora dependem do tempo e adicionamos ao campo elétrico a componente solenoidal,  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ , regidos, esta e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , pelas equações

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{h} &= 4\pi\rho, & \nabla \times \mathbf{h} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{S} &= 0, & \nabla \times \mathbf{S} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{h} + \mathbf{S}, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\frac{\mathbf{J}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (17)$$

que formam um sistema consistente com a equação da continuidade, Eq. (5), como pode ser visto tomando-se a divergência dos dois lados da segunda das Eqs. (16).

A equação da continuidade, Eq. (17), deve agora ser incorporada ao sistema, o que se justifica pela presença do campo adicional,  $\mathbf{S}$ . O sistema difere do exato pela presença, no lado direito da segunda das Eqs. (16), do campo eletrostático  $\mathbf{h}$  no lugar do campo elétrico total  $\mathbf{E}$ , Eq. (4). Isto confina as soluções do sistema, Eqs. (14)-(17), à região próxima às fontes, excluindo a radiação. Mais exatamente, pode-se mostrar que o sistema é correto para velocidade  $v$  das cargas tal que  $v^2/c^2 \ll 1$ , aceleração  $\mathbf{a}$  até distâncias  $r$  tais que  $ar/c^2 \ll 1$  [3].

Vamos ver como a densidade de carga inicial,  $\rho(\mathbf{x}, 0)$ , e a densidade de corrente,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ , determinam os campos  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ . Admite-se que, do conhecimento da densidade de carga, o campo eletrostático fica determinado, ainda que, num procedimento numérico, tal prática introduzisse infundáveis in-

tegrações espaciais. Com isto, como temos incorporado a equação da continuidade, Eq. (5), podemos calcular  $\rho(\mathbf{x}, \Delta t)$  no instante  $\Delta t$  e daí determinar  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \Delta t)$ , em princípio, pelas primeiras das Eqs. (14). Como conhecemos  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, 0)$  isto permite conhecermos também  $\partial \mathbf{h}/\partial t$ , e com isto,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0)$  fica determinado pelas Eqs. (16). Repetindo o procedimento para os tempos  $\Delta t$  e  $2\Delta t$ , determinamos  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \Delta t)$ , permitindo obter-se  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, 0)$  pelas últimas das Eqs. (14) e o campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)$  pela Eq. (15), e assim para os  $\Delta t$ 's seguintes. Vê-se que são os campos solenoidal  $\mathbf{S}$  e elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  que vêm agora a reboque do cálculo. E assim, podemos afirmar que as fontes atuais determinam os campos.

Por outro lado, é fácil de se ver que, para fenômenos periódicos, em lugar da Eq. (13), obtém-se

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J}_L. \quad (18)$$

## 6. Considerações finais

Acreditamos ter apresentado aqui uma forma mais didática de encarar as equações de Maxwell: no caso periódico, reunindo transmissão e criação; no aperiódico, discriminando o papel das equações, e no caso dos quase-permanentes, mostrando sua correlação com a visão estática de vinculação estreita entre fontes e campos.

## Agradecimentos

Agradecemos a Luiz Nunes de Oliveira pela leitura crítica e sugestões incorporadas ao texto.

## Nota do Editor

Esse artigo já estava praticamente aceito quando recebemos a notícia do falecimento do autor, ocorrido em São Carlos, no último dia 10 de janeiro desse ano. Lastimamos a perda do professor Guilherme Fontes Leal Ferreira, que era um colaborador pioneiro e muito constante das publicações da SBF.

## Referências

- [1] J.B. Marion, *Classical Eletromagnetic Radiation* (Academic Press, New York, 1965).
- [2] J. Vaz, Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, 234 (1997).
- [3] G.F. Leal Ferreira, Revista Brasileira de Ensino de Física **23**, 395 (2001).
- [4] L. Jánossy, *Theory of Relativity based on Physical Reality* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971).