Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, nº 3, e3315 (2018)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0346

Artigos Gerais

Mínimo teórico para descrever campos quânticos em equilíbrio termodinâmico

Theoretical minimum to describe quantum fields in thermodynamic equilibrium

A. F. Ferrari[1], A. A. Nogueira[*1], C. Palechor[1]

[1]Centro de Ciências Naturais e Humanas (CCNH), Universidade Federal do ABC, Av. dos Estados 5001, Bairro Santa Terezinha CEP 09210-580, Santo André, SP, Brazil

Recebido em 11 de Novembro, 2017. Revisado em 25 de Janeiro, 2018. Aceito em 12 de Fevereiro, 2018.

Este trabalho tem como objetivo discutir o comportamento de campos quânticos à temperatura finita. Primeiramente introduziremos os ingredientes relativísticos, quânticos e térmicos de maneira fenomenológica (Planck-Einstein) ao descrever o comportamento das partículas de radiação em equilíbrio com uma cavidade, o celebrado problema do corpo negro. Em seguida, mostraremos que a linguagem implícita do fenômeno físico em questão é uma linguagem de campos escalares não massivos de Klein-Gordon-Fock em $(3+1)$ dimensões em equilíbrio térmico. Com este intuito, estudaremos o problema no formalismo de operadores e, a posteriori, no formalismo de integração funcional via matriz densidade de estados. Além disso, abordaremos o problema em diferentes representações (coordenadas/momento). A conexão entre uma teoria quântica no espaço de Minkowski e uma teoria quântica em equilíbrio no espaço Euclidiano por meio de uma rotação de Wick (tempo imaginário) será mostrada por meio das transformações de similaridade.
Palavras-chave: Teoria Clássica de Campos; Teoria Quântica de Campos; Teoria Quântica de Campos Térmica

The aim of this work is to discuss the behavior of quantum fields at finite temperature. Initially, we will introduce phenomenologically the basic relativistic, quantum and thermal elements (Planck-Einstein), by describing the behavior of radiation in equilibrium with a cavity, the celebrated black body problem. Then, we will show that a proper language for describing this physical phenomena is the language of non-massive scalar fields (Klein-Gordon-Fock) in $(3 + 1)$ dimensions, at thermal equilibrium. For this purpose, we will study the problem in the formalism of operators and a posteriori in the formalism of functional integration, by considering the density matrix of states. In addition, we will approach the problem in different representations (coordinates/momentum). The connection between a quantum theory in Minkowski space-time and a quantum theory in thermal equilibrium in Euclidean space by means of a Wick rotation (imaginary time) will be implemented by means of the appropriate similarity transformations.
Keywords: Classical Field Theory; Quantum Field Theory; Thermal Quantum Fields Theory.

1. Aspectos introdutórios

A evolução das idéias sobre o significado do calor ao longo da jornada humana em busca do conhecimento tem um papel importante na história da ciência. Como uma fagulha, ela se origina no primeiro hominídeo que dominou a técnica necessária para se fazer o fogo, observando a existência do fenômeno na natureza, e se prolonga até os tempos atuais em que físicos estudam e especulam sobre a natureza e propriedades microscópicas da radiação e sua interação com a matéria, ao mesmo tempo que exploram questões ainda não respondidas sobre a termodinâmica de buracos negros, por exemplo. A descrição microscópica da natureza remonta de frases poéticas gregas como as de Demócrito, na qual a matéria consiste em pequenas partículas indivisíveis chamadas "átomos" movendo-se pelo espaço vazio, uma visão conceitualmente profunda, mas cuja confirmação teve que esperar milênios até a descoberta moderna de como se fazer ciência testando as afirmações teóricas tidas como verdadeiras (axiomas) e suas consequências lógicas, por meio de experimentos [1]. A ciência moderna se baseia na escolha de questões que podem ser respondidas de maneira pragmática, o que pode ser visto, por exemplo, na afirmação de Richard Feynman: "I would rather have questions that can't be answered than answers that can't be questioned."[1]

*Endereço de correspondência: andsogueira@hotmail.com.

[1]"Eu preferiria ter questões que não podem ser respondidas, do que ter respostas que não podem ser questionadas." Essa frase exemplifica a maneira realista de Feynman pensar sobre a ciência, no sentido de ser mais interessante viver com incertezas e não conhecer tudo do que ter respostas que não são questionadas e podem estar erradas.

Antes de desvendar a física microscópica implícita nos fenômenos físicos da natureza, devemos discutir os conceitos fenomenológicos da física macroscópica: no caso de fenômenos envolvendo temperatura e calor, estamos falando da termodinâmica [2–6]. A termodinâmica se consolidou como ciência propriamente dita durante a revolução industrial, em parte frente à necessidade de entender o comportamento e aprimorar a eficiência de máquinas térmicas. A termodinâmica é uma teoria que descreve fenômenos físicos envolvendo calor e temperatura, aplicada a sistemas físicos macroscópicos, sem a necessidade de utilizar conceitos microscópicos da estrutura da matéria. Os conceitos macroscópicos são medidos por meio das variáveis termodinâmicas (intensivas/extensivas) como pressão P, temperatura T, volume V, etc.

O primeiro conceito crucial que surge das medidas experimentais das variáveis termodinâmicas é o de equilíbrio termodinâmico (ou térmico). Um sistema físico está num estado de equilíbrio termodinâmico quando se observa que suas variáveis termodinâmicas não variam com o tempo. Experimentalmente, observamos que o equilíbrio térmico satisfaz o que se chama de propriedade transitiva, o que é enunciado como a lei zero da termodinâmica: dois sistemas termodinâmicos em equilíbrio com um terceiro estão em equilíbrio entre si. Esta observação é o que permite, por exemplo, definir operacionalmente o conceito macroscópico de temperatura, com base em medidas usando um sistema físico (termômetro) calibrado com base em estados padrão (como água em degelo e em ebulição, por exemplo).

Para um dado corpo em equilíbrio térmico existe uma relação entre as variáveis termodinâmicas conhecida como equação de estado, que assume a forma

$$f(P,V,T) = 0,$$

em que o espaço dos estados de equilíbrio são descritos por uma superfície no espaço das variáveis P, V e T, de acordo com o teorema da função implícita. Um exemplo de equação de estado é a equação de um gás ideal de Clapeyron[2] (válida a altas temperaturas e baixas densidades),

$$PV = nRT\,.$$

Contudo, não queremos apenas compreender estados de equilíbrio, e a termodinâmica permite estudar sistemas em que uma mudança nas condições externas promove uma mudança no estado de equilíbrio do sistema, levando-nos a classificar uma transformação termodinâmica como reversível ou irreversível. Em uma transformação reversível podemos considerar caminhos infinitesimais tais que as quantidades[3]

$$dW = PdV \qquad \text{(trabalho)}$$

e

$$dQ = CdT \qquad \text{(calor)}$$

dependam do caminho (são diferenciais inexatas), mas de forma tal que sua soma seja uma diferencial exata representando a variação de energia interna de um sistema termodinâmico. Esta relação é chamada de Primeira Lei da Termodinâmica,

$$dQ = dU + dW$$

em que dU é a diferença de energia interna entre dois estados de equilíbrio infinitesimalmente próximos.

Uma questão crucial para a aplicação da termodinâmica no século XIX era o estudo da eficiência de máquinas térmicas. A eficiência η de uma máquina térmica é definida como a razão entre o trabalho realizado pela máquina e a energia oferecida à máquina como forma de calor, durante um processo em que o sistema passa por um ciclo fechado de transformações termodinâmicas, ou seja,

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}\,,$$

em que W é o trabalho realizado pela máquina e Q_1 e Q_2 são os calores cedidos e absorvidos pela máquina, respectivamente[4] . O estudo da eficiência de máquinas térmicas levou a uma nova lei da natureza, conhecida como Segunda Lei da Termodinâmica, que pode ser enunciada de diferentes formas. Dois enunciados se referem explicitamente ao comportamento de máquinas térmicas:

> **Enunciado de Clausius**: Não existe uma transformação termodinâmica cujo único efeito seja levar calor de um reservatório à temperatura mais baixa a um reservatório à temperatura mais alta.
>
> **Enunciado de Kelvin**: Não existe uma transformação termodinâmica cujo único efeito seja extrair calor de um reservatório térmico e transformá-lo integralmente em trabalho.

Como consequência desses enunciados surge o teorema de Clausius [7]: em um processo cíclico arbitrário $\mathcal{P}$ a seguinte desigualdade é verificada,

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{dQ}{T} \geq 0,$$

sendo que a igualdade acontece em um processo reversível. Este resultado permite relacionar a Segunda Lei da Termodinâmica com uma função de estado denominada entropia de um sistema, sendo a variação de entropia

[2] Uma observação interessante é a hipótese molecular de Avogadro (1811) que comprovou que volumes iguais de quaisquer gases, que estão nas mesmas condições de temperatura e pressão, apresentam o mesmo número de moléculas.

[3] C é a capacidade térmica a volume e pressão constantes.

[4] Conforme demonstrado por Carnot, qualquer máquina térmica que opere entre duas fontes com temperaturas fixas atingirá seu rendimento máximo se seu funcionamento ocorrer a partir de processos reversíveis.

dS entre dois estados de equilíbrio infinitesimalmente próximos dada por

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Outras funções de estado termodinâmicas também podem ser introduzidas no formalismo como a entalpia H, e dos estudos termodinâmicos das reações químicas surgem a a energia livre de Gibbs G e também a energia livre de Helmoltz A,

$$A = U + TS,$$

sendo a relação entres diversas funções de estado dadas por transformações de Legendre.

Apesar de trabalhos precursores como os de Avogadro, a realidade molecular só veio a ser firmemente estabelecida com o advento dos trabalhos de Einstein-Perrin sobre o movimento Browniano no início do século XIX, através da equação de difusão e da descrição probabilística do fenômeno via o "andar do bêbado". Porém, o trabalho que lançou as bases conceituais sobre as estruturas microscópicas e sua conexão com as medidas macroscópicas foi devido a Boltzmann no século anterior [8–12]. Seus estudos sobre teoria cinética dos gases nos levaram a formular a entropia de Clausius em termos de uma contagem do número de estados microscópicos $\Omega_{\{n_i\}}$ correspondentes a um dado estado macroscópico,

$$\Omega_{\{n_i\}} = \frac{N!}{n_1!n_2!...n_s!}\,,$$

através de

$$S = k \ln \Omega_{\{n_i\}}\,,$$

onde $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ é o número total de moléculas, sendo que n_i é o número de moléculas em cada uma de s distintas "células" no espaço de fase. Mais do que isso, podemos formular o princípio da máxima entropia em termos variacionais,

$$\delta \left[\ln \Omega_{\{n_i\}} - \alpha \sum n_i - \beta \sum n_i E_i\right] = 0\,,$$

onde os multiplicadores de Lagrange α e β garantem a conservação de número de moléculas e da energia macroscópica, encontrando assim a distribuição que maximiza a energia[5]

$$\bar{n}_i = \exp(-1-\alpha)\exp(-\beta E_i).$$

Ao considerar N moléculas em uma caixa de volume V e o estado de uma molécula num dado instante t caracterizado pelas variáveis $(\vec{r}, \vec{p}, t)$, introduzimos o conceito de distribuição do número de partículas $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$, definido de forma que

$$\int d^3\vec{r} d^3\vec{p}\, f(\vec{r}, \vec{p}, t) = N,$$

e que $f(\vec{r}, \vec{p}, t)d^3\vec{r}d^3\vec{p}$ seja o número de moléculas com posição e momento contidas num volume infinitesimal do espaço de fase no tempo t. Reformulamos assim a descrição do equilíbrio termodinâmico[6] supondo a existência do limite

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t \to \infty) = f(\vec{r}, \vec{p}),$$

advindo de uma equação de transporte de Maxwell-Boltzmann [9,14],

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \vec{F}\frac{\partial}{\partial \vec{p}_1}\right] f(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t) \\ &= \int d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}\,'_1 d^3\vec{p}\,'_2 \delta^4(P_f - P_i)|T_{if}|^2 \\ &\times \left[f(\vec{r}\,'_1, \vec{p}\,'_1, t) f(\vec{r}\,'_2, \vec{p}\,'_2, t) - f(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t) f(\vec{r}_2, \vec{p}_2, t)\right], \end{aligned}$$

cujo lado esquerdo está associado à dinâmica fora do equilíbrio devido à interação estudada, às colisões e espalhamentos. Quando o equilíbrio é alcançado em $t \to \infty$, temos o seguinte,

$$f(\vec{r}\,'_1, \vec{p}\,'_1) f(\vec{r}\,'_2, \vec{p}\,'_2) - f(\vec{r}_1, \vec{p}_1) f(\vec{r}_2, \vec{p}_2) = 0,$$

valendo as conservações de energia e momento,

$$\frac{\vec{p}\,'^2_1}{2m} + \frac{\vec{p}\,'^2_2}{2m} = \frac{\vec{p}^{\,2}_1}{2m} + \frac{\vec{p}^{\,2}_2}{2m}\,,$$

e

$$\vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,.$$

O conjunto de equações anteriores, as quais descrevem o equilíbrio termodinâmico, admitem a seguinte solução para a função de distribuição,

$$f(\vec{p}) = \alpha \exp\left(-\beta \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right).$$

Tendo em vista os conceitos termodinâmicos desenvolvidos até então, o trabalho de Maxwell sobre o comportamento da radiação eletromagnética e a lei experimental de Wien para descrever o espectro de emissão de radiação de um corpo negro, no início do século (XIX) Planck foi levado fenomenologicamente a quebrar o paradigma teórico de sua época, quantizando a energia da radiação eletromagnética [15,16],

$$E = \hbar\omega$$

o que conduziu a sua famosa fórmula,

$$Q(\omega, T) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c}\frac{\omega^3}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1},$$

sendo $Q(\omega, T)$ o fluxo de energia por unidade de frequência de um corpo negro a temperatura T. Esse fato foi a porta de entrada para posteriormente Bohr quantizar o

[5] Uma distribuição é uma função que conta o número de moléculas ou átomos de um determinado gás que estão em um dado estado (do espectro de Energia, por exemplo).

[6] A existência do equilíbrio termodinâmico em eletrodinâmica quântica é dada pelo Teorema H de Boltzmann. Podem existir interações que não permitem alcançar o equilíbrio termodinâmico, levando então a discussões sobre a dinâmica fora do equilíbrio [13].

momento angular de um átomo, Einstein formular a explicação do efeito fotoelétrico introduzindo o conceito de quanta de radiação e, assim, surgir a Mecânica Quântica.

Dando continuidade à evolução histórica das idéias que descrevem a matéria e a radiação, logo após a primeira guerra mundial idéias cruciais emergem [17]. Aparecem duas descrições para o mundo quântico, a descrição de funções de onda de Schrödinger e a descrição matricial de Heisenberg, juntamente com a descoberta do princípio da incerteza. Além disso, Dirac unifica as descrições anteriores em uma única linguagem [18]. Ademais, Pauli descobre o princípio da exclusão observando o espectro dos átomos [19], e os estados possíveis para os elétrons na eletrosfera. Também vemos avanços no estudo da descrição distribucional de um sistema de vários fótons (bosons) em equilíbrio devido aos trabalhos de Bose e Einstein [20], que chegaram a uma função de distribuição da forma,

$$f(E) = \frac{1}{\exp(\beta E) - 1},$$

e, posteriormente, na descrição distribucional de um sistema de vários elétrons em equilíbrio (férmions) com os trabalhos de Fermi e Dirac [21], conduzindo à função de distribuição,

$$f(E) = \frac{1}{\exp(\beta E) + 1}.$$

Intuitivamente, quando analisamos o comportamento a baixas temperaturas do gás de Bose-Einstein as partículas vão todas para o estado de menor energia, criando um condensado e uma contribuição negativa para a pressão. Por outro lado, no gás de Fermi-Dirac os estados de menor energia vão sendo ocupados gradativamente criando uma contribuição positiva para a pressão, devido ao princípio da exclusão de Pauli.

Com o intuito de descrever a interação quântica entre a radiação (descrita por bósons chamados de fótons) e a matéria (representada por férmions como os elétrons) de maneira relativística, Dirac parte de uma teoria de campos clássicos. Para discutir processos quânticos com interação entre várias partículas de radiação e matéria (no espaço de Fock), Dirac precisa quantizar os campos, e surge assim a Teoria Quântica de Campos com seu formalismo de operadores de criação e destruição de partículas. Grandes avanços serão feitos no período da segunda guerra mundial em eletrodinâmica quântica [22]. Mais tarde, em contrapartida ao formalismo de operadores de campos, surge o formalismo de integrais de caminho de Feynman e seus diagramas, trazendo uma visualização mais intuitiva de processos quânticos [23, 24]. Também é desenvolvido o princípio variacional de ação quântica de Schwinger, e sua análise com base em funções de Green com fontes dos processos quânticos [25]. As duas formulações se mostraram ser equivalentes devido aos trabalhos de Dyson e, sendo assim, surge uma nova linguagem quântica unificadora, o formalismo de integração funcional. Na mesma época Pauli surge com um importante teorema (Teorema Spin-Estatística) sobre a conexão entre o spin de um campo e sua descrição estatística, ao estudar um sistema de várias partículas em equilíbrio termodinâmico, caracterizando bósons como partículas de spin inteiro, que satisfazem a distribuição de Bose-Einstein, e férmions como partículas de spin semi-inteiro, que satisfazem a distribuição de Fermi-Dirac [26]. Posteriormente, em 1955, surge o formalismo do tempo imaginário de Matsubara [27] para descrever um sistema quântico de várias partículas quânticas em equilíbrio termodinâmico, via a matriz densidade de estados,

$$\hat{\rho} = \exp\left[-\beta \hat{H}\right],$$

e sua conexão com a função de partição,

$$Z = \mathrm{tr}\hat{\rho}.$$

Em seguida, Fradkin constrói um formalismo de integração funcional para descrever campos quânticos em equilíbrio termodinâmico [28].

Uma classe de fenômenos de grande interesse físico, tanto ao utilizar uma linguagem macroscópica quanto microscópica para descrever as propriedades da matéria, são as das transições entre fases das substâncias,

$$(\text{sólido} \leftrightarrow \text{líquido} \leftrightarrow \text{gás} \leftrightarrow \text{plasma}),$$

ou mesmo a mudança das propriedades magnéticas (Heisenberg-Ising) [29]

$$(\text{ferromagnético} \leftrightarrow \text{paramagnético}),$$

o que muitas vezes está relacionado a uma quebra de simetria. Ginzburg e Landau construíram uma maneira de avaliar os expoentes críticos nas proximidades de um ponto crítico expandindo a energia livre de Helmoholtz ou o potencial de Gibbs nessa região, e classificando o parâmetro de ordem associado à transição. Em física da matéria condensada, aparece o fenômeno da supercondutividade, com a criação dos pares de Cooper devido à interação entre elétrons de um metal e fônons, e de forma semelhante aparece o fenômeno da superfluidez na descrição das propriedades dos sólitons (bósons) formados pela combinação de dois férmions no Hélio líquido [8, 10, 11, 30, 31]. Atualmente, em matéria condensada, observamos estudos envolvendo o grafeno e supercondutividade [32].

Posteriormente, vemos o surgimento do conceito de quebra de simetria de calibre e geração de massa, começando com um trabalho de Glashow [33] sobre simetrias parciais, em que parte da Lagrangeana é invariante perante uma transformação de simetria, porém a parte da Lagrangeana que produz massa para as partículas elementares não é invariante, explicando o decaimento de partículas massivas intermediárias em fótons. Nambu e Goldstone [34] introduzem o conceito de redução de simetria global devido à inclusão na Lagrangeana de um potencial advindo do estudo de supercondutores (potencial do chapéu mexicano). Em seguida Abdus Salam e Steven Weinberg [35] se aprofundam na demonstração da conjectura de Goldstone, afirmando que se houver uma transformação de simetria contínua sob a qual a Lagrangeana é invariante, então o estado de vácuo também deve ser invariante sob a mesma transformação, ou deve existir uma partícula escalar de massa zero. Peter Higgs [36], inspirado no artigo de matéria condensada de Anderson [37] sobre plasmons, simetrias de calibre e massa dos mediadores, investiga o mecanismo de quebra de simetria em um teoria de calibre Abeliana. Neste caso, o bóson de Nambu-Goldstone desaparece e os campos de calibre adquirem massa, o que leva à descrição segundo a qual os campos de calibre "engolem" os bósons de Nambu-Goldstone, adquirindo massa. Posteriormente, Kibble explorou a idéia proposta por Higgs em teorias de calibre não Abelianas. A unificação da interação fraca e eletromagnética não tarda a ser concretizada na Teoria Eletrofraca [39], isto de certa forma já era esperado pois a interação fraca tem uma analogia muito grande com o eletromagnetismo desde sua descrição fenomenológica com Fermi [40], através de uma interação entre 4-férmions do tipo corrente-corrente. Vale lembrar que Feynman e Gell-Mann [41] modificaram a estrutura de vértice da teoria de Fermi observando que experimentalmente a interação fraca atua apenas nos férmions de mão esquerda (corrente do tipo vetorial-axial). Neste meio tempo, Leite Lopes [42] propôs que o acoplamento fraco entre os férmions poderia ser devido à troca de bósons vetoriais neutros e carregados, chamados por ele de mésons vetorias [43]. Toda essa "Catedral de conhecimento"[7] conduz finalmente ao conceito de renormalização de Wilson, à dependência nas escalas de energia e às equações de Callan-Symanzik.

Construiu-se assim uma descrição extremamente bem sucedida para as interações na natureza utilizando como ferramenta teórica a Teoria Quântica de Campos e sua extensão para o descrever o equilíbrio termodinâmico via o formalismo de Matsubara-Fradkin. Descrevemos a interação eletromagnética através da eletrodinâmica quântica, unificamos o eletromagnetismo com a interação fraca no contexto da teoria eletrofraca de Glashow-Weinberg-Salam, prevemos o comportamento das partículas devido à interação forte via cromodinâmica quântica, e assim por diante. Mais que isso, a síntese das forças (eletromagnética, fraca e forte) em uma teoria (Modelo Padrão) é obtida, e um novo conceito emerge: as teorias que utilizamos para descrever a natureza são efetivas, no sentido de que dependem da escala de energia dos fenômenos considerados, e de fornecerem uma descrição completa dos fenômenos físicos apenas em determinado domínio de energia. Em uma linguagem científica, um problema físico envolve escalas de energias separadas (desacopladas); a dinâmica de baixas energias, descrita pelas teorias que conhecemos, e as interações de altas energias, que podem induzir pequenas correções nesta. Na prática, podemos descrever a física de baixas energias efetivamente utilizando os graus de liberdade e as interações apropriadas para essa escala. Essas ideias foram inicialmente propostas por Weinberg [44]. A discussão sobre teorias efetivas também se aplica ao caso de temperatura finita, onde vemos também o conceito de simetrias globais, de calibre e quebra espontânea de simetria juntamente com um novo conceito associado à restauração de simetria acima de uma temperatura crítica [45].

Para finalizar, é possível enumerar diferentes problemas teóricos e experimentais relevantes na física de plasmas contemporânea, destacando que a descrição formal de uma teoria de campos a temperatura finita é atual e se apresenta em constante desenvolvimento [46, 47]. Podemos citar estudos das excitações coletivas e as quase partículas em plasmas em eletrodinâmica quântica e cromodinâmica quântica; respostas lineares devido à atuação de campos eletromagnéticos externos e a blindagem de Debye, em que fótons adquirem massa e sendo assim um comprimento característico; o estudo da transição de fase na cromodinâmica quântica, ao analisar as equações de estado referentes ao plasma de quarks e gluons, e a transição de quarks confinados para quarks livres, em que temos uma aparente quebra de simetria quiral. A janela experimental para a descrição do plasma de quarks e gluons seriam os dados coletados nos aceleradores de partículas (como o CERN) em colisões envolvendo íons pesados. Outro tema de grande interesse é a restauração de simetrias a altas temperaturas, já que em situações de não equilibrio não se sabe quais são os mecanismos dessa restauração.

Ao olharmos para os céus (Astrofísica) vemos também a aplicação do estudo de corpo negro na descrição da radiação cósmica de fundo e o estudo do início do universo (bariogênese, leptogênese, etc) [48]. Temos também o estudo sobre emissões de neutrinos por fótons em estrelas (supernovas, anãs brancas) onde temos uma a perda de energia devido ao decaimento dos plasmons em pares de neutrinos. Por outro lado, tendo em vista os aspectos formais da teoria quântica de campos a temperatura finita, vemos o problema de singularidades no infravermelho devido à existência de partículas não massivas em uma teoria de calibre. Por fim, outra fronteira atual na generalização de conceitos envolvendo temperatura e termodinâmica é na óptica quântica, já que o

[7] A expressão é uma metáfora, pelo fato de uma Catedral ser um lugar grande e bonito onde pessoas visitam. Essa expressão, de autoria do poeta Theco Rainer Maria Rilke, foi utilizada por J. L. Lopes no documentário Cientistas Brasileiros, César Lattes e José Leite Lopes:
"Com as mãos trêmulas te construímos,
Átomo sobre átomo as tuas torres elevamos,
Mas quem te poderá completar,
Ó Catedral."

tratamento envolvendo criptografia e teletransporte com efeitos associados a temperatura é um problema central no contexto experimental. De maneira geral, a formulação envolvendo informação quântica, teletransporte, estados emaranhados, são muito relevantes tanto na concepção de um computador com bits quânticos quanto no estudo das propriedades termodinâmicas de um buraco negro, seguindo o exemplo de Bekenstein-Hawking. Conceitos como o de buracos de minhoca e emaranhamento (teletransporte), duas das idéias prediletas da ficção científica, podem na realidade ser dois lados da mesma moeda [49–51].

Tendo em vista a falta de um tratado elementar sobre como a linguagem de campos quânticos em equilíbrio termodinâmico descreve o comportamento da radiação em um corpo negro, temos como pretexto preencher essa lacuna. Acreditamos que a leitura desse trabalho enriquecerá as ferramentas teóricas de leitores que estão iniciando sua jornada científica no tema pois além de implementarmos conceitos físicos de maneira construtiva, iniciando com fenomenologia, fazemos conexão com diferentes formalismos (operadores, integração funcional) em diferentes representações (coordenadas, momentos). É válido ressaltar que ao discutir o formalismo de integração funcional apresentamos o princípio variacional da ação quântica de Schwinger, em que vemos uma relação intima entre a amplitude de transição e a matriz de espalhamento $\mathcal{S}$. Também ao descrevermos o equilíbrio termodinâmico apresentamos o princípio variacional de Fradkin, em que vemos uma relação intima entre a função de partição e a matriz densidade de estados ρ. Esses princípios variacionais tanto quânticos quanto térmicos são geralmente omitidos nos cursos padrões da comunidade, neste caso o material aqui apresentado poderia preencher essa ausência.

Este artigo é organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 descrevemos heuristicamente o comportamento da radiação em um corpo negro com ingredientes relativísticos, quânticos e térmicos. Na Seção 3 construimos a linguagem necessária para descrever campos quânticos no formalismo de operadores (Dirac) e no formalismo de integração funcional (Schwinger). Na Seção 4 vemos que a linguagem implícita na descrição do comportamento de um gás de radiação é a de teoria quântica de campos em equilíbrio termodinâmico, faremos isso no formalismo de operadores térmicos de criação e destruição. Na Seção 5 construímos o formalismo de integração funcional (Matsubara-Fradkin) para descrever o comportamento de um corpo negro e fazemos conexões com o formalismo de operadores e a descrição heurística. Na Seção 6 temos as conclusões. No material suplementar reunimos algumas observações matemáticas (Apêndice A) e discutimos o plasma de eletrodinâmica quântica (Apêndice B).

2. Descrição fenomenológica da radiação de corpo negro

Temos nesse momento o interesse em descrever heuristicamente o comportamento da radiação em uma cavidade (corpo negro) à uma dada temperatura T, incorporando ingredientes relativísticos, quânticos e térmicos, investigando as consequências imediatas dessa descrição [52].

Como temos o interesse em descrever o comportamento quântico e relativístico da radiação no equilíbrio termodinâmico iniciamos a discussão com as equações

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{(Planck)}, \tag{1}$$

e

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 \quad \text{(Einstein)}. \tag{2}$$

Desse modo, ao descrever o equilíbrio termodinâmico, teríamos para a contagem de número de estados microscópicos $(\vec{q}, \vec{p})$ no espaço de fase com uma dada energia E,

$$\Sigma = \int \frac{d^3\vec{q}d^3\vec{p}}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\int_0^E E'^2 dE' ,$$

lembrando-se que as s-cédulas devem ter um tamanho dado pelo princípio da incerteza de Heisenberg $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, onde

$$\frac{d\Sigma}{dE} = g(E)$$

corresponde ao número de estados microscópicos com energia E[8].

Definindo o número médio de partículas de radiação em um dado estado (número de ocupação) via Boltzmann

$$\langle n\rangle \doteq \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\exp[-\beta nE]}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp[-\beta nE]}, \quad \beta = \frac{1}{kT}, \tag{3}$$

concluiríamos que o número de fótons com uma dada energia E seria o seguinte

$$dN = \langle n\rangle g(E)dE = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\frac{E^2dE}{\exp(\beta E) - 1}\,, \tag{4}$$

e também teríamos com a definição infinitesimal de energia interna $dU = EdN$ o conjunto de equações

$$N = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\int_0^\infty \frac{E^2dE}{\exp(\beta E) - 1}, \tag{5}$$

e

$$U = \frac{4\pi V}{h^3c^3}\int_0^\infty \frac{E^3dE}{\exp(\beta E) - 1}. \tag{6}$$

Com a equação da energia interna U vemos o surgimento da distribuição de Bose-Einsten,

$$U = \int \frac{d^3\vec{q}d^3\vec{p}}{h^3}Ef(p)\,, \tag{7}$$

[8]Observe que estamos simplificando o problema com o intuito de descrever posteriormente o comportamento da radiação por campos escalares (spin 0). A descrição real seria com campos vetorias (spin 1), neste caso teríamos duas polarizações (helicidades) para propagação de ondas eletromagnéticas e a contagem de estados microscópicos deveria ser multiplicada por 2: mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice B.

onde

$$f(p) = \frac{1}{\exp\left(\beta c p\right) - 1} \,. \tag{8}$$

Esta é uma consequência do fato de vários bósons poderem ocupar o mesmo estado, e está relacionado, como veremos mais adiante, à função de Green de dois pontos. Nas entrelinhas vemos o teorema de Spin-Estatística funcionando: se estivéssemos tratando de férmions, a função de distribuição associado à energia interna e a função de Green de dois pontos seria uma distribuição de Fermi-Dirac [9].

Utilizando-se a fórmula matemática[10]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{E^s dE}{\exp\left(\beta E\right) - 1} &= \frac{1}{\beta^{s+1}} \int_0^\infty \frac{y^s dE}{\exp\left(y\right) - 1} \\ &= \frac{1}{\beta^{s+1}} \Gamma(s+1)\zeta(s+1)\,, \end{aligned} \tag{9}$$

concluiríamos que as equações de estado descritas anteriormente seriam dadas por

$$N = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \frac{1}{\beta^3} \Gamma(3)\zeta(3), \tag{10}$$

e

$$U = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \frac{1}{\beta^4} \Gamma(4)\zeta(4), \tag{11}$$

em que perceberíamos o surgimento da Lei de Stefan-Boltzmann

$$U = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{V}{(\hbar c)^3} \frac{\pi^2 k^4}{30}. \tag{12}$$

Por outro lado, se temos interesse em encontrar o fluxo de partículas de radiação emitidas de um orifício do corpo negro, escreveríamos as seguintes equações,

$$dN = \frac{N}{V} A v \cos\left(\theta\right) dt \, f(v) d^3\vec{v}, \tag{13}$$

$$d\Phi = \frac{1}{A} \frac{dN}{dt}, \tag{14}$$

sendo N o número de partículas emitidas em uma dada direção θ, $f(v)$ a função distribuição e Φ o fluxo. Neste caso

$$\Phi = \frac{N}{V} \int v \cos\left(\theta\right) f(v) d^3\vec{v} \tag{15}$$

$$= \frac{N}{V} \pi \int_0^\infty v^3 f(v) dv \tag{16}$$

$$= \frac{N}{V} \frac{1}{4} \langle v \rangle = \frac{N}{V} \frac{c}{4}, \tag{17}$$

e sendo assim o fluxo de energia por unidade de frequência $Q(\omega, T)$ é dado pela lei de Planck

$$Q(\omega, T) = \hbar\omega \frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{\hbar}{2\pi^2 c} \frac{\omega^3}{\exp\left(\beta\hbar\omega\right) - 1}. \tag{18}$$

Por fim, podemos encontrar uma expressão para a pressão do gás de radiação P imaginando um fluxo de partículas de radiação colidindo com as paredes e sendo refletidas,

$$d\Phi = v_x f(p) \frac{d^3\vec{p}}{h^3} \quad \text{(fluxo de radiação)}\,, \tag{19}$$

$$dp_x = 2p_x \quad \text{(momento transferido por partícula)} \tag{20}$$

deste modo obtemos

$$P = \int_{v_x > 0} \frac{d^3\vec{p}}{h^3} 2p_x v_x f(p) = \frac{2c}{h^3} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin(\theta) \cos^2(\theta) \int_0^\infty p^3 f(p) dp \tag{21}$$

$$= \frac{4\pi c}{3h^3} \int_0^\infty \frac{p^3}{\exp\left(\beta c p\right) - 1} dp = \frac{1}{3} \frac{U}{V}, \tag{22}$$

o que leva à equação de estado $PV = \frac{1}{3} U$.

3. Teoria (Clássica-Quântica) de Campos

Vamos agora construir a linguagem necessária para descrever campos quânticos no formalismo de operadores,

[9] Tendo em vista o espectro de uma partícula bosônica com degenerescência g_i de cada estado com n_i ocupantes, dizemos que a contagem quântica do número de estados que uma partícula pode ocupar é dada pelas equações

$$W_i = \frac{(n_i + g_i - 1)}{n_i!(g_i - 1)!}\,,$$

e

$$\Omega_{\{n_i\}} = \prod_i W_i \quad \text{(número total de combinações)}.$$

Aplicando o princípio variacional de máxima entropia com os vínculos de conservação de energia e número de partículas

$$\delta \left[\ln \Omega_{\{n_i\}} - \alpha \sum n_i - \beta \sum n_i E_i \right] = 0\,,$$

e tomando o limite dos grandes números (Stirling) encontrando a distribuição que maximiza a energia (Bose-Einstein) dada por

$$\bar{n}_i = \frac{g_i}{\exp(-\alpha - \beta E_i) - 1}.$$

[10] Para maiores detalhes da conexão entre a integral apresentada, as funções Gamma Γ e as funções zeta de Riemann ζ ver [53, 54]. É interessante observar que essas estruturas matemáticas (associadas aos blocos construtores dos números, os números primos) também aparecem no Efeito Casimir [55], existindo uma semelhança na descrição do fenômeno de Casimir e radiação de corpo negro.

seguindo a linguagem de Dirac [56,57] e no formalismo de integração funcional, segundo Schwinger [23–25]. As ferramentas construídas serão utilizadas para as próximas discussões sobre o equilíbrio termodinâmico dos campos.

3.1. O formalismo de operadores de Dirac

Ao descrever o movimento de uma partícula sem massa e sem a ação de interações externas (livre), sabemos que de maneira geral temos uma expressão relativística que relaciona sua energia e momento. Tendo em vista a covariância, sintetizamos essa expressão relativística em termos da linguagem de tetra-vetores,

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= 0, \\ p^\mu &= (E, \vec{p}), \end{aligned} \tag{23}$$

onde $p_\mu p^\mu = \left(p^0\right)^2 - \left(\vec{p}\right)^2$ devido à escolha da métrica do espaço-tempo $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+1, -1, -1, -1)$. Por outro lado, a interpretação das quantidades físicas na descrição quântica da natureza via o princípio da correspondência de Schrödinger,

$$\begin{aligned} E &\to i\partial_t \\ \vec{p} &\to -i\vec{\nabla} \end{aligned} \tag{24}$$

nos leva a uma cinemática ondulatória de Klein-Gordon-Fock (KGF),

$$\Box\phi = 0\,, \tag{25}$$

onde

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu, \tag{26}$$

e ϕ é um campo escalar real[11]. Vamos encontrar uma solução para a equação ondulatória de KGF utilizando o método de separação de variáveis, assumindo que

$$\phi = a(t)u(\vec{x}). \tag{27}$$

Sendo assim,

$$-\nabla^2 u = -\vec{p}^{\,2} u, \quad u_{\vec{p}} = \exp[-i\vec{p}\vec{x}], \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\vec{p}^{\,2} a, \tag{28}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} a(t) &= a_-(p)\exp[-i\omega_{\vec{p}} t] + a_+(p)\exp[i\omega_{\vec{p}} t], \\ p_\mu &= (\omega, \vec{p}). \end{aligned} \tag{29}$$

Deste modo, pelo princípio da superposição,

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) \;=\; & \int d^3\vec{p}\, N_{\vec{p}} \{a_-(p)\exp[-i\omega_{\vec{p}} t] \\ + \;& a_+(p)\exp[i\omega_{\vec{p}} t]\} u_{\vec{p}}\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Agora, devido às condições

$$\phi = \phi^* \quad \text{(realidade dos campos)},$$

$$a_-(\omega, \vec{p}) = a_+(\omega, -\vec{p}) \tag{31}$$

$$\int d^3\vec{p}\, N_{\vec{p}} \quad \text{(medida de integração escalar)},$$

$$N_{\vec{p}} = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2\omega}, \tag{32}$$

$$\omega \geq 0 \quad \text{(positividade da energia)}. \tag{33}$$

escrevemos a transformada de Fourier anterior de forma covariante,

$$\phi\,(t, \vec{x}) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{2}\exp[ip^\mu x_\mu]\delta(p^2)\theta(\omega), \tag{34}$$

onde

$$\delta(p^2) = \frac{1}{2\omega}[\delta(p_0 - \omega) + \delta(p_0 + \omega)], \tag{35}$$

em que $\delta(p^2)$ é uma delta de Dirac e $\theta(\omega)$ a função degrau de Heaviside, definida como $\theta(\omega) = 1$ para $\omega \geq 0$ e $\theta(\omega) = 0$ para $\omega < 0$.

O leitor atento perceberá que, neste formalismo quântico, a posição $\vec{x}$ aparece como um parâmetro clássico, e não como um operador. Uma pergunta natural seria: qual a definição do operador de posição neste formalismo? Para responder basta observar as seguintes propriedades

$$\hat{\vec{x}} = i\frac{\partial}{\partial\vec{p}} - \frac{1}{2}\frac{i\vec{p}}{\|\vec{p}\|^2} \quad \text{(Operador Hermitiano)} \tag{36}$$

$$\hat{\vec{x}}\, u_{\vec{p}}(\vec{x}) = \vec{x}\, u_{\vec{p}}(\vec{x}), \tag{37}$$

em que vemos o aparecimento do princípio da incerteza de Heisenberg de uma estrutura relativística de campos [58],

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \tag{38}$$

Dando continuidade ao nosso desenvolvimento, com a equação de movimento discutida anteriormente, construimos o princípio da mínima ação de Hamilton para a ação

$$\begin{aligned} S &= \textstyle\int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \\ \mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\, \partial^\mu\phi. \end{aligned} \tag{39}$$

O espaço descrito pelas coordenadas $(\phi, \partial_0\phi)$ é conhecido como espaço de configurações. O princípio variacional escreve-se:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right] = 0\,, \tag{40}$$

o que leva a

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \Rightarrow \Box\phi = 0.$$

Ou seja, o princípio variacional leva à equação de movimento esperada, inferida das propriedades básicas do tetra-vetor momento de partículas relativísticas.

Com a linguagem funcional em mãos, procedemos com a abordagem de Emmy Noether fazendo a ligação entre simetrias e quantidades conservadas [59]. Para isso, vamos aplicar translações espaço-temporais $(x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu)$

[11] Observe que estamos trabalhando no sistema natural de unidades em que $\hbar = 1 = c$.

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0346

impondo que a ação seja invariante. Para a medida de integração, temos

$$\begin{aligned} d^4x' &= (\text{Jacobiano})d^4x, \; (\text{Jacobiano}) \\ &= \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu d^4x \, , \end{aligned} \tag{41}$$

e, usando que $\delta\phi = \partial_\mu \phi \delta x^\mu$, temos a variação para a ação S dada por

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right] + \int \delta d^4x \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \, \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \eta^\mu_\nu \mathcal{L}\right]\delta x^\nu \\ &= 0, \end{aligned} \tag{42}$$

onde igualar δS a zero implica em impor a invariância da teoria frente à transformação considerada. Obtemos assim uma quantidade conservada conhecida como tensor de energia-momento

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\nu\phi - \eta^\mu_\nu \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta^\mu_\nu \partial_\theta\phi\partial^\theta\phi \, . \end{aligned} \tag{43}$$

Restringindo o caso anterior para translações temporais temos a energia total do sistema, ou Hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[\partial_0\phi\partial_0\phi + \partial_i\phi\partial_i\phi\right] \, , \tag{44}$$

portanto definindo o momento canonicamente conjugado a ϕ por

$$\pi \doteq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \, , \tag{45}$$

temos que a Lagrangiana e a Hamiltoniana estão relacionadas por uma transformação de Legendre

$$\mathcal{H} = \pi(\partial_0\phi) - \mathcal{L} \, . \tag{46}$$

Dando continuidade, percebemos que o princípio da mínima ação pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} S &= \textstyle\int d^4x[\pi(\partial_0\phi) - \mathcal{H}(\phi,\pi)] \\ \delta S &= \textstyle\int d^4x\{\delta\pi[\partial_0\phi - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}] - [\partial_0\pi - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}]\delta\phi\}. \end{aligned} \tag{47}$$

Neste caso vemos que uma equação de segunda ordem pode ser transformada em duas equações de primeira ordem

$$\begin{aligned} \partial_0\phi &= \tfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} \, , \\ \partial_0\pi &= -\tfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} \, , \end{aligned} \tag{48}$$

sendo que o espaço descrito pelas coordenadas (ϕ, π) é conhecido como espaço de fase.

A evolução temporal de uma quantidade física $Q\,(t)$, escrita em termos de uma densidade $\mathcal{Q}(\phi,\pi)$ através de

$$Q\,(t) = \int d^3\vec{x}\mathcal{Q}(\phi,\pi) \tag{49}$$

é dada por

$$\begin{aligned} \partial_0 Q &= \int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\left[\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\phi}\partial_0\phi + \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\pi}\partial_0\pi\right] \\ &= \int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\left[\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\phi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\pi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}\right] , \end{aligned} \tag{50}$$

o que nos leva a definir o parêntesis de Poisson como

$$\{\mathcal{Q},\mathcal{H}\}_P = \int d^3\vec{y}\left[\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\phi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\pi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}\right] . \tag{51}$$

Desta forma, temos as equações de movimento fundamentais escritas de forma sintética em termos dos parênteses de Poisson,

$$\begin{aligned} \partial_0\phi &= \{\phi,\mathcal{H}\}_P \\ \partial_0\pi &= \{\pi,\mathcal{H}\}_P . \end{aligned} \tag{52}$$

Dizemos que a evolução temporal de uma quantidade física é controlada pela Hamiltoniana, através do parêntese de Poisson.

A dinâmica do sistema físico pode ser implementada na Hamiltoniana da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} \to \mathcal{H}_{cinem\acute{a}tica} + \mathcal{H}_{din\hat{a}mica} \, , \\ &\mathcal{H}_{din\hat{a}mica} = V(\phi) \, . \end{aligned} \tag{53}$$

O estudo da dinâmica subjacente a um determinado fenômeno físico é a mais fundamental etapa para sua compreensão física. Historicamente, podemos lembrar que as relações cinemáticas descobertas por Keppler e Galileu foram efetivamente compreendidas como resultados de uma dinâmica descoberta por Newton. Einstein também, logo após estabelecer as relações cinemáticas básicas da relatividade, buscou estender sua teoria para englobar a dinâmica clássica de partículas. Da mesma forma, na descrição de campos quânticos, nós começamos construindo o espaço dos estados de Hilbert a partir da cinemática relativística quântica, baseada nas representações do Grupo de Poincaré e, posteriormente, ao implementar a dinâmica, podemos perceber seus efeitos nos processos quânticos pelas equações de Lippmann-Schwinger.

Uma dinâmica quântica de um sistema de várias partículas interagindo entre si vem do processo de quantização dos observáveis físicos, que pode ser obtido a partir de

$$\mathcal{H} \quad (\text{energia}) \to \hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hat{\pi}\hat{\pi} - \frac{1}{2}\nabla\hat{\phi}\nabla\hat{\phi} + \hat{V} \, , \tag{54}$$

$$\vec{p} \quad (\text{momento}) \to \hat{\vec{p}} = \frac{1}{2}[\hat{\pi}\nabla\hat{\phi} + \nabla\hat{\phi}\hat{\pi}] \, , \tag{55}$$

onde os operadores $\hat{\mathcal{H}}$ e $\hat{\vec{p}}$ são Hermiteanos. As equações de movimento são escritas via o princípio da correspondência de Dirac $\{,\} \to -i[,]$, levando a

$$\begin{aligned} i\partial_0\hat{\phi} &= \left[\hat{\phi}, \int d^3\vec{x}\hat{\mathcal{H}}\right], \\ i\partial_0\hat{\pi} &= \left[\hat{\pi}, \int d^3\vec{x}\hat{\mathcal{H}}\right], \end{aligned} \tag{56}$$

correspondendo a uma descrição de Heisenberg para a dinâmica dos observáveis quânticos. Observe que temos as seguintes relações cinemáticas

$$\left[\hat{\phi}, \hat{\phi}\right] = 0, \qquad \left[\hat{\pi}, \hat{\pi}\right] = 0,$$
$$\left[\hat{\phi}(t,\vec{y}), \hat{\pi}(t,\vec{x})\right] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{57}$$

com as consequentes equações de movimento,

$$\partial_0\hat{\phi} = \hat{\pi}, \quad \partial_0\hat{\pi} = \partial_0^2\hat{\phi} = \nabla^2\hat{\phi} + \nabla\hat{V}. \tag{58}$$

Neste caso, a solução da equação quântica livre de KGF ($\Box\hat{\phi} = 0$, com $\hat{V} = \hat{0}$) pode ser dada seguindo a mesma metodologia do caso clássico de campos,

$$\hat{\phi}(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2\omega_{\vec{p}}} \left\{\hat{a}_{\vec{p}} \exp[-ip^\mu x_\mu] + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \exp[ip^\mu x_\mu]\right\} \tag{59}$$

$$\hat{\pi} = \partial_0\hat{\phi}, \tag{60}$$

sendo que, na teoria quântica, os coeficientes $\hat{a}_{\vec{p}}$ e $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$ são promovidos a operadores de destruição e criação respectivamente. As relações cinemáticas de comutação têm como consequência,

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}] = 2\omega_{\vec{p}}\delta^3(\vec{p}'-\vec{p}), \tag{61}$$
$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = \hat{0}, \tag{62}$$
$$[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}] = \hat{0}. \tag{63}$$

Deste modo, com as equações anteriores podemos escrever os observáveis físicos na representação de momentos,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{p}\,\omega_{\vec{p}} \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right], \tag{64}$$
$$\hat{\vec{P}} = \int d^3x\vec{p} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{p}\,\vec{p} \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right]. \tag{65}$$

Tendo em vista a álgebra de operadores de criação e destruição, esperamos que os operadores físicos (energia, momento, momento angular, etc...) sejam quantidades nulas ao atuar no estado de nenhuma partícula (vácuo)[12],

$$\hat{H}|0\rangle = 0|0\rangle, \tag{66}$$
$$\hat{\vec{P}}|0\rangle = \vec{0}|0\rangle, \tag{67}$$

com este intuito definimos a operação de ordenamento normal[13],

$$:\hat{H}: \;=\; \frac{1}{2}\int d^3\vec{p}\,\omega_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}, \tag{68}$$
$$:\hat{\vec{P}}: \;=\; \frac{1}{2}\int d^3\vec{p}\,\vec{p}\,\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}. \tag{69}$$

3.2. O formalismo de integração funcional de Schwinger

O fato das equações quânticas preservarem sua forma clássica a valores médios, via teorema de Ehrenfest, nos leva a perguntar sobre a existência de um princípio de ação variacional que seja quântico. Para responder a esta pergunta, consideramos que os estados evoluem no espaço de Hilbert da seguinte forma

$$i\partial_0 |\phi\rangle = \hat{H}|\phi\rangle. \tag{70}$$

Supondo que exista um operador evolução temporal

$$|\phi', t'\rangle = U(t',t)\,|\phi, t\rangle, \tag{71}$$

com determinadas propriedades, que não vamos detalhar aqui, somos conduzidos ao resultado

$$i\partial_0 U(t',t) = \hat{H}U(t',t), \tag{72}$$

onde, para intervalos infinitesimais ($t' = t + dt$), temos que

$$\begin{aligned} U(t',t) &= \exp[i\hat{H}dt] \\ &\simeq I + i\hat{H}dt. \end{aligned} \tag{73}$$

A solução geral seria dada por

$$U(t',t) = \exp\int_t^{t'} i\hat{H}\,dt. \tag{74}$$

Podemos estudar algumas propriedades da evolução e projeção de estados por meio do seguinte objeto,

$$\langle\phi', t'\,|\phi, t\rangle \tag{75}$$

denominado amplitude de transição[14]. Vamos aplicar variações nessa amplitude de transição, variando a forma do campo e o parâmetro temporal, conforme os geradores de translações do campo (momento) e translações temporais (Hamiltoniana) respectivamente,

$$\delta\,\langle\phi', t'\,|\phi, t\rangle \tag{76}$$

[12] A relação entre o vácuo e as condições de contorno (Efeito Casimir) pode ser vista em [60].
[13] Em Teoria Quântica de Campos temos duas operações bastante conhecidas, o ordenamento temporal e o normal, relacionados pelo Teorema de Wick [56].
[14] Para maiores detalhes sobre esse objeto, por exemplo, o cálculo explícito pelas integrais de caminho (configurações de campo) de Feynman, veja [57].

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0346

sabendo que

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left|\phi,t\right\rangle = -i\hat{\pi}\left|\phi,t\right\rangle \,,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi,t\right\rangle = i\hat{H}\left|\phi,t\right\rangle ,\qquad (77)$$

obtemos

$$\delta\left\langle\phi',t'\right.\left|\phi,t\right\rangle = i\left\langle\phi',t'\right|\left\{\int d^3\vec{x}[\hat{\pi}(\vec{x},t')\delta\hat{\phi}(\vec{x},t') -\hat{\pi}(\vec{x},t)\delta\hat{\phi}(\vec{x},t)] - \hat{H}(t')\delta t' + \hat{H}(t)\delta t\right\}\left|\phi,t\right\rangle . \quad (78)$$

Agora pensando em intervalos de tempo infinitesimais

$$\hat{\pi}(\vec{x},t+dt) = \hat{\pi}(\vec{x},t) + \frac{d\hat{\pi}(\vec{x},t)}{dt}dt = \hat{\pi}(\vec{x},t) - i[\hat{\pi},\hat{H}]dt\,,$$

$$\hat{H}(t+dt) = \hat{H}(t) + \frac{\partial\hat{H}}{\partial t}dt\,,$$
(79)

somos conduzidos ao resultado

$$\delta\left\langle\phi',t'\right.\left|\phi,t\right\rangle = i\left\langle\phi',t'\right|\int d^3 \times\vec{x}\left\{\hat{\pi}(\vec{x},t)\left[\delta\hat{\phi}(\vec{x},t+dt) - \delta\hat{\phi}(\vec{x},t)\right]\right\} + -dt\int d^3\vec{x}\, i\left[\hat{\pi},\hat{H}\right]\delta\hat{\phi}(\vec{x},t) - \hat{H}(t)\delta dt -dt\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\delta t\left|\phi,t\right\rangle , \quad (80)$$

ou ainda

$$\delta\left\langle\phi',t'\right.\left|\phi,t\right\rangle = i\left\langle\phi',t'\right|\int d^3\vec{x}\hat{\pi}\delta[\partial_0\hat{\phi}]dt + -\,dt\int d^3\vec{x}\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial\hat{\phi}}\delta\hat{\phi} - \hat{H}\delta dt - dt\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\delta t\left|\phi,t\right\rangle . \quad (81)$$

Observe que

$$\delta\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{x}[\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial\hat{\phi}}\delta\hat{\phi} + \frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial\hat{\pi}}\delta\hat{\pi}] + \frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\delta t, \quad (82)$$

e neste caso,

$$\delta\left\langle\phi',t'\right.\left|\phi,t\right\rangle = i\left\langle\phi',t'\right|\delta\left(\int d^3\vec{x}\hat{\pi}(\vec{x},t)\partial_0\hat{\phi}(\vec{x},t) -\hat{H}(t)dt\right)\left|\phi,t\right\rangle , \quad (83)$$

em que desconsideramos termos de segunda ordem. Logo

$$\delta\left\langle\phi',t'\right.\left|\phi,t\right\rangle = i\left\langle\phi',t'\right|\delta[dt\int d^3\vec{x}[\hat{\pi}\partial_0\hat{\phi} - \hat{\mathcal{H}}]\left|\phi,t\right\rangle \quad (84)$$
$$= i\left\langle\phi',t'\right|\delta[dt\int d^3\vec{x}\hat{\mathcal{L}}]\left|\phi,t\right\rangle \,.$$

Estendendo o resultado anterior para um intervalos de tempo $\triangle t = t' - t$,

$$\delta\left\langle\phi',t'\right.\left|\phi,t\right\rangle = i\left\langle\phi',t'\right|\delta(\int d^4x\,\mathcal{L})\left|\phi,t\right\rangle \quad (85)$$
$$= \left\langle\phi',t'\right| i\delta\hat{S}\left|\phi,t\right\rangle \,,$$

onde $\hat{S}$ é uma ação quântica.

Como vemos, temos em (85) uma equação variacional a valores de operadores. Utilizando o método de Green podemos encontrar uma equação geradora em termos da linguagem de integração funcional[15]

$$\delta Z[J,\varsigma] = i\delta S Z[J,\varsigma]\,, \quad (88)$$

em que J e ς são fontes clássicas para o campo ϕ e momenta π respectivamente.

A solução para a equação anterior é dada em termos de uma transformada de Fourier funcional

$$Z[J,\varsigma] = \int D\phi D\pi Z[\phi,\pi]\exp[iJ\phi]\exp[i\varsigma\pi], \quad (89)$$

com solução dada por

$$Z[\phi,\pi] = \exp[iS], \quad (90)$$

onde

$$S = \int d^4x\left[\pi(\partial_0\phi) - \frac{1}{2}\pi^2 - \partial_i\phi\partial_i\phi - V(\phi)\right] . \quad (91)$$

O conceito por trás da passagem anterior está relacionado aos estados assintoticamentes livres e a definição da matriz de espalhamento $\mathcal{S}$,

$$Z = \left\langle out\right| U(\infty,-\infty)\left|in\right\rangle ,$$
$$\mathcal{S} = U(\infty,-\infty). \quad (92)$$

Como a ação é quadrática nos momentos, podemos fazer a seguinte transformação

$$\pi(\partial_0\phi) - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}[\partial_i\phi\partial_i\phi - m^2\phi^2] \to -\frac{1}{2}(\pi+\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}[\partial_i\phi\partial_i\phi + m^2\phi^2] -V(\phi) = -\frac{1}{2}(\pi+\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (93)$$

e nesse caso

$$Z[J] = N\int D\phi\exp[iS_{ef}]\,, \quad (94)$$

[15]Na passagem extraímos o operador de ação quântica do "sanduíche" de estados,

$$\left\langle\phi',t'\right.\left|\phi,t\right\rangle = Z[J,\varsigma]\,, \quad (86)$$
$$\left\langle\phi',t'\right| i\delta\hat{S}[\hat{\phi},\hat{\pi}]\left|\phi,t\right\rangle = i\delta S\left[\frac{\delta}{i\delta J},\frac{\delta}{i\delta\varsigma}\right] Z[J,\varsigma]. \quad (87)$$

Para maiores detalhes sobre o formalismo de integração funcional veja as referências em [25].

onde

$$S_{ef} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + J\phi\right] \tag{95}$$

e

$$N = \int D\pi \exp\left[-i\int d^4x \, \frac{1}{2}\left(\pi + \partial_0\phi\right)^2\right] \tag{96}$$

é uma constante de normalização. Portanto, escrevemos o princípio da ação quântica da seguinte forma

$$\begin{aligned}\langle 0|\frac{\delta S_{ef}}{\delta\phi}|0\rangle &= \int D\phi \, \frac{\delta S_{ef}}{\delta\phi}\exp[iS_{ef}] \\ &= \frac{\delta S_{ef}}{\delta\phi}\bigg|_{\phi=\frac{\delta}{i\delta J}} Z[J]\,.\end{aligned} \tag{97}$$

A partir da equação anterior, podemos gerar as funções de Green da teoria com derivadas funcionais adequadas.

4. Radiação de corpo negro no formalismo de operadores

Neste momento estamos aptos a descrever o comportamento de um corpo negro no formalismo de operadores de criação e destruição térmicos e fazer conexões com a descrição heurística descrita na seção **??** [47, 61]. Implícito nas discussões desse capítulo estão os conceitos associados à descrição do equilíbrio termodinâmico no *ensemble* canônico e o uso da matriz densidade de estados para descrever o equilíbrio termodinâmico dos estados em mecânica quântica [7, 9].

Iniciamos o estudo descrevendo partículas (relativísticas) em uma caixa cúbica de volume L^3 com a condição de fronteira periódicas[16] nos campos quânticos $\hat{\phi}$,

$$\begin{aligned}\phi(t,x,y,z) &= \phi(t,x+L,y,z),\\ \phi(t,x,y,z) &= \phi(t,x,y+L,z),\\ \phi(t,x,y,z) &= \phi(t,x,y,z+L),\end{aligned} \tag{98}$$

o que implica na quantização do momento,

$$p = \frac{2\pi}{L}s,\; s = (s_x, s_y, s_z),\; s_x, s_y, s_z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{99}$$

e conseqüentemente na seguinte relação entre a integração nos momentos e a soma nos índices s,

$$\int d^3\vec{p} \leftrightarrow \frac{(2\pi)^3}{L^3}\sum_s, \tag{100}$$

sendo $L^3 = V$ o volume da caixa. O operador energia na representação de momentos seria dado por

$$:\hat{H}: = \sum_s \omega_{\vec{p}_s}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_s}\hat{a}_{\vec{p}_s}\,, \tag{101}$$

com os operadores de criação e destruição satisfazendo a seguinte relação de comutação,

$$[\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_s}, \hat{a}_{\vec{p}_{s'}}] = \delta_{ss'}\,. \tag{102}$$

Observe que temos um operador número de partículas com um dado momento $\hat{N}_{\vec{p}_s}$,

$$\hat{N} = \sum_s \hat{N}_{\vec{p}_s}, \quad \hat{N}_{\vec{p}_s} = \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_s}\hat{a}_{\vec{p}_s}, \tag{103}$$

relacionado à Hamiltoniana do sistema através de

$$:\hat{H}: = \sum_s \omega_{\vec{p}_s}\hat{N}_{\vec{p}_s}\,.$$

Lembrando-se das propriedades dos operadores de criação e destruição de partículas de radiação

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_{s'}}] = \sum_s [\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_s}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_{s'}}] = \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_{s'}}\,, \tag{104}$$

$$[\hat{N}, \hat{a}_{\vec{p}_{s'}}] = -\hat{a}_{\vec{p}_{s'}}\,, \tag{105}$$

construímos os auto-estados do operador $:\hat{H}:$ satisfazendo

$$\hat{N}|n_{\vec{p}_s}\rangle = n|n_{\vec{p}_s}\rangle\,, \tag{106}$$

$$:\hat{H}:|n_{\vec{p}_s}\rangle = n\omega_{\vec{p}_s}|n_{\vec{p}_s}\rangle, \quad :\hat{H}:|0\rangle = 0\,. \tag{107}$$

Agora com o operador hamiltoniano $:\hat{H}:$ na representação de momentos, podemos fazer a conexão com a descrição de campos em equilíbrio, definindo o que seria uma média térmica da seguinte forma,

$$N \doteq \langle\hat{N}\rangle = \sum_s \langle\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_s}\hat{a}_{\vec{p}_s}\rangle\,, \tag{108}$$

$$U \doteq \langle :\hat{H}: \rangle = \sum_s \omega_{\vec{p}_s}\langle\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_s}\hat{a}_{\vec{p}_s}\rangle, \tag{109}$$

onde a média térmica é dada de maneira explícita pela matriz densidade de estados de ocupação

$$\hat{\rho}_s = \exp[-\beta :\hat{H}:]\sum_{n=0}^{\infty}|n_{\vec{p}_s}\rangle\langle n_{\vec{p}_s}|\,, \tag{110}$$

tendo em vista o espectro do operador hamiltoniano. Temos como consequência que

$$\begin{aligned}N &= \sum_s \frac{\mathrm{tr}(\hat{\rho}_s\hat{N}_{\vec{p}_s})}{tr\hat{\rho}_s} = \sum_s \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\exp[-\beta n\omega_{\vec{p}_s}]}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp[-\beta n\omega_{\vec{p}_s}]}\\ &= \sum_s \frac{1}{\exp(\beta\omega_{\vec{p}_s}) - 1}\,,\end{aligned} \tag{111}$$

$$U = \sum_s \omega_{\vec{p}_s}\langle\hat{N}_{\vec{p}_s}\rangle = \sum_s \frac{\omega_{\vec{p}_s}}{\exp(\beta\omega_{\vec{p}_s}) - 1}\,. \tag{112}$$

[16] A quantização de campos em uma caixa (muito grande, pensando que os campos se anulam nas bordas do espaço-tempo) com condições de Dirichlet é uma ferramenta muito útil em teoria de campos para regularizar algumas divergências [57]. Por exemplo, ao calcularmos as taxas de decaimentos ou secções de choque de processos físicos precisamos colocar os campos em uma caixa [62] para obter resultados finitos. Apesar desse caráter regularizador, condições de contorno (Dirichlet, Neumann) também servem para descrever interações associadas a energia de ponto zero dos campos [55].

Tomando limite para o contínuo[17] $(V \to \infty)$,

$$N = V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp{(\beta\omega_{\vec{p}})} - 1} \,, \qquad (113)$$

$$U = V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{p}}}{\exp{(\beta\omega_{\vec{p}})} - 1} \,. \qquad (114)$$

Observe que

$$\begin{aligned} U &= \frac{V}{2\pi^2} \int d\omega \frac{\omega^3}{\exp(\beta\omega) - 1} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \Gamma(3)\zeta(4) \\ &= \frac{\pi^2}{30} V k^4 T^4 \,, \qquad (115) \end{aligned}$$

condizendo com a Lei de Stefan-Boltzmann, vide a Eq. (12).

Por outro lado, para encontrarmos a função de partição[18] e reciprocamente a matriz densidade de estados[19] $Z = \mathrm{tr}(\hat{\rho})$, partiremos do *ansatz*[20]

$$Z = \prod_s \mathrm{tr}(\hat{\rho}_s) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}). \qquad (116)$$

Deste modo, tendo em vista a definição da energia livre de Helmholtz,

$$\begin{aligned} A &= -kT \ln Z = -kT \sum_s \ln \mathrm{tr}(\hat{\rho}_s) \\ &= -kTV \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[1 - \exp{(-\beta\omega_{\vec{p}})}]^{-1} \,, (117) \end{aligned}$$

logo temos que a energia interna é dada por

$$U \doteq A - T\frac{\partial A}{\partial T} = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[1 - \exp{(-\beta\omega_{\vec{p}})}] \qquad (118)$$

$$= V \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{p}} \exp{(-\beta\omega_{\vec{p}})}}{[1 - \exp{(-\beta\omega_{\vec{p}})}]} \,, \qquad (119)$$

de acordo com a Eq. (113). Da mesma forma, poderíamos encontrar a pressão da radiação P,

$$\begin{aligned} P &\doteq -\frac{\partial A}{\partial V} = kT \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \ln[1 - \exp{(-\beta\omega_{\vec{p}})}]^{-1} \\ &= -\frac{kT}{2\pi^2} \int d\omega\, \omega^2 \ln[1 - \exp{(-\beta\omega_{\vec{p}})}] \,, \qquad (120) \end{aligned}$$

onde fazendo uma integral por partes $udv = d\,(uv) - vdu$, com

$$u = \ln[1 - \exp{(-\beta\omega_{\vec{p}})}], \quad dv = d\omega\omega^2,$$

concluímos que

$$P = \frac{1}{3}\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega\omega^3 \frac{1}{[\exp{(\beta\omega)} - 1]} = \frac{1}{3}\frac{U}{N}, \qquad (121)$$

recuperando a equação de estado (21), e mostrando a consistência de descrever o comportamento da radiação de corpo negro com uma linguagem de campos quânticos em equilíbrio termodinâmico.

[17] Se não colocarmos as partículas em uma caixa teríamos deltas de Dirac do tipo $\delta^3(0)$, onde

$$(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p'}) = \int d^3\vec{x} exp[-i(\vec{p} - \vec{p'})\vec{x}]|_{\vec{p} = \vec{p'}} = \int d^3\vec{x} = V,$$

ou seja

$$\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3} \,,$$

mostrando como as condições de contorno funcionam como uma regularização para o valor de $\delta^3(0)$.

[18] É valido observar que a função de partição e, consequentemente, a física que derivamos do formalismo, é independente da escolha de representação (coordenadas/momento),

$$Z = tr(\hat{\rho}) = \sum_\alpha \langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle,$$

em que $|\alpha\rangle$ é um membro de um conjunto completo de estados

$$\langle\alpha||\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = I.$$

[19] A descrição do equilíbrio termodinâmico em mecânica quântica e o conceito de densidade de estados pode ser construído no *ensemble* microcanônico cujas médias térmicas são definidas por meio de dois postulados, estados equiprováveis e fases randômicas [9].

[20] Podemos definir a entropia quântica da seguinte forma,

$$\hat{S} \doteq \ln(\hat{\rho}).$$

Neste caso pelo princípio variacional da máxima entropia,

$$\delta[\lambda_1\langle\hat{I}\rangle + \lambda_U\langle\hat{H}\rangle - \langle\hat{S}\rangle] = 0, \quad \langle\hat{H}\rangle = tr(\hat{\rho}\hat{H}), \quad S = tr(\hat{\rho}\hat{S}),$$

$$tr\{[(\lambda_1 - 1) + \lambda_U\hat{H} - \ln(\hat{\rho})]\delta\hat{\rho}\} \Rightarrow (\lambda_1 - 1) + \lambda_U\hat{H} - \ln(\hat{\rho}) = \hat{0}.$$

Consequentemente, ao calcularmos o traço da última equação temos a seguinte equação,

$$TS = A + U, \quad A = -kT\ln(tr\hat{\rho}), \quad \lambda_U = -\frac{1}{kT},$$

em que $\langle\hat{I}\rangle = 1$ e $\hat{\rho} = \exp(\lambda_U\hat{H})$, e A é a energia livre de Helmhotz

5. Radiação de corpo negro no formalismo de integração funcional

Vamos agora construir o formalismo de integração funcional (Matsubara-Fradkin) para descrever o comportamento de um corpo negro e fazer conexões com o formalismo de operadores na descrição heurística [63–66].

5.1. Matriz densidade de estados e a abordagem de Matsubara-Fradkin

Iniciamos a discussão escrevendo a matriz densidade de estados na representação de coordenadas[21]

$$\hat{\rho}_J = \exp(-\beta \hat{H}_T),$$
$$\hat{H}_T = \int d^3\vec{x}\ \hat{\mathcal{H}}_T,$$
$$\hat{\mathcal{H}}_T = \hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}_J, \tag{122}$$
$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hat{\pi}\hat{\pi} - \frac{1}{2}\nabla\hat{\phi}\nabla\hat{\phi}, \quad \hat{\mathcal{H}}_J = J\hat{\phi}\,, \tag{123}$$

na qual temos um termo $\hat{\mathcal{H}}_J$ que representa uma interação entre fontes externas clássicas e campos quânticos. Sendo assim, podemos escrever uma equação de Bloch

$$\frac{\partial \hat{\rho}_J}{\partial \beta} = -\hat{H}_T \hat{\rho}_J\,, \tag{124}$$
$$\hat{\rho}_J \doteq \hat{\rho}\hat{\mathcal{S}}, \tag{125}$$

e consequentemente vemos o surgimento das transformações de similaridade e a dependência da temperatura,

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial \beta} = -(\hat{\rho}^{-1}\hat{H}_T\hat{\rho})\hat{\mathcal{S}}\,, \tag{126}$$

onde observamos as propriedades

$$\hat{H}_T(\beta) = \hat{\rho}^{-1}(\beta)\hat{H}_T\hat{\rho}(\beta), \tag{127}$$
$$\hat{\rho}^{-1}(\beta) = \hat{\rho}(-\beta), \quad \hat{\rho}^{-1}\hat{\rho} = 1. \tag{128}$$

A equação de Bloch pode ser escrita na forma integral

$$\hat{\mathcal{S}}(\beta) - \hat{\mathcal{S}}(0) = -\int_0^\beta d\tau \hat{H}_J(\tau)\hat{S}(\tau)\,, \tag{129}$$
$$\hat{\mathcal{S}}(\beta) = \hat{1} - \int_0^\beta d\tau \hat{H}_J(\tau)\hat{\mathcal{S}}(\tau), \tag{130}$$

que seria uma equação do tipo Volterra, cuja solução pode ser encontrada de maneira iterativa

$$\hat{\mathcal{S}}(\beta) = \hat{1} - \int_0^\beta d\tau_1 \hat{H}_J(\tau_1)\left[\hat{1} - \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \hat{H}_J(\tau_2)\hat{\mathcal{S}}(\tau_2)\right], \tag{131}$$
$$\hat{\mathcal{S}}(\tau_2) = \hat{1} - \int_0^{\tau_2} d\tau_3 \hat{H}_J(\tau_3)(\hat{1} - ...)\,. \tag{132}$$

Procedendo indefinidamente com a iteração podemos dizer que

$$\hat{\mathcal{S}}(\beta) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \prod_{j=1}^{n}\int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j \hat{H}_J(\tau_j), \quad \tau_0 = \beta. \tag{133}$$

Com a ajuda da função degrau $\theta(\tau)$, e a operação de ordenamento da temperatura T,

$$T[\hat{A}(\tau_1)\hat{A}(\tau_2)] = \theta(\tau_1 - \tau_2)\hat{A}(\tau_1)\hat{A}(\tau_2) + \theta(\tau_2 - \tau_1)\hat{A}(\tau_2)\hat{A}(\tau_1)\,, \tag{134}$$

podemos dizer que

$$\hat{\mathcal{S}}(\beta) = T\left\{\exp\left[-\int_0^\beta d\tau \hat{H}_J(\tau)\right]\right\}, \tag{135}$$

ou, de maneira geral,

$$\hat{\mathcal{S}}(\tau', \tau) = T\left\{\exp\left[-\int_\tau^{\tau'} d\tau \hat{H}_J(\tau)\right]\right\}. \tag{136}$$

Derivando a Eq. (135) com respeito a uma fonte, obtemos

$$\frac{\delta\hat{\mathcal{S}}(\beta)}{\delta J(\tau,\vec{x})} = \frac{\delta}{\delta J(\tau,\vec{x})}\left[-\int_0^\beta d\tau_1 \int d^3\vec{y} J(\tau_1,\vec{y})\hat{\phi}(\tau_1,\vec{y})\right]\hat{\mathcal{S}}(\beta) = -T\left[\hat{\phi}(\tau,\vec{x})\hat{\mathcal{S}}(\beta)\right]. \tag{137}$$

Se $\beta > \tau$,

$$\frac{\delta\hat{\mathcal{S}}(\beta)}{\delta J(\tau,\vec{x})} = -\hat{S}(\beta)\hat{\phi}(\tau,\vec{x})\,, \tag{138}$$

[21] A maneira como separamos a interação na hamiltoniana e os métodos utilizados ao longo de texto se assemelham com a resolução do problema de interação quântica na descrição de Dirac [56].

desse modo,

$$\frac{\delta \hat{\rho}_J(\beta)}{\delta J(\tau,\vec{x})} = \hat{\rho}(\beta)\frac{\delta \hat{\mathcal{S}}(\beta)}{\delta J(\tau,\vec{x})} \tag{139}$$
$$= -\hat{\rho}(\beta)\hat{\mathcal{S}}(\beta)\hat{\phi}(\tau,\vec{x}) \tag{140}$$
$$= -\hat{\rho}_J(\beta)\hat{\phi}(\tau,\vec{x})\,. \tag{141}$$

Da mesma forma,

$$\frac{\delta^2 \hat{\mathcal{S}}(\beta)}{\delta J(\alpha,\vec{y})J(\tau,\vec{x})} = \hat{\mathcal{S}}(\beta)T[\hat{\phi}(\alpha,\vec{y})\hat{\phi}(\tau,\vec{x})]\,, \tag{142}$$

e

$$\frac{\delta^2 \hat{\rho}_J(\beta)}{\delta J(\alpha,\vec{y})J(\tau,\vec{x})} = \hat{\rho}_J(\beta)T[\hat{\phi}(\alpha,\vec{y})\hat{\phi}(\tau,\vec{x})]\,. \tag{143}$$

Logo, podemos definir a função de partição Z,

$$Z[J] = \mathrm{tr}\hat{\rho}_J(\beta)\,, \tag{144}$$
$$Z[J=0] = \mathrm{tr}\hat{\rho}(\beta) = Z(\beta), \tag{145}$$

e calcular médias térmicas por meio do traço das expressões anteriores

$$\langle\hat{\phi}(\tau,\vec{x})\rangle = \frac{\mathrm{tr}[\hat{\rho}(\beta)\hat{\phi}(\tau,\vec{x})]}{\mathrm{tr}\hat{\rho}(\beta)} = \frac{1}{Z(\beta)}\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(\tau,\vec{x})}\right|_{J=0}, \tag{146}$$
$$\langle T\hat{\phi}(\alpha,\vec{y})\hat{\phi}(\tau,\vec{x})\rangle = \frac{\mathrm{tr}[\hat{\rho}(\beta)T\hat{\phi}(\alpha,\vec{y})\hat{\phi}(\tau,\vec{x})]}{\mathrm{tr}\hat{\rho}(\beta)} = \frac{1}{Z(\beta)}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(\alpha,\vec{y})J(\tau,\vec{x})}\right|_{J=0}. \tag{147}$$

Como vimos, na discussão clássica de campos a evolução das quantidades físicas no espaço de fase é dada em termos do parênteses de Poisson $\{,\}_P$ das quantidades físicas com o gerador de translações temporais, que no caso é a hamiltoniana, e temos um conjunto de equações representado os parênteses de Poisson fundamentais das variáveis canônicas. Seguindo a regra de quantização de Dirac, as quantidades físicas se transformam em operadores hermitianos atuando no espaço de Hilbert e os parênteses de Poisson se transformam em comutadores $\{,\}_P \to -i[,]$. O equilíbrio termodinâmico pode ser descrito supondo a independência temporal ($t=0$) e implementando a dependência da temperatura pelas transformações de similaridade, vide Eq. (126), sendo assim temos que

$$\hat{\rho} = \exp[-\beta\hat{H}]\,, \tag{148}$$
$$\hat{\phi}(\beta,\vec{x}) = \hat{\rho}^{-1}\hat{\phi}(t=0,\vec{x})\hat{\rho}\,, \tag{149}$$
$$\hat{\pi}(\beta,\vec{x}) = \hat{\rho}^{-1}\hat{\pi}(t=0,\vec{x})\hat{\rho}\,, \tag{150}$$

sendo que as equações de movimento dos operadores térmicos são dadas por

$$\frac{\partial\hat{\phi}(\beta,\vec{x})}{\partial\beta} = -[\hat{\phi}(\beta,\vec{x}),\hat{H}]\,, \tag{151}$$
$$\frac{\partial\hat{\pi}(\beta,\vec{x})}{\partial\beta} = -[\hat{\pi}(\beta,\vec{x}),\hat{H}]\,, \tag{152}$$

com os comutadores térmicos fundamentais

$$[\hat{\phi}(\beta,\vec{x}),\hat{\phi}(\beta,\vec{y})] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \quad [\hat{\phi}(\beta,\vec{x}),\hat{\phi}(\beta,\vec{y})] = 0, \quad [\hat{\pi}(\beta,\vec{x}),\hat{\pi}(\beta,\vec{y})] = 0. \tag{153}$$

Das equações de movimento térmicas,

$$\frac{\partial\hat{\phi}(\beta,\vec{x})}{\partial\beta} = -\left[\hat{\phi}(\beta,\vec{x}),\int d^3\vec{y}\left(\frac{1}{2}\hat{\pi}\hat{\pi}-\frac{1}{2}\nabla\hat{\phi}\nabla\hat{\phi}\right)\right] = -i\hat{\pi}(\beta,\vec{x}), \tag{154}$$
$$\frac{\partial^2\hat{\phi}(\beta,\vec{x})}{\partial\beta^2} = -i\frac{\partial\hat{\pi}(\beta,\vec{x})}{\partial\beta} = -i\left[\hat{\pi}(\beta,\vec{x}),\int d^3\vec{y}\left(\frac{1}{2}\hat{\pi}\hat{\pi}-\frac{1}{2}\nabla\hat{\phi}\nabla\hat{\phi}\right)\right] = -\nabla^2\hat{\phi}(\beta,\vec{x}), \tag{155}$$

concluímos que

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\nabla^2\right]\hat{\phi}(\beta,\vec{x})=0, \tag{156}$$

$$\triangle\hat{\phi}(\beta,\vec{x})=0, \quad \triangle\doteq-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\nabla^2\,. \tag{157}$$

Daqui percebemos que a estrutura matemática que descreve o comportamento de campos em equilíbrio termodinâmico se expressa naturalmente no espaço euclidiano.

Incluindo as fontes externas, segundo Schwinger, nas equações de movimento, teríamos que

$$\triangle\hat{\phi}(\beta,\vec{x})=J(\beta,\vec{x})\,, \tag{158}$$

e neste caso

$$\triangle[\mathrm{tr}\hat{\rho}_J\hat{\phi}(\beta,\vec{x})]=[\mathrm{tr}\hat{\rho}_J]J(\beta,\vec{x})\,, \tag{159}$$

ou seja,

$$\triangle\langle\hat{\phi}(\beta,\vec{x})\rangle=J(\beta,\vec{x})\,, \tag{160}$$

$$\triangle\frac{\delta Z[J]}{\delta J(\beta,\vec{x})}=Z[J]J(\beta,\vec{x})\,. \tag{161}$$

Sendo assim, podemos escrever a seguinte equação para a função de Green de dois pontos,

$$\triangle G(\tau,\vec{y};\beta,\vec{x}))=\delta(\tau-\beta)\delta^3(\vec{y}-\vec{x})\,, \tag{162}$$

$$G(\tau,\vec{y};\beta,\vec{x}))\doteq\frac{1}{Z[J]}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(\tau,\vec{y})J(\beta,\vec{x})}\right|_{J=0}\,. \tag{163}$$

Desse modo, podemos extrair a função de partição como solução da equação anterior,

$$Z[J]=Z[0]\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^\beta d\alpha\int d^3\vec{y}\int_0^\beta d\tau\int d^3\vec{x}J(\tau,\vec{y})G(\alpha,\vec{y};\tau,\vec{x})J(\tau,\vec{x})\right]\,, \tag{164}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma[22][23],

$$Z[J]=\int D\phi\exp\left[-\int_0^\beta d\tau\int d^3\vec{x}\left(\frac{1}{2}\hat{\phi}\Delta\hat{\phi}+J\hat{\phi}\right)\right]\,, \tag{166}$$

que é solução da equação variacional de Fradkin

$$\delta[tr\hat{\rho_J}(\beta)]=tr[\delta\hat{S}\hat{\rho}_J(\beta)]=\delta S[tr\hat{\rho_J}(\beta)]. \tag{167}$$

Dizemos que a Eq. (166) é uma transformada de Fourier funcional do objeto $\exp[-S]$, sendo S uma ação no espaço euclidiano,

$$S=\int_0^\beta d\tau\int d^3\vec{x}\,\frac{1}{2}\hat{\phi}\Delta\hat{\phi}. \tag{168}$$

Portanto, o estudo anterior nos leva a estabelecer a seguinte conexão entre a descrição quântica e a descrição térmica de uma teoria de campos

(espaço de Minkowski) $(t,\vec{x})\rightarrow(i\tau,\vec{x})$ (espaço Euclideano)

$\Box\rightarrow-\triangle$

$$\int D\phi\exp[-i\int d^4x\frac{1}{2}\phi\Box\phi]\rightarrow\int D\phi\exp\left[-\int_0^\beta d\tau\int d^3\vec{x}\frac{1}{2}\hat{\phi}\Delta\hat{\phi}\right]$$

elucidando o conceito de rotação de Wick para o tempo imaginário muito usado na literatura. Como vimos, o conceito que garante esse elo entre as teorias ($T=0$ e $T\neq0$) são as transformações de similaridade, vide Eq. (148).

---

[22] Se fizermos a translação de campos

$$\phi\rightarrow\phi-\int_0^\beta d\alpha\int d^3\vec{y}G(\alpha,\vec{y};\tau,\vec{x})J(\alpha,\vec{y}) \tag{165}$$

em Eq. (166), somos levados à Eq. (164).

[23] Observe que Eq. (166)

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0346

5.2. Energia livre de Helmholtz e a função de partição

Com o intuito de encontrar a energia livre de Helmholtz por meio da função de partição definida na Eq. (166) e, reciprocamente, as equações de estado que descrevem o gás de partículas relativísticas discutido ao longo do texto, escrevemos

$$Z(\beta) = \int D\phi \, \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int d^3\vec{x}\, \frac{1}{2}\hat{\phi}\Delta\hat{\phi}\right] = (\det\Delta)^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{169}$$

$$A = -kT\ln[Z(\beta)], \tag{170}$$

em que det é a operação de determinante. É interessante observar que o expoente do determinante nos diz os graus de liberdade físicos da teoria (no caso, 1 grau de liberdade), sendo a energia livre de Helmholtz escrita como $A = \frac{1}{2}kT\ln[\det\Delta]$. Lembrando do teorema da equipartição da energia temos $\frac{1}{2}kT$ para cada grau de liberdade físico. Classicamente a contagem dos graus de liberdade é dada pelo número de maneiras de propagar a energia, ou seja, o número de equações de onda. Anteriormente encontramos uma equação de onda (2º ordem) para o campo de KGF, logo temos 1 grau de liberdade físico apenas.

Devido a essas partículas estarem numa caixa de volume $V = L^3$, são impostas condições de contorno (periódicas) no campo ϕ nas bordas. Por outro lado, também devem ser consideradas condições periódicas associadas ao parâmetro que representa a temperatura, levando ao surgimento das frequências de Matsubara. A afirmação anterior pode ser demonstrada da seguinte forma,

$$G(0,\vec{x};\tau,\vec{y}) = \langle T\hat{\phi}(0,\vec{x})\hat{\phi}(\tau,\vec{y})\rangle = \frac{tr[\hat{\rho}(\beta)\hat{\phi}(0,\vec{x})\hat{\phi}(\tau,\vec{y})]}{tr\hat{\rho}(\beta)} = \frac{tr[\hat{\rho}(\beta)\hat{\phi}(0,\vec{x})[\hat{\rho}(\beta)^{-1}\hat{\rho}(\beta)]\hat{\phi}(\tau,\vec{y})]}{Z(\beta)} =$$
$$= \frac{tr[\hat{\phi}(-\beta,\vec{x})\hat{\rho}(\beta)\hat{\phi}(\tau,\vec{y})]}{Z(\beta)} = \frac{tr[\hat{\rho}(\beta)\hat{\phi}(\tau,\vec{y})\hat{\phi}(-\beta,\vec{x})]}{tr\hat{\rho}(\beta)} = G(-\beta,\vec{x};\tau,\vec{y}), \tag{171}$$

em que usamos as propriedades cíclicas do traço. Segue daqui a condição de periodicidade do campo[24] $\hat{\phi}(0,\vec{x}) = \hat{\phi}(-\beta,\vec{x})$. Portanto, a equação de auto-valores e auto-funções com condições de contorno periódicas pode ser formulada da seguinte maneira,

$$\Delta\hat{\phi}(\tau,\vec{x}) = 0, \quad \hat{\phi}(0,\vec{x}) = \hat{\phi}(\beta,\vec{x}), \quad \hat{\phi}(t,x,y,z) = \hat{\phi}(t,x+L,y,z), \tag{172}$$

$$\hat{\phi}(t,x,y,z) = \hat{\phi}(t,x,y+L,z), \quad \hat{\phi}(t,x,y,z) = \hat{\phi}(t,x,y,z+L). \tag{173}$$

A solução da equação anterior é dada na representação de momentos por

$$\hat{\phi}(\tau,\vec{x}) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n,\vec{p}} \exp\left[i\omega_n\tau + \vec{p}\cdot\vec{x}\right]\, \hat{\tilde{\phi}}_n(\vec{p}) \tag{174}$$

em que $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, n \in N$, são as frequências de Matsubara. Como vemos, lidamos com um problema de auto-valores e auto-funções associadas ao operador Δ.

Desta forma, podemos dizer que a função de partição na representação dos momentos é dada por[25]

$$Z(\beta) = (\det\Delta)^{-\frac{1}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n,\vec{p}} d\tilde{\phi}_n(\vec{p}) \exp[-\beta^2 \sum_{n,\vec{p}} [{\omega_n}^2 + \vec{p}^2]\tilde{\phi}_n^2(\vec{p})] = \tag{175}$$

$$= \prod_{n,\vec{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{\phi}_n(\vec{p}) \exp[-\beta^2 \sum_{n,\vec{p}} [{\omega_n}^2 + \vec{p}^2]\tilde{\phi}_n^2(\vec{p})] = \tag{176}$$

$$= \prod_{n,\vec{p}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^2[{\omega_n}^2 + \vec{p}^2]}} \propto \frac{1}{\sqrt{\prod_{n,\vec{p}} \beta^2[{\omega_n}^2 + \vec{p}^2]}}, \tag{177}$$

[24] É válido ressaltar que para o caso de campos fermiônicos temos condições anti-periódicas [65].

[25] Apenas como um guia de pensamento, seja a integral gaussiana,

$$g = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-\alpha x^2].$$

Em coordenadas polares, temos que

$$g^2 = \int\int dxdy \exp[-\alpha(x^2+y^2)] = 2\pi \int_0^\infty \rho d\rho \exp[-\alpha\rho^2] = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

e neste caso,

$$\det\Delta = \prod_{n,\vec{p}} \beta^2[\omega_n{}^2 + \vec{p}^2]. \tag{178}$$

Sendo assim, o problema de auto-valores e auto-funções nos leva a escrever a energia livre de Helmholtz da seguinte forma,

$$A = \frac{1}{2}kT\ln[\det\Delta] = \frac{1}{2}kT\ln\left\{\prod_{n,\vec{p}} \beta^2[\omega_n{}^2 + \vec{p}^2]\right\} = \frac{1}{2}kT\sum_{n,\vec{p}} \ln\left[(2\pi n)^2 + \omega^2\right] \tag{179}$$

$$= \frac{1}{2}kT\sum_{n,\vec{p}}\left\{\int_1^{(\beta\omega)^2} \frac{d\theta^2}{[\theta^2 + (2\pi n)^2]} + \ln\left[1 + (2\pi n)^2\right]\right\}. \tag{180}$$

Como o termo de logaritmo natural não depende do momento e a energia livre de Helmholtz deve ser finita, escrevemos

$$A = \frac{1}{2}kT\sum_{n,\vec{p}}\int_1^{(\beta\omega)^2} \frac{d\theta^2}{[\theta^2 + (2\pi n)^2]}. \tag{181}$$

Utilizando a identidade[26]

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{[n^2 + (\frac{\theta}{2\pi})^2]} = \frac{2\pi^2}{\theta}\left(1 + \frac{2}{\exp(\theta) - 1}\right) \tag{182}$$

na equação anterior, temos que

$$A = kT\sum_{\vec{p}}\int_1^{(\beta\omega)} d\theta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\theta) - 1}\right) = kT\sum_{\vec{p}}\int_1^{(\beta\omega)} \frac{d\theta}{2}\frac{\exp(\theta) + 1}{\exp(\theta) - 1} = \tag{183}$$

$$= kT\sum_{\vec{p}}\int_1^{(\beta\omega)} \frac{\cosh(\frac{\theta}{2})}{\operatorname{senh}(\frac{\theta}{2})} = kT\sum_{\vec{p}}\ln\left[\operatorname{senh}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\Big|_1^{\beta\omega}. \tag{184}$$

Logo,

$$A = kT\sum_{\vec{p}}\ln\left\{\exp\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)[1 - \exp(-\beta\omega)]\right\} = kTV\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\left\{\frac{\beta\omega}{2} + \ln[1 - \exp(-\beta\omega)]\right\}. \tag{185}$$

Por fim, a energia livre de Helmholtz física (regularizada, sem infinitos) será dada por

$$A = -kTV\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\ln[1 - \exp(-\beta\omega)]^{-1}, \tag{186}$$

condizendo com as equação discutida no formalismo dos operadores, vide eq. (117).

6. Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, apresentamos o comportamento da radiação em uma cavidade (corpo negro) de maneira heurística implementando conceitos relativísticos, quânticos e térmicos, e posteriormente descrevemos o problema em duas linguagens: o formalismo de operadores e o formalismo de integração funcional.

Na análise heurística da radiação de um corpo negro, além de encontrar a equação que descreve a emissão de radiação de um objeto com uma dada temperatura (a fórmula de Planck) e a equação de estado de uma gás de partículas de radiação, observamos a conexão entre a energia interna e a distribuição de Bose-Einstein, relacionada com o teorema Spin-Estatística e o fato de bósons poderem ocupar o mesmo estado quântico.

Em seguida, com o intuito de construir as ferramentas necessárias para a descrição térmica, estudamos o campo escalar não massivo de KGF em (3+1) dimensões. Das equações relativísticas (covariantes), construímos as equações ondulatórias de KGF (uma equação de 2º ordem) via o princípio da correspondência de Schrödinger, encontramos uma solução para a equação ondulatória e discutimos o princípio da incerteza de Heisenberg em uma teoria relativística. Com o objetivo de descrever processos físicos envolvendo colisões de duas ou várias partículas no espaço de Fock, quantizamos os campos seguindo primeiramente a prescrição de Dirac (formalismo de operadores). Para tanto, construímos o espaço de fase (duas equações de 1º ordem) e quantizamos fazendo quantidades físicas serem levadas a operadores hermitianos

[26] A demonstração dessa identidade pode ser vista no apêndice A.

atuando no espaço de Hilbert, e o parêntese de Poisson levado ao comutador. Posteriormente, quantizamos a teoria seguindo a prescrição de Schwinger (formalismo de integração funcional), com seu princípio variacional da ação quântica.

Para incluir o equilíbrio termodinâmico, nos baseamos primeiramente na estrutura construída anteriormente envolvendo os operadores de criação e destruição (formalismo de operadores). Apesar da física (matriz densidade de estados) não depender de representação (coordenadas/momento) escrevemos o operador hamiltoniano na descrição de momentos diretamente e definimos as médias térmicas envolvendo os operadores de criação e destruição com matriz densidade de estados.

Por outro lado, ao construir a abordagem de Matsubara-Fradkin (formalismo de integração funcional), iniciamos a discussão com o operador hamiltoniano na representação de coordenadas, ao definir a matriz densidade de estados. Em seguida, estabelecemos a conexão entre a descrição quântica e a descrição térmica de uma teoria quântica de campos relacionando com o conceito de rotação de Wick para o tempo imaginário, utilizando as transformações de similaridade. Outro aspecto importante, associado ao teorema da equipartição da energia e os graus de liberdade físicos, está no fato de visualizarmos os graus de liberdade da teoria ao encontrar a função de partição e, reciprocamente, a energia livre de Helmholtz.

Poderíamos dar continuidade ao estudo do formalismo de campos quânticos a temperatura finita, construindo a mesma estrutura téorica abordada no texto para descrever campos bosônicos (vetoriais, spin 1) e campos fermiônicos (espinoriais, spin 1/2) para descrever a radiação e matéria respectivamente. A interação entre a matéria e a radiação no equilíbrio termodinâmico seria estudada na prescrição do acoplamento mínimo dos campos, descrevendo as correções radiativas térmicas pelos diagramas de Feynman-Matsubara. Para o caso do campo escalar (spin 0) há a possibilidade de averiguar os efeitos térmicos perturbativos associados à auto-interação do tipo $\lambda\phi^4$ [67]. Como vimos, ao longo do texto reduzimos o tratamento da radiação de corpo negro ao caso de um campo escalar real não massivo descrevendo as partículas de radiação, mas a verdadeira descrição seria em termos das equações de Maxwell quânticas em equilíbrio termodinâmico. O leitor pode encontrar alguns detalhes sobre essa descrição no apêndice B. O incentivo em utilizar campos escalares não massivos (apesar do problema no infravermelho devido a falta de massa para os campos) para construir o formalismo do tempo imaginário é basicamente a simplicidade, evitando a discussão sobre vínculos em teorias de calibre, quantização covariante e o surgimento dos fantasmas. Porém vale salientar também que ao implementarmos a interação no campo escalar essa geraria uma massa para os campo devido as equações do Grupo de Renormalização, caso que não ocorreria no caso de campos de calibre vetoriais pois a simetria de calibre quântica (identidades de Ward-Takahashi-Fradkin) proibiriam os fótons de adquirirem massa (polarização transversal).

Vale citar também a analogia matemática entre a descrição da radiação de corpo negro e o efeito Casimir, tendo em vista que os dois problemas são descritos por meio de condições de contorno nos campos [60], conforme pode ser visto na Tabela 1. Uma sequência natural deste estudo seria explorar efeitos quânticos e térmicos nas flutuações quânticas de vácuo (Efeito Casimir) em diversas leituras ou formalismos.

Por fim, foi visto na introdução do texto que formulamos a segunda lei da termodinâmica baseando-se nas prescrição de Kelvin-Clausius, utilizando os ciclos de Carnot e o teorema de Clausius para formular uma função de estado denominada entropia (do Grego, transformação). A formulação anterior foi posta em bases axiomáticas por Carathéodory. Porém ao construirmos a termodinâmica de campos quânticos utilizamos ontológicamente como ponto de partida o formalismo de Gibbs-Helmohtz em termos de um princípio variacional de máxima entropia. Da mesma forma, a formulação variacional pela entropia foi posta em bases lógicas por Tisza-Callen [4,68]. Sendo assim, o procedimento lógico anterior nos equipa com um formalismo que permite responder conceitualmente como a entropia se traduz em campos quânticos térmicos e também estudar as equações de estado que descrevem as interações entre partículas e moléculas (interação dipólo-dipólo quântica de Van der Waals, Casimir) na natureza e procurar, por exemplo, a existência de transições de fase. Apesar de trabalharmos ao longo do texto com o formalismo do tempo imaginário (Matsubara-Fradkin) ao descrever o equilíbrio termodinâmico de nosso sistema físico existem situações onde a dependência temporal é essencial, como por exemplo na discussão de uma dinâmica fora do equilíbrio. Essa necessidade de implementar uma dependência temporal ao se estudar plasmas e matéria condensada motivou a construção de formalismos do tempo real em temperatura finita. Um desses métodos do tempo real é a formulação do tempo fechado (Schwinger-Mahanthapa-Bakshi-Keldysh) que possui a propriedade de duplicar os graus de liberdade emergentes. O fato de que o formalismo quântico é fortemente fundamentado nas bases das representações de álgebra linear sugere que a teoria de campos térmica precisa de uma estrutura de tempo real descrevendo os operadores. Essa teoria (Takahashi-Umezawa) é chamada hoje em dia de Dinâmica dos Campos Térmicos onde o espaço de Hilbert é duplicado devido ao requerimento de tempo real e a temperatura é introduzida pelas transformações de Bogoliubov [47].

Agradecimentos

A. F. Ferrari agradece à Fapesp pelo suporte financeiro, A. A. Nogueira agradece a (PNPD-Capes-UFABC) pelo suporte financeiro, e C. A. Pachelor agradece a Capes pelo suporte financeiro. Os autores agradecem J. P. Pereira e B. M. Pimentel pela leitura e sugestões ao trabalho. Os autores também agradecem aos pareceristas anônimos pelas sugestões ao material.

Material Suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:
Apêndice A
Apêndice B

Referências

[1] S. Weinberg, *To Explain the World* (HarperCollins Publishers, New York, 2015), 1st. ed.

[2] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison Wesley Publishing Company, California, 1963), 1st. ed.

[3] R. Reif, *Statistical Physics: Berkeley Physics Course vol. 5* (McGraw-Hill Book Company, 1967), 1st. ed.

[4] H.B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* (John Wiley and Sons, New York, 1988), 2nd. ed.

[5] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica vol. 2* (Editora Edgard Blücher, 2002), 4th. ed.

[6] M.J. Oliveira, *Termodinâmica* (Livraria da Física, São Paulo, 2012), 2nd ed.

[7] K. Huang, *Introduction to Statistical Physics* (Taylor and Francis, New York, 2002), 1st ed.

[8] S.R.A. Salinas, *Introdução à Física Estatística* (Edusp, São Paulo, 2005), 2nd. ed.

[9] K. Huang, *Statistical Physics* (John Wiley and Sons, New York 1987), 2st ed.

[10] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Phyisics Part 1* (Pergamon Press, Oxford, 1980).

[11] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Phyisics Part 2* (Pergamon Press, Oxford, 1980).

[12] S.R. Dahmen, Rev. Bras. Ens. Fis. **28**, 3 (2006).

[13] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics* (John Wiley and Sons, New York, 1975), 1st ed; D. Zubarev, V. Morozov and G. Roepke, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, Volume 1: Basic Concepts, Kinetic Theory* (Akademie Verlag, Berlin, 1996), 1st ed.

[14] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Physical Kinetics* (Pergamon Press, Oxford, 1981).

[15] M. Planck and M. Masius, *The Theory of Heat Radiation* (Blakiston's Son and Co., Philadelphia, 1914), 1st. ed; M. Planck *The Origin and Development of the Quantum Theory* (Clarendon Press, Oxford, 1922), 1st. ed; M. Planck *Treatise on Thermodynamics* (Dover Publications, New York, 1945), 3rd. ed.

[16] N. Studart, Rev. Bras. Ens. Fis. **22**, 523 (2000); B. Feldens, P.M.C. Dias e W.M.S. Santos, Rev. Bras. Ens. Fis. **32**, 2602 (2010); M. Planck, Annalen der Physik **4**, 553 (1901).

[17] B.L. van Der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics* (North-Holland Publishing Company, Amsterdan, 1967), 1st ed.

[18] P.A.M. Dirac, *The Principle of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, London, 1958), 4th ed.

[19] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1994), 1st. ed.

[20] S. Bose, Rev. Bras. Ens. Fis. **23**, 3 (2005). A. Einstein, Rev. Bras. Ens. Fis. **27**, 1 (2005).

[21] H. Fermi, Z. Physik **36**, 902 (1926); trad by A. Zannoni English, arXiv:cond-mat/9912229v1 (1999).

[22] S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It* (Princeton University, New Jersey 1994), 1st. ed.

[23] P.A.M. Dirac, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion **3**, 64 (1933).

[24] R.P. Feynman, *A New Approach to Quantum Theory* (World Scientific, New Jersey 2005), 1st ed; R.P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949).

[25] J. Schwinger, *Symbolism of Atomic Measurements* (Springer, New York 2001), 1st ed; J. Schwinger, Rev. **74**, 1439 (1948); C.A.M. de Melo, B.M. Pimentel e J.A. Ramirez, Rev. Bra. Ens. Fís. **35**, 4302 (2013).

[26] W. Pauli, Phys. Rev. **58**, 716 (1940).

[27] T. Matsubara, Progr. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).

[28] E.S. Fradkin, *Selected Papers on Theoretical Physics*, edited by I.V. Tyutin (Lebedev Institute, Moscow, 2007).

[29] L.G. Rizzi e R.B. Frigori, Rev. Bras. Ens. Fis. **34**, 1306 (2012); R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London, 1982), 1st ed.

[30] V.L. Ginzburg and L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950); This article was published in English in L.D. Landau, *Collected Papers* (Pergamon Press, Oxford, 1965); L.N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956); J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957); V.L. Ginzburg, Chem. Phys. Chem. **5**, 930 (2004); Bertrand Berche, Malte Henkel and Ralph Kenna, Rev. Bras. Ens. Fis. **31**, 2602 (2012); S.H. Pereira e Marcelo G. Félix, Rev. Bras. Ensino. Fís. **35**, 1313 (2013).

[31] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (Dover, New York, 1996), 2nd. ed.

[32] A. Di Bernardo, O. Millo, M. Barbone, H. Alpern, Y. Kalcheim, U. Sassi, A.K. Ott, D. De Fazio, D. Yoon, M. Amado, *et al.* Nature Communications 8, 14024(2017).

[33] S.L. Glashow, Nuclear Physics 8.B **22**, 579 (1961).

[34] J. Goldstone, Nuovo Cimento **19**, 154 (1961).

[35] J. Goldstone, Abdus Salam and Steven Weinberg, Phys. Rev. **127**, 3 (1962).

[36] P.W. Higgs, Phys.Rev **13**, 16 (1964).

[37] P.W. Anderson, Phys. Rev. **130**, 1 (1962).

[38] T.W.B. Kibble, Phys. Rev. **155**, 25 (1964).

[39] S. Weinberg Phys. Rev. **19**, 21 (1967).

[40] E. Fermi, Z.Physik **88**, 161 (1934).

[41] R.P. Feynman and Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 1 (1958).

[42] J.L. Lopes, Nuclear Physics 8.B **8**, 234 (1958).

[43] J.L. Lopes, *Lectures on Weak Interactions: From Fermi-Majorana-Perrin to Glashow-Weinberg-Salan. Lecutures Notes.* Lectures at the 1986 Latin American School of Phyiscs, Mexico National University (1986).

[44] S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).

[45] R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 1686 (1974); S. Weinberg, Phys. Rev. D **9**, 3357 (1974); L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).

[46] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996), 1st ed.

[47] F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson and A. E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory* (World Scientific, New Jersey, 2009).

[48] S. Weinberg *The First Three Minutes* (Basics Books, A Member of the Perseus Books Group, New York, 1993), 3rd ed.

[49] A. Buchleitner, C. Viviescas and M. Tiersch, *Entanglement and Decoherence* (Springer-Verlag, Berlin 2009).

[50] D.N. Page, arXiv:0409024v3 (2004).

[51] L. Susskind arXiv:1604.02589v2 (2016).

[52] W. Greiner, L. Neise and H. Stöcker, *Thermodinamics and Statistical Mechanics* (Springer Verlag, New York, 1996), 1st ed.

[53] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 1995), 4th ed.

[54] E. Elizalde, S.D. Odintsov, A. Romeo, A.A. Bytsenko and S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications* (World Scientific, Singapore, 1994), 1st ed.

[55] K.A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy* (World Scientific, New Jersey, 2001), 1st ed.

[56] S.S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Row, Peterson and Company, New York, 1961).

[57] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer, Berlin 1996), 1st ed.

[58] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 2000), 3rd. ed.

[59] E. Noether, Math-phys. Klasse **1918**, 235 (1918); translated by M.A. Tavel, arXiv: 0503066v2 (2005).

[60] F.A. Barone, A.A. Nogueira e B.M. Pimentel, Rev. Bras. Ens. Fis. **38**, e3317 (2016).

[61] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov and I. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Pergamon Press, Oxford, 1965), 2nd ed.

[62] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory* (Oxford University Press, Oxford, 2005), 1st. ed.

[63] A.N. Vasiliev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Gordon and Breach Science Publishers, Australia, 1976).

[64] N.P. Landsman and Ch. G. van Weert, *Real and Imaginary Time Field Theory at Finite Temperature and Density* (North-Holland, Amsterdam, 1987).

[65] J.I. Kapusta and C. Gale, *Finite Temperature Field Theory, Principles and Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006), 2nd ed.

[66] A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (World Scientific, Singapure, 1997), 1st ed.; A. Das, arXiv:hep-ph/0004125v1 (2000).

[67] H. Kleinert and V.S. Frohlinde, *Critical Proprieties of ϕ^4 Theories* (Word Scientific, Berlin, 2000), 1st ed.

[68] L. Tisza, Ann. Phys. (N.Y.) **1**, 1 (1961). L. Tisza, *Generalized Thermodynamics* (MIT Press, Cambridge, 1966).

[69] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1964).

[70] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[71] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, (Yeshiva University, New York, 1964); K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, in *Lecture Notes in Physics, 169* (Springer, New York, 1982).

[72] L.D. Faddeev, Teor. Mat. Fiz. **1**, 3 (1969); P. Senjanovic, Ann. Phys. (N.Y.) **100**, 227 (1976); Y.G. Miao, Ann. Phys. (N.Y.) **209**, 248(E) (1991).

[73] L.D. Faddeev and V.N. Popov, Phys. Lett. **25B**, 29 (1967); B.S. DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).

[74] E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky, CERN Report TH 2332 (CERN, Genève, 1977); H.J. Rothe and K.D. Rothe, *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems* (World Scientific, New Jersey, 2010), 1st ed.