

# O critério de estabilidade de Rayleigh para órbitas circulares em gravitação newtoniana e relatividade geral

Rayleigh's stability criterion for circular orbits in Newtonian gravity and general relativity

Luiz H. R. Daniel<sup>1</sup>, Ronaldo S. S. Vieira<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do ABC, Centro de Ciências Naturais e Humanas, 09210-580, Santo André, SP, Brasil.

Recebido em 27 de agosto de 2022. Revisado em 26 de setembro de 2022. Aceito em 27 de setembro de 2022.

O estudo de órbitas circulares sob a ação de forças centrais ou em espaços-tempos esfericamente simétricos é assunto bastante abordado em cursos introdutórios de mecânica clássica e de relatividade geral, respectivamente. A estabilidade dessas órbitas é comumente apresentada por meio da análise de máximos e mínimos do potencial efetivo para diversos valores distintos de momento angular. Apresentamos neste artigo, de forma didática, o critério de estabilidade de Rayleigh, que permite uma análise equivalente à do comportamento do potencial efetivo porém mais prática, levando em conta o comportamento de uma única função: o momento angular de órbitas circulares em função do raio. Argumentamos que esse critério, que geralmente não é apresentado nas disciplinas mencionadas acima, pode ser naturalmente incluído nas respectivas ementas, enriquecendo o aprendizado dos alunos.

**Palavras-chave:** Gravitação Newtoniana, Relatividade Geral, Órbitas Circulares.

The study of circular orbits under the action of central forces or in spherically symmetric spacetimes is a well-treated subject in introductory courses of classical mechanics and general relativity, respectively. The stability of these orbits is usually presented by means of the analysis of maxima and minima of the effective potential for different values of angular momentum. We present, in a didactic way, Rayleigh's stability criterion, which allows an analysis equivalent to the one regarding the effective potential behavior, but more practical, taking into account the behavior of only one function: the angular momentum of circular orbits as a function of radius. We argue that this criterion, which is usually not presented in the disciplines mentioned above, may be naturally included in the respective syllabuses, contributing to the students' learning process.

**Keywords:** Newtonian gravity, General relativity, Circular Orbits.

## 1. Introdução

O estudo de órbitas circulares em campos de força centrais é tema bem abordado em disciplinas de mecânica clássica nos cursos de graduação em Física [1–3]. A estabilidade dessas órbitas é costumeiramente apresentada por meio da análise de pontos de equilíbrio do potencial efetivo, a órbita sendo estável se seu raio é um mínimo local da função (e instável se for um máximo local). É inclusive apresentado na bibliografia usualmente adotada o cálculo da frequência radial de pequenas oscilações em torno dos pontos de equilíbrio estáveis [2, 3]. Um caso particular é o potencial gravitacional de distribuições esfericamente simétricas de matéria [4].

Uma análise da estabilidade de órbitas circulares análoga à feita em gravitação newtoniana pode também ser realizada em relatividade geral, na qual o movimento de partículas de teste (geodésicas tipo-tempo) no plano equatorial de espaços-tempos esfericamente simétricos pode ser formulado por meio de conservação de energia e momento angular. As órbitas circulares estáveis são

também obtidas como mínimos locais de um potencial efetivo adequadamente definido [5–7]. Em cursos introdutórios de relatividade geral, esses conceitos costumam ser aplicados a órbitas circulares nos espaços-tempos de Schwarzschild e Reissner-Nordström, que representam respectivamente buracos negros estáticos sem carga e carregados eletricamente.

Órbitas circulares não são restritas apenas a exercícios de livros-textos; possuem importante aplicação na modelagem astrofísica de discos de acreção ao redor de estrelas compactas e buracos negros [8, 9]. Também têm grande relevância na análise do movimento de estrelas ao redor do centro de discos galácticos, como por exemplo no problema das curvas de rotação de galáxias espirais e sua relação com a matéria escura [10, 11]. Perturbações do movimento circular são utilizadas também para o estudo de ressonâncias em dinâmica planetária [12] e galáctica [4].

No contexto de dinâmica de fluidos, um critério de estabilidade diferente é apresentado para fluidos estacionários em rotação ao redor de um eixo [13, 14]. Consideremos um elemento desse fluido de massa  $m$ , movendo-se em uma trajetória circular de raio  $r_o$ ; seja  $L_o = L(r_o)$  o momento angular desse elemento de fluido

\* Endereço de correspondência: ronaldo.vieira@ufabc.edu.br

com respeito ao eixo de simetria. A força centrífuga agindo sobre ele tem módulo

$$F_c(r_o) = \frac{L_o^2}{m r_o^3}. \quad (1)$$

Essa força balanceia o gradiente de pressão avaliado em  $r_o$ . Deslocando radialmente o elemento de fluido para  $r = r_o + \delta r$  (com  $\delta r > 0$ ) e mantendo seu momento angular  $L_o$ , a força centrífuga agindo sobre o objeto nessa nova posição terá módulo

$$F_c(r_o + \delta r) = \frac{L_o^2}{m(r_o + \delta r)^3}. \quad (2)$$

No entanto, essa quantidade não balanceia o gradiente de pressão, e o elemento de fluido adquirirá movimento radial. Para que esse movimento seja no sentido de voltar para o raio  $r_o$  da trajetória original, precisamos ter então

$$F_c(r_o + \delta r) < \frac{[L(r_o + \delta r)]^2}{m(r_o + \delta r)^3} \quad (3)$$

onde  $L(r_o + \delta r)$  é o momento angular necessário para balancear o gradiente de pressão em  $r_o + \delta r$ . Assim, para termos a estabilidade do elemento de fluido por deslocamentos radiais é preciso que

$$\frac{[L(r_o + \delta r)]^2}{m(r_o + \delta r)^3} - \frac{L_o^2}{m(r_o + \delta r)^3} > 0. \quad (4)$$

Se o deslocamento  $\delta r$  é pequeno, podemos expandir a expressão em primeira ordem em  $\delta r$ . Temos

$$L^2(r_o + \delta r) \approx L_o^2 + \left( \frac{dL^2}{dr} \Big|_{r_o} \right) \delta r. \quad (5)$$

Substituindo na desigualdade (4) e mantendo apenas termos de primeira ordem em  $\delta r$ , chegamos à condição

$$\frac{dL^2}{dr} > 0 \quad (6)$$

em  $r_o$ . Ou seja, a condição (6) garante a estabilidade de elementos de fluidos em órbitas circulares quando o fluxo é estacionário. Tal critério ficou conhecido na literatura como *critério de estabilidade de Rayleigh*, por aparecer originalmente em seus trabalhos publicados na década de 1910 [13].

Nosso objetivo neste artigo é demonstrar de maneira didática, adequada para um curso de graduação e de acordo com os resultados presentes na literatura especializada, que uma formulação adequada do critério de Rayleigh pode ser aplicada à estabilidade de órbitas circulares em sistemas autogravitantes esféricamente simétricos (tanto em gravitação newtoniana quanto em relatividade geral). Será possível então, por meio de uma única função (o momento angular de órbitas circulares em função do raio, tomado em relação ao centro de atração gravitacional) determinar todas as regiões de

estabilidade e de instabilidade de órbitas circulares no espaço. Embora esse critério de estabilidade não seja tratado nos livros-textos introdutórios nem de mecânica clássica, nem de relatividade geral, sendo geralmente presente em livros avançados de astrofísica como a referência [8], mostraremos que sua dedução e suas aplicações são perfeitamente condizentes com o conteúdo dessas disciplinas. Sua inclusão nas respectivas ementas traria então ganhos ao aprendizado do aluno dedicado.

## 2. Gravitação Newtoniana

Sabemos que, para o movimento de uma partícula sob a ação de qualquer força central, podemos associar uma energia potencial  $U(r)$  [2], onde  $r$  é a distância da origem das coordenadas (ou do referencial) até o ponto considerado; no caso gravitacional  $U \propto m$ , onde  $m$  é a massa em que a força age. Assim, podemos associar à distribuição de matéria do espaço um potencial gravitacional  $\Phi(r)$ , com  $U = m\Phi$ , tal que  $\mathbf{F} = -m\nabla\Phi$ .

Também, para um potencial central tanto a energia mecânica do sistema quanto o momento angular da partícula em relação à origem são constantes de movimento e, além disso, o movimento sempre ocorre em um plano que passa pela origem. A conservação da energia nos dá [3]

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{\text{ef}}(r), \quad (7)$$

em que  $E$  é a energia específica do sistema (por unidade de massa da partícula) e

$$V_{\text{ef}}(r) = \Phi(r) + \frac{L^2}{2r^2} \quad (8)$$

é o potencial efetivo do sistema, sendo  $L$  o momento angular específico da partícula em relação à origem.

Para  $L$  fixo, a partícula terá movimento puramente circular com raio  $r$  somente se  $r$  for ponto crítico do potencial efetivo (8). Nesse caso, é possível mostrar que o momento angular específico da órbita circular de raio  $r$ ,  $L(r)$ , é dado por

$$L^2(r) = r^3 \frac{d\Phi}{dr}. \quad (9)$$

Para avaliarmos a estabilidade dessa órbita circular, devemos calcular a segunda derivada do potencial efetivo e avaliá-la sobre a órbita circular, isto é, substituindo a função  $L = L(r)$  dada pela equação (9) após o cálculo. O resultado é

$$\frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \Big|_{L(r)} = \left[ \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right]. \quad (10)$$

A órbita circular de raio  $r$  será estável se for um mínimo local de  $V_{\text{ef}}$  quando  $L = L(r)$ , isto é, se a expressão (10) for positiva.

### 2.1. O critério de estabilidade de Rayleigh

A formulação acima é padrão dos livros-textos de mecânica clássica, sendo possível também calcular a frequência radial de pequenas oscilações [2, 3]. No entanto, vejamos o que acontece com o comportamento da função “momento angular (específico) quadrado da órbita circular de raio  $r$ ”,  $L^2(r)$ , dada pela equação (9). Temos que

$$\frac{d}{dr}[L^2(r)] = r^3 \frac{d^2\Phi}{dr^2} + 3r^2 \frac{d\Phi}{dr}, \tag{11}$$

de modo que

$$\left. \frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{L(r)} = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr}[L^2(r)]. \tag{12}$$

Dessa forma, chegamos ao *critério de estabilidade de Rayleigh para órbitas circulares*:

$$\frac{dL^2(r)}{dr} > 0, \tag{13}$$

onde  $L^2(r)$ , dado pela equação (9), é o momento angular específico quadrado da órbita circular de raio  $r$ . O critério acima nos dá todas as regiões de estabilidade e instabilidade ( $dL^2(r)/dr < 0$ ) das órbitas circulares sob a ação de um potencial gravitacional central, em todo o espaço. De fato, como a gravidade é sempre atrativa e temos que a força gravitacional agindo na partícula de massa  $m$  é  $\mathbf{F} = -m\Phi'(r)\hat{\mathbf{r}}$ , teremos sempre  $\Phi'(r) > 0$ , de modo que órbitas circulares em potenciais esféricos existirão para todos os valores de  $r$  pela equação (9).

Uma das vantagens dessa abordagem em termos de  $L^2(r)$  é a determinação de todas as regiões de estabilidade por meio de um único gráfico de  $L^2(r) \times r$  para parâmetros fixos do sistema, analisando as regiões de crescimento/decrescimento da função. Esse método se mostra mais prático que a análise gráfica do potencial efetivo para diferentes valores de  $L$ , como muitas vezes é apresentado em livros-textos [1, 2], que não permite a visualização exata das regiões de instabilidade e estabilidade das órbitas circulares.

### 2.2. Potenciais de Kepler e Paczyński-Wiita

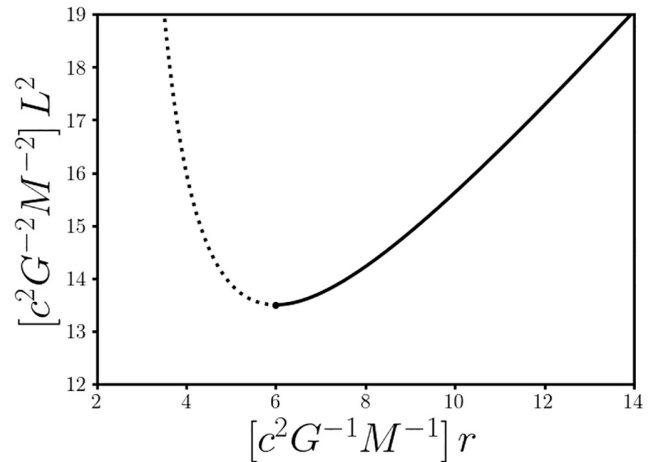
Para o potencial de Kepler,

$$\Phi_K(r) = -\frac{GM}{r} \tag{14}$$

onde  $M$  é a massa do corpo central. É direto mostrar que  $L_K^2(r) = GMr$ , de modo que todas as órbitas circulares são estáveis, em toda a região exterior ao corpo central.

Já para o potencial pseudo-newtoniano de Paczyński-Wiita [15, 16]

$$\Phi_{PW}(r) = -\frac{GM}{r - r_s}, \tag{15}$$



**Figura 1:** Função  $L^2_{PW}(r)$ , equação (16), para o potencial de Paczyński-Wiita (15). A região pontilhada da curva corresponde a órbitas circulares instáveis, enquanto que a região em traço contínuo corresponde a órbitas circulares estáveis. O ponto em destaque, com  $r = 6 GM/c^2$ , corresponde à órbita circular marginalmente estável (cujo raio delimita a fronteira entre as duas regiões).

válido para  $r > r_s = 2 GM/c^2$  (em que  $c$  é a velocidade da luz), que simula em gravitação newtoniana efeitos relativísticos na vizinhança de um buraco negro, temos

$$L^2_{PW}(r) = \frac{GM r^3}{(r - r_s)^2}. \tag{16}$$

Desse modo,

$$\frac{d}{dr}[L^2_{PW}(r)] = \frac{(r - 3r_s) GM r^2}{(r - r_s)^3}. \tag{17}$$

Vemos então que nesse caso  $L^2_{PW}(r)$  possui um mínimo em  $r = 6 GM/c^2$  que corresponde, comparando com o caso relativístico, à órbita circular marginalmente estável para o buraco negro de Schwarzschild [15, 16]. Essa órbita circular, no entanto, não é estável de acordo com o que estamos discutindo; na verdade perturbações que levam a partícula para raios menores fazem com que ela “caia” na singularidade. Ela recebe esse nome na literatura pois o raio da órbita marginalmente estável é dado por  $dL^2(r)/dr = 0$ , sendo portanto a fronteira entre as regiões de estabilidade e instabilidade. Um gráfico de  $L^2_{PW}(r) \times r$  é apresentado na Figura 1, que evidencia visualmente a região de estabilidade para  $r > 6 GM/c^2$  (e a de instabilidade para  $r < 6 GM/c^2$ ).

Vale comentar que, embora bastante útil na análise de propriedades de discos de acreção ao redor de buracos negros, o potencial de Paczyński-Wiita não aparece naturalmente na gravitação newtoniana como a solução da equação de Poisson para uma distribuição  $\rho$  de matéria fisicamente razoável; temos que a densidade de matéria associada a  $\Phi_{PW}(r)$  é sempre negativa para  $r > r_s$ . No entanto notamos que nesse caso, apesar de a densidade de matéria ser negativa, a força gravitacional será

sempre atrativa pois pode-se verificar diretamente da equação (15) que  $\Phi'_{PW}(r) > 0$  para todo  $r > r_s$ . Embora isso possa parecer contraintuitivo, é possível mostrar que esse comportamento vem, matematicamente, da singularidade do potencial em  $r = r_s$ .

### 2.3. Potencial isócrono de Hénon

Outro potencial gravitacional interessante de se analisar é o potencial isócrono de Hénon, proposto primeiramente para descrever aglomerados globulares,

$$\Phi_H(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}, \tag{18}$$

com  $b > 0$ . Esse é o potencial esférico mais geral para o qual o período radial das órbitas confinadas depende somente da energia  $E$  (e não do momento angular  $L$ ) [17, 18]. Para  $b = 0$  a expressão (18) se reduz ao potencial de Kepler (14), que também é uma boa aproximação para (18) no limite  $r \gg b$ .

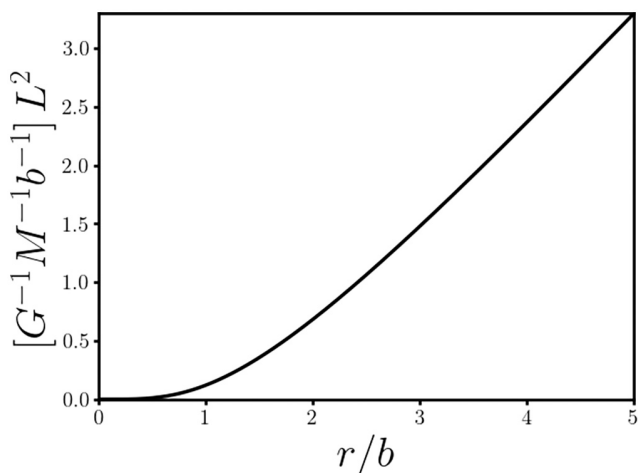
O momento angular específico de órbitas circulares para esse potencial é dado por

$$L_H^2(r) = \frac{GM r^4}{\sqrt{b^2 + r^2}(b + \sqrt{b^2 + r^2})^2}, \tag{19}$$

de maneira que

$$\frac{d}{dr}[L_H^2(r)] = \frac{GM r^3}{(b^2 + r^2)^{3/2}}, \tag{20}$$

que é positivo para todo  $b > 0$ . Desse modo, as órbitas circulares no potencial de Hénon são todas estáveis. A Figura 2 apresenta o perfil de  $L_H^2(r)$ , evidenciando o comportamento kepleriano para  $r \gg b$ . Já a região  $r \ll b$



**Figura 2:** Função  $L_H^2(r)$ , dada pela equação (19). Vemos que, para  $r/b \gg 1$ ,  $L_H^2(r)$  segue assintoticamente uma linha reta, característica do comportamento kepleriano. Já para  $r/b \ll 1$  temos que a curva tem inclinação quase horizontal (porém positiva); no entanto, como o critério de estabilidade é local, as órbitas circulares nessa região também são estáveis.

ilustra o fato de que a estabilidade precisa ser avaliada ponto a ponto e mais do que isso, ser estável significa, em nosso contexto, que a perturbação considerada na órbita circular é tomada como muito pequena. Podemos dizer, no sentido acima, que a estabilidade é um conceito ‘local’: embora a curva de  $L^2(r)$  tenha inclinação quase horizontal nessa região, a condição de estabilidade (13) leva em conta apenas perturbações arbitrariamente pequenas da órbita circular e portanto, por menor que seja  $|dL^2/dr|$ , se o critério (13) for satisfeito a órbita será estável.

Diversos outros potenciais esfericamente simétricos foram já propostos na literatura para descrever sistemas astrofísicos, como por exemplo galáxias elípticas e halos de matéria escura [4], de forma que o estudo de potenciais gravitacionais esfericamente simétricos é de grande interesse científico atual.

### 3. Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral veio, entre outros motivos, da necessidade de compatibilizar fenômenos gravitacionais com a finitude da velocidade da luz, que limitaria a velocidade de propagação de sinais. Dessa maneira, como a força gravitacional  $\mathbf{F}_g$  é do tipo ‘ação a distância’ [19, 20], isto é, age no mesmo instante de tempo  $t$  sobre uma partícula de massa  $m$  que tem o movimento descrito pelo vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  (o que não acontece, por exemplo, no eletromagnetismo [21]),

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}_g(\mathbf{r}(t)), \tag{21}$$

a ‘propagação do sinal’ da força gravitacional seria instantânea.

A solução proposta por Einstein para esse problema, baseada em seu ‘princípio de equivalência’ [19, 20, 22], foi a de generalizar o espaço-tempo plano de Minkowski para um espaço-tempo curvo (ou ‘variedade lorentziana’) em que a curvatura do espaço-tempo estaria relacionada com a gravidade, compatibilizando a gravitação com a estrutura espaço-temporal vinda da relatividade especial. As partículas de teste seguiriam o análogo das retas no caso plano: as geodésicas de uma métrica  $g_{\mu\nu}$  (ver por exemplo [5, 7, 23])

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu = 0. \tag{22}$$

Aqui,  $x^\mu$  são as coordenadas espaço-temporais da trajetória, o ‘ponto’ denota a derivada com respeito ao tempo próprio  $\tau$  do observador que se move com a partícula e os  $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu$  são os *símbolos de Christoffel*, que são determinados pela métrica e por suas derivadas parciais. Desse modo, a métrica  $g_{\mu\nu}$  (determinada pelas equações de campo de Einstein) seria em algum sentido uma generalização do potencial gravitacional  $\Phi$  [7, 23]. Já os  $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu$ , por envolverem derivadas da métrica, fariam o papel de uma generalização do campo gravitacional. No chamado ‘limite newtoniano’ da teoria (limite de campos fracos

e velocidades baixas), a equação das geodésicas (22) se reduz a [7]

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi. \tag{23}$$

Uma comparação formal entre a equação das geodésicas e a segunda lei de Newton para a força gravitacional é apresentada na referência [23].

### 3.1. Simetria esférica

Após esse prelúdio sobre a dinâmica de partículas de teste em relatividade geral, consideremos uma métrica estática e esfericamente simétrica que generaliza o conceito de potencial central:

$$ds^2 = f(r) dt^2 - \frac{1}{f(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \tag{24}$$

onde  $(r, \theta, \varphi)$  são “coordenadas esféricas” das seções espaciais. A função  $f(r)$  (determinada pelas equações de Einstein) contém toda a descrição do espaço-tempo. Quanto ao movimento de partículas de teste, é possível mostrar que a energia específica  $E = f(r)\dot{t}$  e seu momento angular específico  $L = r^2 \sin \theta \dot{\varphi}$  são constantes de movimento [5, 7, 23]. Além disso é possível mostrar que, como no caso newtoniano, o movimento pode ser visto como planar nas “coordenadas esféricas”  $(r, \theta, \varphi)$ ; fixamos então, daqui em diante,  $\theta = \pi/2$ .

Podemos então formular o movimento em termos de um potencial efetivo  $V_{\text{ef}}(r)$  [5-7, 24, 25],

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{ef}}(r), \tag{25}$$

onde  $\mathcal{E} = E^2/2$  e

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2} f(r) \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right). \tag{26}$$

Dessa forma podemos analisar a dinâmica de partículas nesses espaços-tempos pelos mesmos métodos utilizados em gravitação newtoniana, mas agora com a órbita parametrizada pelo tempo próprio da partícula. Em particular, órbitas circulares são obtidas como pontos críticos de  $V_{\text{ef}}(r)$ , de maneira que o momento angular específico  $L(r)$  de uma partícula em uma órbita circular de raio  $r$  é dado por

$$L^2(r) = \frac{r^3 f'(r)}{2f(r) - r f'(r)}. \tag{27}$$

A estabilidade das órbitas circulares é determinada como no caso newtoniano: órbitas estáveis correspondem a mínimos locais do potencial efetivo (26) quando  $L^2 = L^2(r)$ , dado pela equação (27), é substituído após o cálculo das derivadas,

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{L(r)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2rf f'' + (6f - 4rf')f'}{r(2f - rf')^2} \right], \tag{28}$$

onde  $f$  e suas derivadas são avaliadas em  $r$ . Da equação (27) podemos mostrar que

$$\frac{d}{dr} [L^2(r)] = r^3 \left[ \frac{2rf f'' + (6f - 4rf')f'}{r(2f - rf')^2} \right]. \tag{29}$$

Assim, embora não tão direto quanto o caso newtoniano, é possível mostrar após algumas manipulações algébricas que

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{L(r)} = \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{L^2(r)} \frac{d}{dr} [L^2(r)]. \tag{30}$$

A equação acima nos leva ao critério de estabilidade de Rayleigh para órbitas (geodésicas tipo-tempo) circulares em espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos descritos pela métrica (24): se  $L(r)$  é o momento angular específico de uma órbita circular de raio  $r$  dado pela equação (27), então na região em que  $f'(r) > 0$  a órbita será estável se

$$\frac{dL^2(r)}{dr} > 0, \tag{31}$$

como no caso newtoniano.

Notamos que aparece aqui explicitamente o fator  $f'(r)$  na equação (30), que pode ser tanto positivo quanto negativo. Se  $f'(r) < 0$  temos  $L^2(r) < 0$ , e não existem órbitas circulares nessa região (fenômeno que não acontece em gravitação newtoniana, como discutido acima). É possível mostrar, para o movimento geodésico, que uma partícula inicialmente em repouso será atraída para o centro de força se  $f'(r) > 0$  e repelida se  $f'(r) < 0$ . Desse modo, a condição  $f'(r) > 0$  pode ser interpretada como a condição para que a gravidade seja atrativa [24-26]. Embora esperado que sempre fosse verificada, essa condição deixa de ser válida na região próxima a singularidades nuas, que aparecem como soluções de teorias modificadas da gravitação (como por exemplo [25, 27-30]), e até mesmo no regime  $Q > M$  da solução de Reissner-Nordström, correspondente a uma singularidade nua com carga elétrica em relatividade geral [31]. Nesses casos a gravidade pode ser interpretada como repulsiva próximo de  $r = 0$ , e o raio em que  $f'(r) = 0$  corresponderia a um raio de ‘gravidade zero’.

Chegamos então à conclusão de que nas regiões em que são admitidas órbitas circulares, caracterizadas pela condição  $L^2(r) > 0$ , o critério de estabilidade de Rayleigh (31) é formalmente igual ao seu correspondente em gravitação newtoniana.

### 3.2. Buraco negro de Schwarzschild

Uma das principais predições da teoria da relatividade geral é a existência de buracos negros [32], que são tema relevante de pesquisa até hoje, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional. Vejamos abaixo a aplicação do critério de estabilidade de Rayleigh a órbitas circulares em espaços-tempos tratados em cursos

de graduação: os buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström.

A métrica de Schwarzschild tem a forma (24) com

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{32}$$

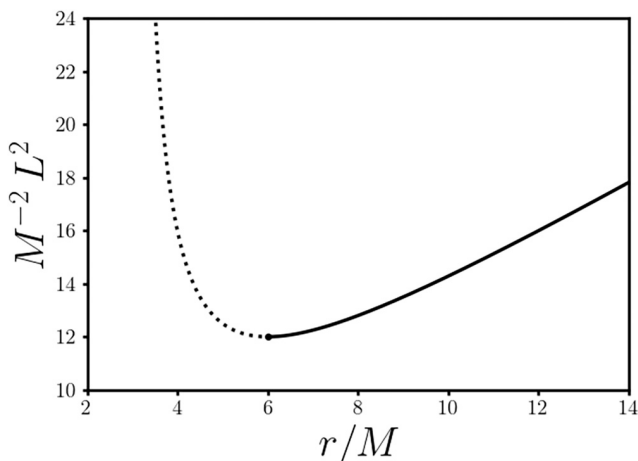
em unidades geometrizadas ( $G = c = 1$ ). Ela apresenta um horizonte de eventos para  $r_h = 2M$ . Fisicamente, corresponde a um buraco negro de massa  $M$  sem carga elétrica. O momento angular específico de uma partícula de teste ao redor do buraco negro fica então [5, 7]

$$L_S^2(r) = \frac{Mr^2}{r - 3M} \tag{33}$$

e portanto não existem órbitas circulares para  $r \leq 3M$  (que corresponde à região interna ao raio da órbita circular de fótons<sup>1</sup>). Temos

$$\frac{d}{dr}[L_S^2(r)] = \frac{(r - 6M)Mr}{(r - 3M)^2}. \tag{34}$$

O critério de Rayleigh (31) nos dá então que as órbitas circulares serão estáveis se  $r > 6M$ , o que de fato ocorre ao fazermos cálculos diretos com o potencial efetivo [5–7]. Um gráfico de  $L^2(r) \times r$  é apresentado na Figura 3, onde vemos claramente o mínimo de  $L^2(r)$  em  $6M$ , correspondendo à órbita circular marginalmente estável (cujo significado preciso foi discutido na seção anterior).



**Figura 3:** Função  $L_S^2(r)$ , dada pela equação (33); como na Figura 1, a parte pontilhada da curva corresponde a órbitas circulares instáveis e a parte em traço contínuo, a estáveis. O ponto em destaque representa a órbita circular marginalmente estável, com  $r = 6M$ .

<sup>1</sup> Discussões sobre órbitas circulares de fótons podem ser encontradas nas referências [5–7, 23]. Para a presente abordagem, basta sabermos que o raio  $r_{ph}$  dessa órbita é obtido como o ponto crítico do “potencial efetivo para fótons”  $V_{ph}(r) = f(r)/r^2$  [6, 25], coincidindo com o raio em que  $L^2(r) \rightarrow \infty$ ; não existem órbitas circulares para partículas massivas na região entre  $r_h$  e  $r_{ph}$ , nem para o espaço-tempo de Schwarzschild nem para o de Reissner-Nordström. Sugerimos ao leitor interessado consultar as referências mencionadas acima.

### 3.3. Buraco negro de Reissner-Nordström

O buraco negro de Reissner-Nordström é a generalização do buraco negro de Schwarzschild, com massa  $M$  e carga elétrica  $Q$  (em unidades geometrizadas [33]), onde devemos ter  $0 \leq Q^2 \leq M^2$  para que exista horizonte de eventos. Nos restringimos então a esse caso. A métrica também tem a forma (24) com

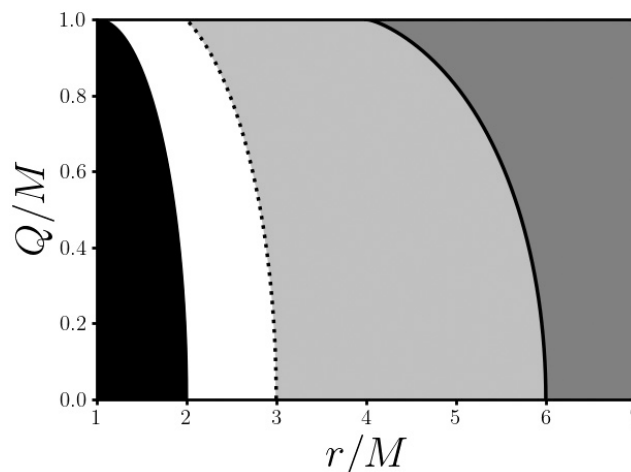
$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \tag{35}$$

A métrica apresenta um horizonte de eventos em  $r_h = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ . O momento angular específico de uma partícula de teste é dado por

$$L_{RN}^2(r) = \frac{Mr^2 - Q^2r}{\frac{2Q^2}{r} + r - 3M}. \tag{36}$$

É possível calcular o raio  $r_{ms}$  da órbita marginalmente estável por meio do critério de Rayleigh, de modo que as órbitas circulares existirão para raios maiores que o da órbita circular de fótons; serão instáveis para  $r < r_{ms}$ , estáveis para  $r > r_{ms}$ . A condição  $dL^2(r)/dr = 0$  nos dá uma equação cúbica em  $y = r - 2M$ ,

$$y^3 + py + q = 0 \tag{37}$$



**Figura 4:** Diagrama de estabilidade para as órbitas circulares de partículas com massa, no espaço-tempo de Reissner-Nordström, métrica (24) com  $f(r)$  dado pela equação (35). Para cada valor fixo de  $Q/M$  temos os raios  $r_h$ ,  $r_{ph}$  e  $r_{ms}$ , como descrito a seguir. A região em preto representa o interior do buraco negro, sua fronteira correspondendo ao raio do horizonte de eventos  $r_h$ . A curva pontilhada representa o raio da órbita circular de fótons  $r_{ph}$ . A curva contínua representa  $r_{ms}$ , o raio da órbita marginalmente estável. Essa última curva é a fronteira entre a região de órbitas circulares estáveis (região em cinza escuro no diagrama, se estendendo para raios maiores até o infinito) e de órbitas circulares instáveis (região em cinza claro no diagrama). A obtenção dessas regiões de estabilidade e de instabilidade segue diretamente do critério de Rayleigh (31), como explicado no texto.

com  $p = -12M^2 + 9Q^2$  e  $q = -16M^3 + 18MQ^2 - 4Q^4/M$ . Para obter sua solução analítica, aplicamos a fórmula de Cardano–Tartaglia, deduzida e analisada na referência [34]. A raiz para  $r > r_h$  fica

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (38)$$

O discriminante dentro da raiz quadrada é positivo para  $0 < Q^2 < M^2$  (e nulo para  $Q = 0$ ). Dessa forma, as outras duas raízes da equação são complexas e conjugadas para  $0 < (Q/M)^2 < 1$  [34]. O diagrama de estabilidade, Figura 4, mostra simultaneamente o raio  $r_h$  do horizonte de eventos, o raio  $r_{ph}$  da órbita circular de fótons, o raio  $r_{ms}$  da órbita circular marginalmente estável e as regiões de estabilidade (cinza escuro) e instabilidade (cinza claro) das órbitas circulares, em função da razão  $(Q/M)$  entre a carga e a massa do buraco negro.

## 4. Conclusões

O critério de estabilidade de Rayleigh para órbitas circulares é muito utilizado na modelagem astrofísica de discos de acreção ao redor de buracos negros [8, 9]. Também é importante na análise da estabilidade de órbitas circulares do movimento geodésico em relatividade geral [26, 35, 36] e em teorias modificadas da gravitação [25, 37] em espaços-tempos descrevendo tanto buracos negros quanto singularidade nuas (ver por exemplo [25]). No entanto, apesar de geralmente não ser tratado em cursos introdutórios de mecânica clássica e de relatividade geral, mostramos aqui que sua formulação e sua dedução podem facilmente ser inseridas na ementa desses cursos, trazendo ganhos ao aprendizado dos alunos e instigando a curiosidade por essas áreas da ciência.

Uma das vantagens do critério de estabilidade de Rayleigh é, como mostrado, a possibilidade de determinarmos todas as regiões de estabilidade de órbitas circulares por meio do comportamento de uma única função, o momento angular específico  $L(r)$  das órbitas circulares em função do raio, que pode ser obtida diretamente da formulação do movimento em termos do potencial efetivo do sistema (tanto em gravitação newtoniana quanto em relatividade geral). Essa abordagem se mostra bastante prática, sendo complementar à análise de máximos e mínimos do potencial efetivo para diferentes valores de momento angular.

Vale também notar que, embora tenhamos tratado na mecânica newtoniana apenas o caso gravitacional, a mesma formulação (com pequenas adaptações) pode ser feita para forças centrais genéricas, uma vez que é garantida a existência de uma energia potencial para o sistema [2, 3] e portanto o movimento pode ser formulado em termos de uma energia potencial efetiva. Segue diretamente dessa formulação, acompanhando os

passos apresentados aqui, que o critério de estabilidade de Rayleigh para órbitas circulares sob a atuação de forças centrais arbitrárias é o mesmo que para o caso gravitacional.

Por fim mencionamos que, no caso de simetria axial e na presença de simetria de reflexão com respeito ao plano equatorial  $z = 0$ , o critério de Rayleigh nos dá para órbitas circulares equatoriais as regiões de *estabilidade radial* [26, 35, 37], isto é, de estabilidade por perturbações radiais do movimento circular no plano equatorial. Nesse caso, o momento angular total da partícula precisa ser substituído por seu momento angular azimutal  $L_z$  com respeito à origem, ou seja, a quantidade conservada correspondente. No entanto, diferentemente do caso esférico (em que as órbitas circulares são sempre estáveis por perturbações verticais, ortogonais ao plano do movimento [4]), no caso axialmente simétrico a estabilidade vertical dessas órbitas precisa ser analisada separadamente, tanto em gravitação newtoniana [38–40] quanto em relatividade geral [26, 36, 41].

## Agradecimentos

Os autores agradecem aos Profs. Alberto Saa e Ricardo A. Mosna por comentários em uma versão prévia do manuscrito.

## Referências

- [1] K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley, London, 1960).
- [2] J.B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems* (Academic Press, New York, 2013).
- [3] K. Watari, *Mecânica Clássica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2003), v. 2.
- [4] J. Binney e S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, Princeton, 2008), 2 ed.
- [5] E.F. Taylor e J.A. Wheeler, *Exploring black holes* (Addison-Wesley Longman, New York, 2000).
- [6] J.B. Hartle, *Gravity: An introduction to Einstein's general relativity* (Addison-Wesley, San Francisco, 2003).
- [7] B. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
- [8] J. Frank, A. King e D. Raine, *Accretion power in astrophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [9] M.A. Abramowicz e P.C. Fragile, *Living Reviews in Relativity* **16**, 1 (2013).
- [10] D.C. Rodrigues e A. Hernández-Arboleda, *Cadernos de Astronomia* **2**, 6 (2021).
- [11] R.H. Sanders, *The dark matter problem: a historical perspective* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [12] C.D. Murray e S.F. Dermott, *Solar system dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [13] L. Rayleigh, *Proc. Roy. Soc. London* **93A**, 148 (1917).

- [14] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics Vol. 6: Fluid Mechanics* (Elsevier, Oxford, 2007), 2 ed.
- [15] B. Paczyński e P.J. Wiita, *Astron. Astrophys.* **88**, 23 (1980).
- [16] M.A. Abramowicz, *Astron. Astrophys.* **500**, 213 (2009).
- [17] J. Binney, arXiv:1411.4937 (2014).
- [18] A. Saa e R. Venegeroles, arXiv:2110.01953 (2021).
- [19] H.M. Nussenzveig, *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica* (Blucher, São Paulo, 2014), v. 4.
- [20] F. Falciano, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 4308 (2009).
- [21] D.J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1962).
- [22] O. Acevedo, E. Morais e B. Pimentel, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **41**, e20180329 (2019).
- [23] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1992).
- [24] Z. Stuchlík e S. Hledík, *Acta Physica Slovaca* **52**, 363 (2002).
- [25] R.S.S. Vieira, J. Schee, W. Kluźniak, Z. Stuchlík e M. Abramowicz, *Phys. Rev. D* **90**, 024035 (2014).
- [26] M.A. Abramowicz e W. Kluźniak, *Astrophys. Space Sci.* **300**, 127 (2005).
- [27] K. Goluchová, K. Kulczycki, R.S.S. Vieira, Z. Stuchlík, W. Kluźniak e M. Abramowicz, *General Relativity and Gravitation* **47**, 132 (2015).
- [28] A. García, E. Hackmann, J. Kunz, C. Lämmerzahl e A. Macías, *Journal of Mathematical Physics* **56**, 032501 (2015).
- [29] J.F.M. Delgado, C.A.R. Herdeiro e E. Radu, *Phys. Rev. D* **105**, 064026 (2022).
- [30] S. Capozziello e M. de Laurentis, *Phys. Rep.* **509**, 167 (2011).
- [31] D. Pugliese, H. Quevedo e R. Ruffini, *Phys. Rev. D* **83**, 024021 (2011).
- [32] A. Saa, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **38**, e4201 (2016).
- [33] R. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [34] E.L. Lima, *Matemática Universitária* **5**, 9 (1987).
- [35] P.S. Letelier, *Phys. Rev. D* **68**, 104002 (2003).
- [36] R.S.S. Vieira, W. Kluźniak e M. Abramowicz, *Phys. Rev. D* **95**, 044008 (2017).
- [37] R.S.S. Vieira e P.S. Letelier, *General Relativity and Gravitation* **46**, 1641 (2014).
- [38] W. Kluźniak e D. Rosińska, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **434**, 2825 (2013).
- [39] R.S.S. Vieira e J. Ramos-Caro, em: *The Thirteenth Marcel Grossmann Meeting*, editado por K. Rosquist, R.T. Jantzen e R. Ruffini (World Scientific, Singapore, 2015).
- [40] R.S.S. Vieira e J. Ramos-Caro, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **126**, 483 (2016).
- [41] R.S.S. Vieira, J. Ramos-Caro e A. Saa, *Phys. Rev. D* **94**, 104016 (2016).