

Medición de frecuencias de resonancia, factor de pérdida y módulo de Young dinámico de varillas empotradas

(Measurements of resonant frequencies, loss factor and dynamic Young modulus of cantilever beams)

C.E. Repetto^{1,2}, A. Roatta^{1,2}, R.J. Welti¹

¹Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Departamento de Física, Escuela de Formación Básica,
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Rosario, Argentina

²Instituto de Física Rosario, Rosario, Argentina

Recibido em 28/7/2013; Aceito em 6/9/2013; Publicado em 26/2/2014

En este trabajo se estudian teórica y experimentalmente las vibraciones forzadas de varillas rígidas y flexibles empotradas en un extremo. Las experiencias que se analizan, además de ilustrar el fenómeno de resonancia en una estructura diferente del clásico oscilador masa-resorte, permiten medir el módulo de Young del material. En el caso de la varilla flexible es fácil visualizar también el segundo y el tercer modo normal de vibración, lo cual nos permite comparar la forma que adopta la varilla, cuando vibra en sus diferentes modos, con las predicciones teóricas. En particular se pueden observar los “cuasi-nodos” (o nodos con pequeña amplitud) que se deben al flujo de energía a través de los mismos para compensar las pérdidas.

Palavras-chave: modos normales, ancho de banda, módulo de Young.

In this work, the forced vibrations of rigid and flexible cantilever beams clamped in one end, are studied. The experiments, in addition to illustrating the resonance phenomenon in a different structure of the classical mass-spring oscillator, permit measure the Young's modulus of the rod's material. In order to display the fundamental mode together with the second and third normal mode of vibration, we use a cantilever beam made of a less rigid material. This allows us to compare the shape of the beam when it vibrates in different modes, with the theoretical predictions. In particular one can observe the presence of "quasi-nodes" (or nodes with small amplitude) where the energy flow compensate for power loss.

Keywords: normal modes, bandwidth, Young's modulus.

1. Introducción

El análisis de vibraciones y la presencia de resonancia en una estructura son factores importantes en la enseñanza de la ingeniería, ya que pueden provocar la falla de la estructura o la producción de ruidos molestos. En aplicaciones de ingeniería, las vibraciones de una barra, con diferentes condiciones de contorno, pueden utilizarse para simular la respuesta de diversas estructuras. Por ejemplo, se pueden modelar las vibraciones de una antena, los brazos de un robot, distintas componentes utilizadas en la construcción, las estructuras de puentes y partes de instrumentos musicales. En un curso de física básica de nivel universitario, las vibraciones de una barra constituyen una opción, o un complemento, del sistema masa-resorte que se utiliza como prototipo para el estudio de la resonancia. La barra además, como todo sistema distribuido, tiene muchas frecuencias naturales y modos de vibración. Esto

permite introducir el concepto de modos normales en los primeros años de la formación de un ingeniero.

En este trabajo presentamos dos experiencias sobre las vibraciones de barras; comenzamos con un material rígido (alto módulo de elasticidad) y en segundo lugar, tratamos un material flexible. En la primera experiencia utilizamos un conjunto de seis flejes de acero, de diferentes longitudes, que se emplea habitualmente en demostraciones cualitativas de resonancia. Las vibraciones de estos flejes pueden estudiarse con el modelo de Euler-Bernouilli [1] en el cual se establece que las frecuencias normales de vibración de una barra dependen de sus dimensiones geométricas, su densidad y módulo de Young. En la sección 2 mostramos como, a partir de la medición de las frecuencias de vibración del primer modo de cada una de las seis barras, puede determinarse el módulo de Young del material. Esta experiencia permite también medir la curva de resonancia, esto es, la amplitud del extremo libre en función de la fre-

¹E-mail: roatta@fceia.unr.edu.ar.

cuencia en un entorno de la frecuencia de resonancia. El ancho de la curva de resonancia resulta una estimación del coeficiente de amortiguamiento del material a esa frecuencia.

En la sección 3 mostramos los resultados de una segunda experiencia en la que se utiliza una sola varilla de un material flexible (PVC). Al poseer este material un módulo de elasticidad mucho menor que el acero, nos permite observar fácilmente la forma de los modos superiores (hasta el cuarto) para luego compararla con las formas predichas por la teoría. Con la medición de las frecuencias de estos modos se puede determinar el módulo de elasticidad del PVC.

En el apéndice presentamos un resumen del modelo que describe las oscilaciones forzadas de una varilla en presencia de una fuerza disipativa tipo viscosa. Las frecuencias y las formas de los modos normales medidos son comparados con los resultados de dicha teoría. Debido a la presencia de fuerzas disipativas se muestra que los “nodos” del segundo y tercer modo son realmente “cuasinodos”, es decir, deben tener una amplitud no nula para que a través de los mismos fluya la energía que se disipa en el otro extremo de la varilla. El nombre de cuasinodos fue originalmente utilizado en un trabajo de D. Gómez y R. Welti [2] en el que se estudian las oscilaciones forzadas de una cuerda con pérdidas.

2. Vibraciones de un fleje de acero

Para esta actividad se utilizaron unos flejes resonantes (Pasco SF - 9404) junto con un impulsor de ondas mecánicas (Pasco SF - 9324). Para alimentar el impulsor se utilizó el generador de señal que posee la interfase Pasco SW 750 conectada a la PC, gobernada a través del software Science Workshop.

Los flejes “resonantes” son un conjunto de seis varillas de acero del mismo ancho b y espesor h y de diferentes longitudes L . Este conjunto de varillas se inserta en el impulsor de ondas mecánicas como se muestra en la Fig. 1. Mediante el impulsor se excita a las varillas con una frecuencia f controlada con el generador de señales. Si la frecuencia elegida coincide con la frecuencia del primer modo de una de las varillas, ésta comienza a vibrar con gran amplitud (Fig. 1).

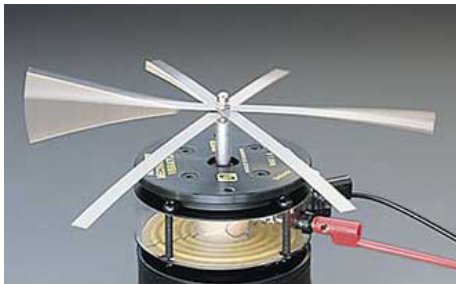


Figura 1. Conjunto de flejes resonantes con impulsor de ondas mecánicas.

Para obtener las frecuencias del primer modo de oscilación en cada una de las varillas, se comienza la experiencia a una frecuencia del impulsor inferior a la menor frecuencia de resonancia del conjunto, y se la aumenta a saltos de 1 Hz (en las vecindades de las resonancias el paso se redujo a 0.5 Hz, debido a la mayor sensibilidad en la respuesta del sistema). La varilla de mayor longitud es la primera en entrar en resonancia, haciéndolo sucesivamente las otras varillas, en orden de longitud decreciente.

En la Fig. 2 se grafican las frecuencias de resonancia f en función de la longitud L . La figura sugiere que la frecuencia f es inversamente proporcional a una potencia n de la longitud L , esto es

$$f = KL^{-n}. \quad (1)$$

Si aplicamos logaritmo natural en ambos miembros obtenemos

$$\ln f = \ln K - n \ln L. \quad (2)$$

Por lo tanto, de la gráfica de $\ln f$ en función de $\ln L$ (Fig. 3) podemos determinar el valor de n .

El análisis de regresión lineal (método de los mínimos cuadrados) muestra que $n \approx 2$ con un error del 7%, aproximadamente.

Este resultado muestra que las frecuencias de resonancia de las varillas pueden determinarse mediante la ecuación de Euler-Bernoulli, cuyas soluciones son analizadas en el apéndice. De acuerdo a esta teoría la frecuencia de las oscilaciones del modo fundamental viene dada por (ver Ec. (24))

$$f_1 = 0.162 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3)$$

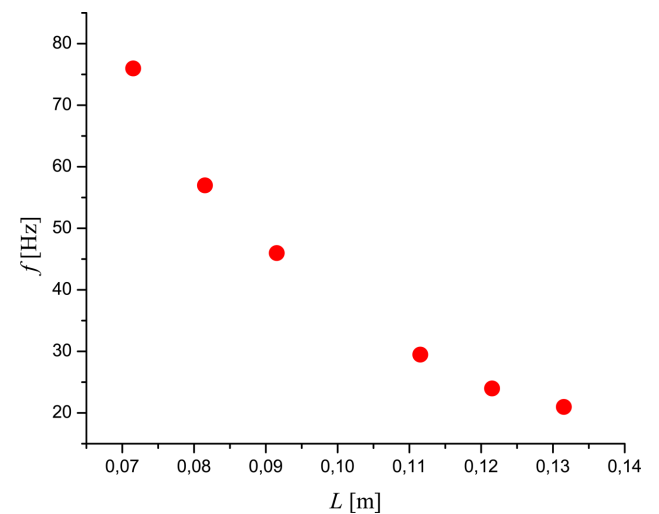


Figura 2. Medición de la frecuencia de resonancia del primer modo para cada una de las varillas.

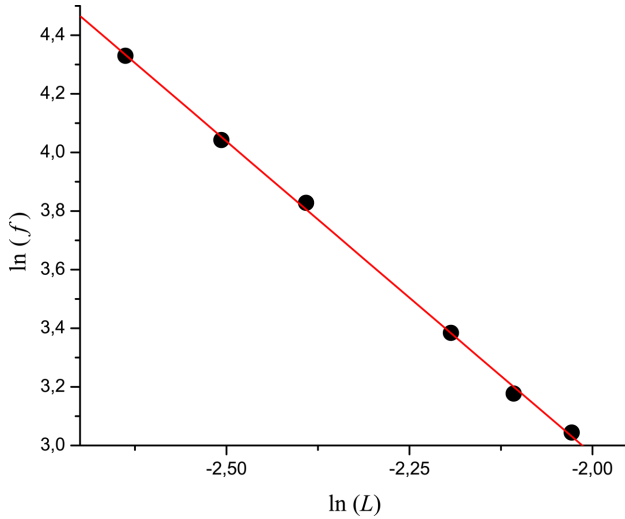


Figura 3. Relación lineal entre $\ln f$ y $\ln L$.

donde E es el módulo de Young y ρ la densidad del material. Esta expresión predice que la dependencia de la frecuencia con la longitud de la varilla varía inversamente con el cuadrado de su longitud, tal como fue determinado previamente.

2.1. Medición del módulo de Young

Si graficamos f en función de $1/L^2$, encontramos que los pares de valores se ubican a lo largo de una línea recta (Fig. 4). El método de los mínimos cuadrados nos permite encontrar la “mejor recta”

$$f = A + B(1/L^2), \quad (4)$$

que aproxima los datos experimentales. Los parámetros A y B de esta recta con sus respectivos errores (unidades SI) se muestran a continuación

$$A = (-2.6 \pm 0.7), \quad B = (0.401 \pm 0.006). \quad (5)$$

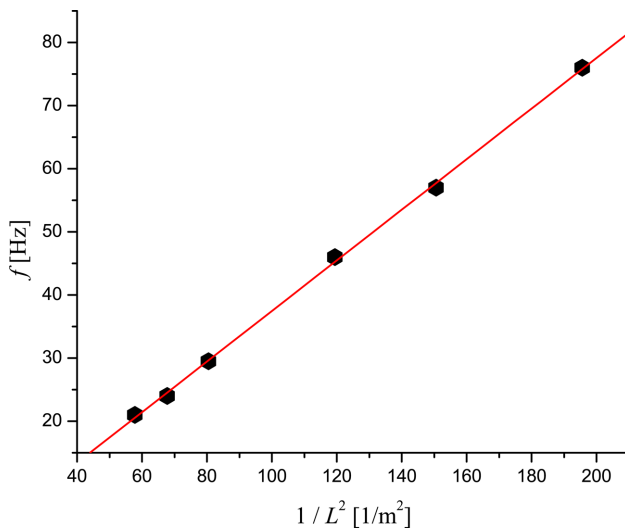


Figura 4. Comportamiento lineal de f vs. $1/L^2$.

Comparando la Ec. (4) con la Ec. (3) encontramos que la pendiente B debe ser igual a

$$B = 0.162 h \sqrt{E/\rho}, \quad (6)$$

siendo el espesor de los flejes $h = (0.50 \pm 0.01)$ mm. A partir de la Ec. (6) podemos calcular una magnitud muy importante: la velocidad de propagación c de las ondas longitudinales en el acero

$$c = \sqrt{E/\rho} = (5000 \pm 200) \text{ m/s}. \quad (7)$$

El módulo de Young E viene dado por

$$E = c^2 \rho. \quad (8)$$

La densidad de los flejes, que se ha medido por el método de Arquímedes, es

$$\rho = (7800 \pm 100) \text{ kg/m}^3. \quad (9)$$

El módulo de Young que se obtiene a partir de nuestras mediciones es, entonces,

$$E = (200 \pm 20) \cdot 10^9 \text{ Pa}. \quad (10)$$

Observemos que este valor es del orden del módulo de Young de los aceros comerciales comunes [3].

2.2. Medición del ancho de banda

El amortiguamiento del material que utilizamos (acero) es relativamente pequeño, por lo tanto, para determinarlo es suficiente medir el ancho de banda en frecuencia “a mitad de potencia”. El ancho de banda de la resonancia viene dado por (ver apéndice, Ec. (31))

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \gamma. \quad (11)$$

Para evaluar γ , se mide el desplazamiento del extremo de cada fleje en función de la frecuencia en las proximidades de su resonancia como se muestra en Figs. 5a y 5b, y se grafica el cuadrado de dicha magnitud, $|Z(L)|^2$, en función de la frecuencia f , en un entorno de las frecuencias de resonancia. Se muestran los resultados obtenidos para dos de las varillas del conjunto (Figs. 6a y 6b). La curva continua corresponde al ajuste de los puntos experimentales, mediante una función lorentziana

$$y = y_0 + \frac{2A}{\pi} \frac{w}{4(x - x_c)^2 + w^2}. \quad (12)$$

En las Figs. 6a y 6b se incluyen los valores de los parámetros que describen cada resonancia, donde $2\pi w$ representa al coeficiente de amortiguamiento γ . Los valores obtenidos para ambos flejes se encuentran entre 10.1 s^{-1} y 12.8 s^{-1} , y no se manifiesta una dependencia fuerte con la frecuencia.

Puede también verificarse la bondad del ajuste a los puntos medidos a partir de la ley, Ec. (29), que se deduce teóricamente en el apéndice.

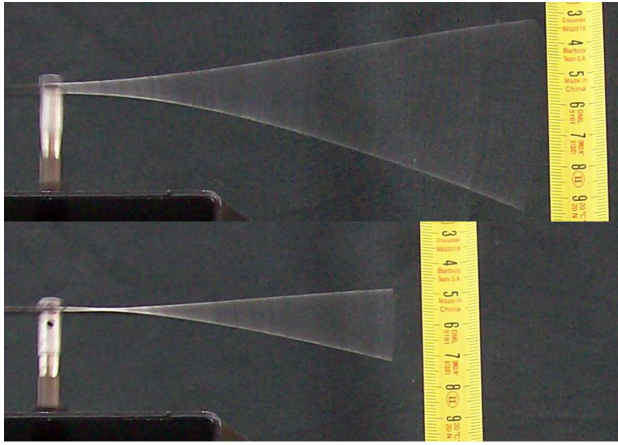


Figura 5. Medición de la curva de amplitud de respuesta en las proximidades de la resonancia.

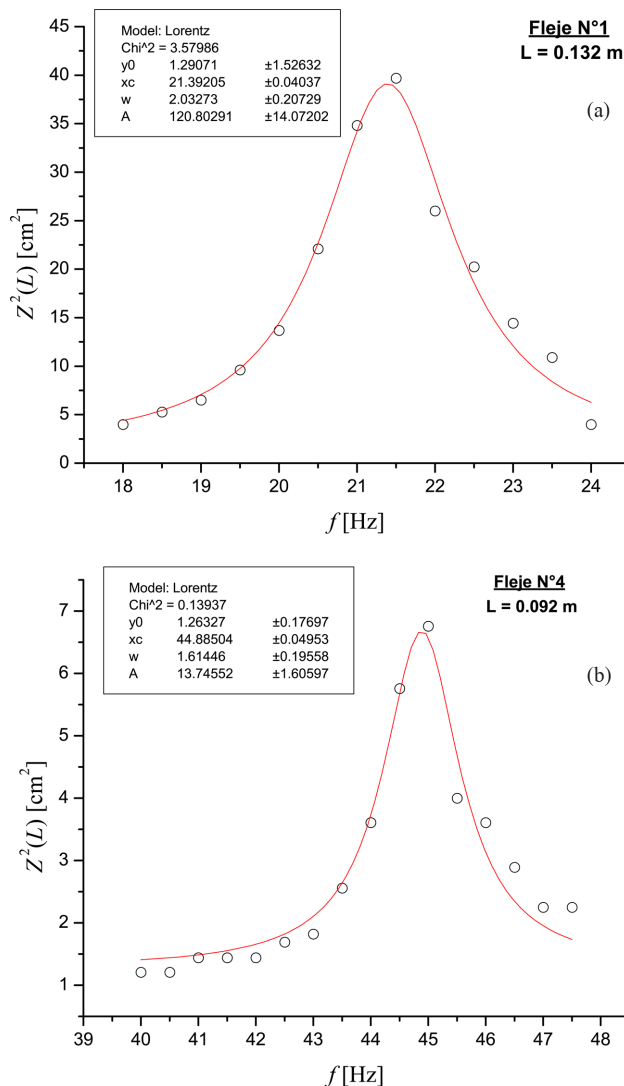


Figura 6. a) Amplitud de respuesta al cuadrado en función de la frecuencia para el fleje de longitud $L = 0.132$ m. b) Amplitud de respuesta al cuadrado en función de la frecuencia para el fleje de longitud $L = 0.092$ m.

3. Vibraciones de un fleje plástico

En este experimento sujetamos el extremo superior de un fleje de material plástico (PVC) de largo $L = 0,502$ m, espesor $h = 0,89$ mm y ancho $b = 1,7$ mm, a un impulsor de ondas mecánicas (Pasco SF - 9324) y lo mantenemos colgado verticalmente con su otro extremo libre. El impulsor electromagnético, conectado a una interfase Pasco SW 750, impone una oscilación horizontal en el extremo superior del fleje produciendo un movimiento armónico de amplitud z_0 en dicho extremo. La frecuencia del impulsor a la que se produce la máxima amplitud de oscilación del extremo libre de la tira es considerada la frecuencia de resonancia. Se buscan los distintos modos de vibración aumentando la frecuencia externa a saltos de 0.1 Hz, disminuyendo estos pasos en las cercanías de la resonancia, tal como se expresó en la experiencia anterior. En la primera columna de la Tabla 1 figuran los resultados obtenidos.

Tabla 1. Comparación entre las frecuencias de resonancias medidas y teóricas.

Frecuencia angular [s^{-1}]	
Experimental	Teórica (con $\gamma = 2 s^{-1}$)
7.8	5.2
36.4	33.2
97.4	93.0
185.3	182.3

En la Fig. 7 se muestra la amplitud de oscilación del extremo libre de la varilla en función de la frecuencia evaluada con la Ec. (25), usando $c = 0.38$ m/s y $\gamma = 2 s^{-1}$ [7]. Las posiciones de los picos de amplitud nos dan las frecuencias de resonancia del sistema predichas por el modelo (los valores obtenidos figuran en la segunda columna de la Tabla 1).

De acuerdo a la Ec. (30) la amplitud del extremo libre de la tira, en la resonancia, crece como la raíz cuadrada de la frecuencia de resonancia ω_n . Este comportamiento no se corresponde con nuestros resultados experimentales (ver lado izquierdo de la Fig. 8) donde se observa que las máximas amplitudes decrecen cuando se fuerza al sistema a oscilar en sus modos superiores. Es razonable pensar que la amplitud z_0 del impulsor no se mantiene constante a las distintas frecuencias impuestas. Si se supone que este dispositivo trabaja entregando una potencia constante en todas las frecuencias empleadas, entonces la condición a considerar para resolver el problema sería $z_0\omega = cte$.

La Fig. 7 muestra las amplitudes del extremo libre del fleje $Z(L)$ vs. ω si el extremo empotrado satisface la restricción de potencia constante, en comparación con las amplitudes medidas en las resonancias. Los resultados están normalizados con la amplitud del segundo modo. El acuerdo entre valores experimentales y predichos valida la hipótesis de potencia constante. Cabe aclarar que la curva teórica fue evaluada suponiendo $\gamma = 2 s^{-1}$, pero para valores de γ variando entre 1 y

10 s^{-1} el único cambio que se observaría en la Fig. 7 sería el ancho de las resonancias. Puede notarse que el coeficiente de amortiguamiento empleado representa un amortiguamiento débil para todos los modos, con excepción del fundamental.

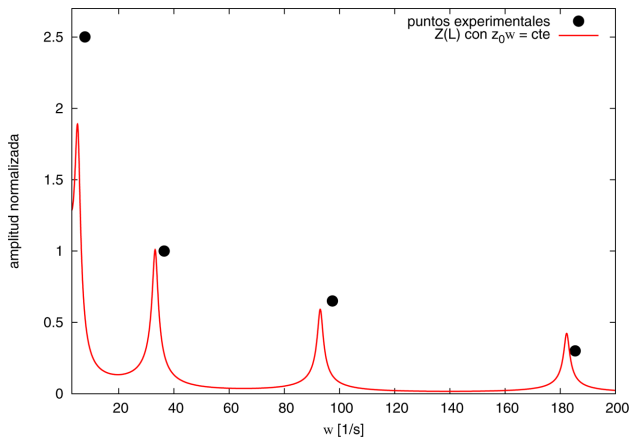


Figura 7. Amplitud experimental y teórica normalizada del extremo libre del fleje $Z(L)$ vs. ω . Los resultados teóricos satisfacen la restricción $z_0\omega = \text{cte}$ para el extremo empotrado.

En la Fig. 8 mostramos fotografías del fleje vibrando en sus cuatro primeros modos, en comparación con las formas que adopta la solución teórica a las frecuencias de dichos modos (Ec. (19)). El ajuste entre las formas experimentales y simuladas es muy bueno en cada modo, presentándose coincidencias en las posiciones de los nodos y en la disminución de amplitud de los antinodos al alejarse del extremo forzado.

Para observar la aparición de “cuasi-nodos”, se muestra en la Fig. 9a una fotografía de la varilla de

PVC vibrando en su segundo modo y la ampliación de la zona del nodo. En la Fig. 9b se muestra a la onda que describe ese mismo modo, en diferentes instantes de tiempo (Ec. (18)).

Para evaluar este comportamiento se supuso nuevamente $\gamma = 2 \text{ s}^{-1}$. Para el caso $\gamma = 0$, el nodo sería un punto, mientras que puede observarse en la Fig. 9 b que el nodo presenta una amplitud no nula y una aparente extensión espacial a lo largo del eje ‘z’ similar a la que se observa en la vibración real de la varilla (Fig. 9 a). La presencia de una fuerza viscosa provoca que los nodos tengan una amplitud no nula para que a través de ellos fluya la energía que se disipa en el otro extremo de la varilla.

Analizando la Tabla 1 podemos observar, que con la excepción del modo fundamental, las discrepancias entre las frecuencias de resonancia experimental y teórica son menores al 9%. La mayor diferencia ocurre a la más baja frecuencia (el modo fundamental), posiblemente porque en el modelo teórico no se considera al peso de la varilla. El efecto del peso sobre las oscilaciones libres de una barra es analizado en un trabajo muy interesante de Virgin *et al.* [4], quienes introducen el parámetro, $\alpha = WL^2/EI$, donde W es el peso de la tira. En nuestro experimento resulta $\alpha = 8.58$. El análisis de Virgin *et al.* muestra que, en este caso, el efecto del peso sobre la frecuencia del primer modo produce un incremento de aproximadamente un 50% por arriba de la frecuencia predicha cuando el efecto del peso de la varilla es despreciable; para el segundo el incremento es algo menor que el 10%, decreciendo esta diferencia a menos del 2% para el cuarto modo.

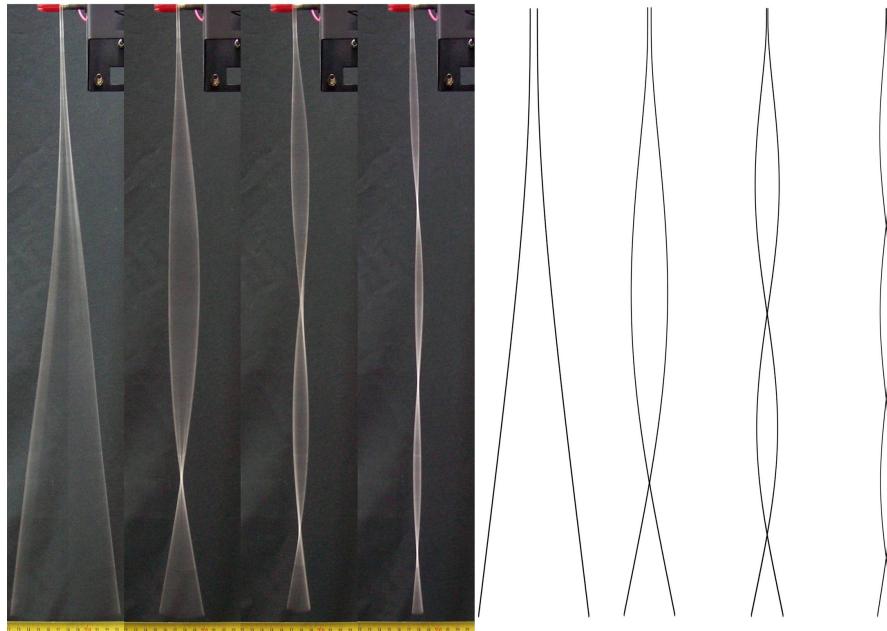


Figura 8. Cuatro primeros modos del fleje plástico vertical excitado transversalmente en el extremo superior. Izquierda: fotografías. Derecha: soluciones teóricas.

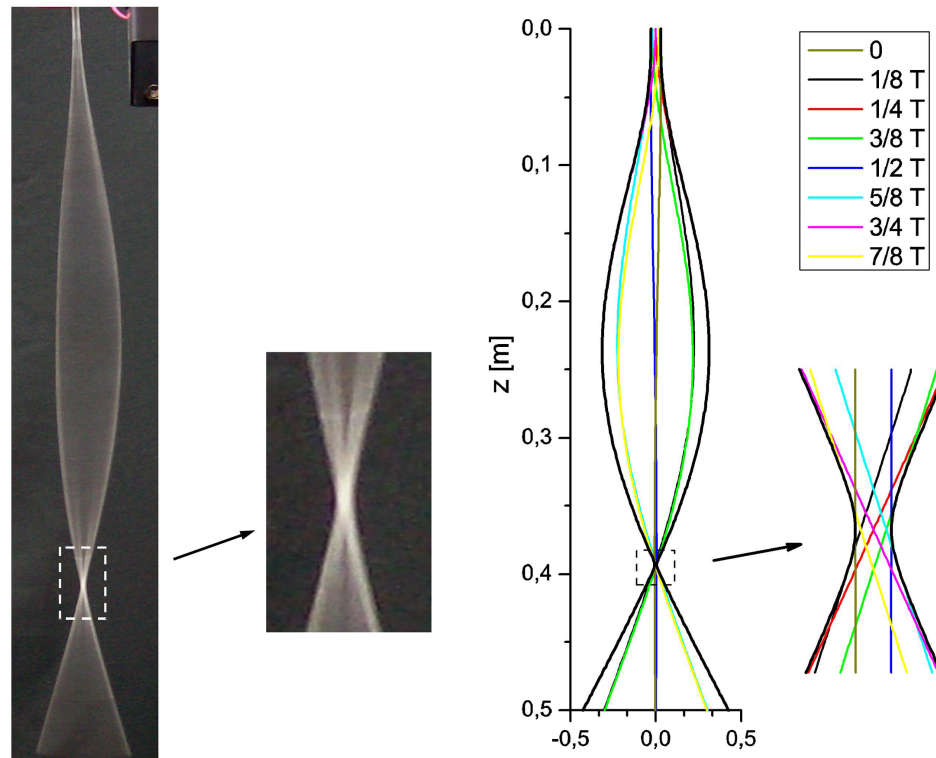


Figura 9. Segundo modo normal de oscilación de una varilla vertical. a) Fotografía de la varilla de PVC y detalle de la zona del nodo. b) Solución teórica cada octavos de período y ampliación de la zona del nodo.

La explicación física del efecto del peso sobre las frecuencias de los modos es muy simple. Considerando una disposición de la varilla vertical con su extremo inferior libre, la componente del peso normal a la varilla, cuando vibra en el primer modo, siempre tiende a llevarla a la posición de equilibrio, esto es, una fuerza restitutiva que se agrega a la fuerza de flexión. Este incremento de la fuerza restitutiva incrementa la frecuencia de oscilación del primer modo (a pesar que se produce un incremento de la inercia). Este efecto del peso también se observa y se calcula para la frecuencia del primer modo de un péndulo cuya cuerda tiene masa. En el segundo modo, debido al cambio de curvatura, en algunas porciones de la varilla, el peso tiende a llevarla a la posición de equilibrio pero, en otras, tiende a alejarla de dicha posición. Estas fuerzas restitutivas tienden a compensarse, por lo tanto, la diferencia entre las frecuencias calculadas con peso nulo y las medidas será menor. Esta compensación entre los tramos de la varilla se hace completa para modos superiores.

Si la varilla está vertical, sujeta en su extremo inferior y con su extremo superior libre, el efecto restitutivo de la fuerza peso se invierte. Por este motivo la frecuencia del primer modo es menor que la que se calcula ignorando el peso de la varilla.

Si la varilla está horizontal (como en la experiencia descrita en la sección 2), el peso actúa en la misma dirección cuando la varilla está por encima o por debajo de su posición de equilibrio: en este caso el efecto de la

fuerza peso es la de modificar la forma de la posición de equilibrio de la varilla “horizontal”, pero las frecuencias de oscilación de sus modos coinciden con las que se calculan suponiendo que la varilla no tiene peso. Esta situación es similar a la que ocurre con las oscilaciones transversales de una cuerda. Cuando la fuerza peso es perpendicular a la varilla, dentro de ciertos límites, no ejerce ningún efecto sobre su movimiento. El peso interviene en la forma estática que adquiere la varilla o la cuerda pero no sobre su movimiento alrededor de esta forma.

4. Conclusiones

En la primera experiencia hemos utilizado la Ec. (3) para determinar experimentalmente el módulo de Young del material que constituye la varilla. Las gráficas de las Figs. 3 y 4 muestran que dentro de los errores experimentales la frecuencia de resonancia del modo fundamental resulta inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de las varillas, como indica la ecuación mencionada. Este es un indicador que las muestras que se han utilizado cumplen con las hipótesis que se hacen en la teoría de Bernoulli-Euler para deducir la ecuación empleada. El valor del módulo de Young hallado se corresponde con los valores tabulados para aceros comunes. La medición de la amplitud de respuesta en las cercanías de la resonancia permite evaluar el coeficiente de amortiguamiento del material a dicha

frecuencia. En la segunda experiencia se trabaja con un material mucho menos rígido lo cual permite que se observen a simple vista la forma de los cuatro primeros modos de vibración. Se muestra que la solución teórica reproduce dicha forma bajo la hipótesis de potencia entregada constante para el dispositivo de excitación empleado. Debido a la menor rigidez del material, el peso de la varilla puede modificar las frecuencias de los modos normales de oscilación. Este efecto es importante para la frecuencia del primer modo y mucho menor para los modos superiores. Creemos que la discusión del efecto del peso sobre los modos normales de vibración de una varilla, que promueve esta experiencia, es muy enriquecedora en las experiencias de vibración de barras que se realizan tanto en un nivel universitario inicial como avanzado.

Apéndice

Oscilaciones forzadas de una varilla. Modelo teórico

Vamos a suponer que el extremo $z = L$ de la varilla está libre mientras que el extremo $z = 0$ está vibrando transversalmente con una frecuencia angular arbitraria ω y con una amplitud constante z_0 (Fig. 10). El modelo asume que la varilla es uniforme a lo largo de su longitud, de área transversal constante y está hecha de un material elástico lineal, isotrópico y homogéneo. Si sus dimensiones transversales son mucho más pequeñas que su longitud y si se consideran solamente deformaciones transversales, sus vibraciones pueden describirse por la ecuación de Euler-Bernoulli [1]

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 u(z, t)}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

donde I [m⁴] es el segundo momento de la sección transversal respecto de su eje longitudinal, E [N/m²] es el módulo de Young, ρ [kg/m³], la densidad de masa de la barra, S [m²], la sección transversal de la barra, γ [s⁻¹], el coeficiente de amortiguamiento viscoso y $u(z, t)$ [m], el desplazamiento de la barra en el punto z [m] en el instante t [s].

Las condiciones de contorno para el extremo forzado de la varilla, $z = 0$, son

$$u(0, t) = z_0 e^{i\omega t} \quad (a), \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} = 0 \quad (b), \quad (14)$$

$$Z(z) = z_0 \frac{\cosh qL \cos qL + \sinh qL \sin qL + 1}{\Delta} (\cosh qz - \cos qz) - z_0 \frac{\cosh qL \sin qL + \sinh qL \cos qL}{\Delta} (\sinh qz - \sin qz) + z_0 \cos qz. \quad (19)$$

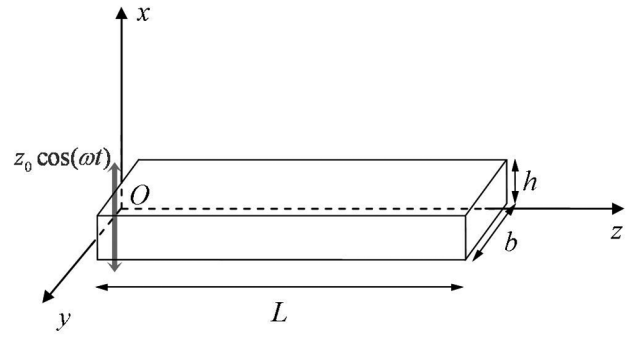


Figura 10. Diagrama del fleje estudiado. Está sujeto en el extremo $z = 0$ a un impulsor de ondas.

mientras que en el extremo libre, $z = L$, deben anularse el momento de flexión y la fuerza tangencial en todo tiempo [5], lo cual se expresa como

$$\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (c), \quad \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial z^3} = 0 \quad (d). \quad (15)$$

Para determinar el movimiento de la varilla debe imponerse una deflexión y una velocidad iniciales a lo largo del eje z ,

$$u(z, 0) = F(z) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(z, 0) = H(z). \quad (16)$$

Finalmente, la ecuación de Euler-Bernoulli (13) es resuelta con las condiciones de borde (14) y (15) y las condiciones iniciales (16).

Solución de la ecuación de la varilla forzada

El desplazamiento $u(z, t)$ de cualquier punto de la barra debe satisfacer Ec. (13) y en el régimen permanente cualquier punto de la barra oscila con la frecuencia de excitación ω . En esta situación, al ignorar el régimen transitorio, las condiciones iniciales (16) no son utilizadas. Proponemos entonces

$$\hat{u}(z, t) = Z(z) e^{i\omega t}. \quad (17)$$

De esta manera, la solución de la Ec. (13) que verifica las condiciones de contorno (14) y (15) es

$$u(z, t) = \text{Re}(\hat{u}(z, t)) = \text{Re}(Z(z) e^{i\omega t}), \quad (18)$$

donde

En esta última expresión

$$\Delta = 2(1 + \cosh qL \cos qL), \quad (20)$$

siendo

$$q^4 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\gamma}{\omega}\right) \quad \text{y} \quad c^2 = \frac{EI}{\rho S}. \quad (21)$$

Podemos observar que q^4 es un parámetro que depende de la frecuencia externa ω a través de la Ec. (21), y ω puede tomar cualquier valor real.

A los fines prácticos y para situaciones de amortiguamiento débil es importante conocer las frecuencias del sistema para oscilaciones libres ya que brindan una buena estimación de las frecuencias de resonancia. Se puede demostrar que cuando la Ec. (20) es igual a cero, obtenemos las autofrecuencias del problema asociado con las oscilaciones libres de una varilla empotrada [1,6], que en el caso de amortiguamiento débil se obtiene

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_n^2}{L^2} c, \quad (22)$$

y $\mu_1 = 1.875$, $\mu_2 = 4.694$, $\mu_n \approx (2n - 1)\pi/2$ con $n \geq 3$ los valores correspondientes a los distintos modos.

Para el modo de frecuencia más baja, sabiendo que

$$I = \frac{1}{12} bh^3, \quad S = bh, \quad (23)$$

resulta

$$f_1 = 0,162 \cdot \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (24)$$

La aplicación de esta expresión brinda un cálculo sencillo adecuado para la implementación de la enseñanza de modos normales en cursos de ingeniería en un nivel de pregrado.

Oscilaciones de la barra en las proximidades de la resonancia

El fenómeno de resonancia se manifiesta fuertemente cuando las fuerzas disipativas son pequeñas; es decir, cuando $\gamma \ll \omega$. Bajo esta condición, y si la frecuencia de excitación externa ω se hace igual o está muy próxima a la frecuencia natural de oscilación ω_n , el denominador Δ en la Ec. (20) disminuye considerablemente. La amplitud $Z(L)$ de las oscilaciones del extremo libre de la barra, viene dada por

$$A(\omega) = |Z(L)| = \left| \frac{2z_0}{\Delta} (\cos qL + \cosh qL) \right|. \quad (25)$$

Con $\gamma \ll \omega$ y $\omega \approx \omega_n$, se puede mostrar [7] que Δ , en las cercanías de la resonancia, puede aproximarse por

$$\Delta \approx \frac{\mu_n}{\omega_n} G(\mu_n) \left[-(\omega - \omega_n) + i \frac{\gamma}{2} \right], \quad (26)$$

donde

$$G(\mu_n) = \sin \mu_n \cosh \mu_n - \cos \mu_n \sinh \mu_n. \quad (27)$$

El módulo de Δ , es

$$|\Delta| = \frac{\mu_n}{\omega_n} |G(\mu_n)| \left[(\omega - \omega_n)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right]^{1/2}. \quad (28)$$

Entonces,

$$A(\omega) \approx 2z_0 \omega_n \frac{|\cos qL + \cosh qL|}{\mu_n |G(\mu_n)| \left[(\omega - \omega_n)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right]^{1/2}}. \quad (29)$$

Si evaluamos la amplitud en la resonancia resulta,

$$A(\omega = \omega_n) = |Z(L)| \approx 4 \frac{z_0}{\gamma L} \frac{\omega_n^{1/2}}{(\rho S/EI)^{1/4}}. \quad (30)$$

Esta expresión permite deducir en forma simple que si z_0 y γ no dependieran de ω_n , esto significaría que la amplitud del extremo libre, en las proximidades de la resonancia, crecería proporcionalmente con la raíz cuadrada de ω_n . Debe considerarse que el valor que adopta z_0 depende del mecanismo de excitación externa empleado para forzar las oscilaciones del sistema. Si suponemos que este dispositivo trabaja entregando una potencia constante en todas las frecuencias empleadas, entonces la condición que debe considerarse para resolver el problema es $z_0 \omega = \text{cte}$.

Con el objetivo de cuantificar el ancho de los picos de resonancia, evaluamos las frecuencias ω_1 y ω_2 para las cuales $A(\omega_{1,2}) = A(\omega_n)/\sqrt{2}$ resultando $\omega_{1,2} = \omega_n \mp \gamma/2$. El ancho de banda de la resonancia es, entonces,

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \gamma. \quad (31)$$

Esta relación brinda un método de evaluación directa del amortiguamiento del sistema en sus distintos modos normales a partir de la medición de la curva de amplitud de respuesta en cercanías de la resonancia.

Referencias

- [1] A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Dover, New York, 1996).
- [2] D. Gómez y R. Welti, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **26**, 139 (2004).
- [3] M.F. Ashby and D.R.H. Jones, *Engineering Materials I. An Introduction to Their Properties and Applications* (Pergamon Press, Oxford, 1989).
- [4] L.N. Virgin, S.T. Santillan and D.B. Holland, *Mechanics Research Communications* **34**, 312 (2007).

- [5] N.H. Asmar, *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (Pearson Prentice Hall, New York, 2000).
[6] A.H. Cottrel, *The Mechanical Properties of Matter* (John Wiley & Sons Co., New York, 1964).
- [7] C.E. Repetto, A. Roatta and R. Welti, *Eur. J. Phys.* **33**, 1187 (2012).