Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 42, e20200149 (2020)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0149

Articles
Licença Creative Commons

Diferentes promedios y su hallazgo en algunas situaciones físicas

Different averages and its finding in some physical scenarios

C. H. Wörner*[1]

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Recibida en 21 de Abril, 2020. Aceptado en 27 de Julio, 2020.

En esta nota se discuten problemas físicos en que aparecen los variados conceptos de promedio, que surgen –casi como serendipia- en muy diversos problemas físicos. En este trabajo se describen estos promedios y de contextualiza su aparición en diversas situaciones científicas. El énfasis está en el uso didáctico de estas observaciones.
Palabras clave: estadística, mediciones, promedios, enseñanza de la física

This note discusses physical questions described –almost as serendipity facts- with different types of mean values. We describe these different types of means and its contextualization in the diverse appearing scenarios. Emphasis is highlighted on its didactical use.
Keywords: statistics, measurement, averages, physics teaching

1. Introducción

Los promedios, básicamente medidas de tendencias central en un análisis estadístico, aparecen en variadas situaciones del desarrollo de los contenidos en la física universitaria. Desde la cinemática, con la diferencia entre velocidad media e instantánea, en subsecuentes temas aparecen el promedio aritmético, el geométrico y el harmónico (y algunos otros). El propósito de esta nota es mostrar la aparición repentina de los promedios en diversas situaciones físicas. Básicamente, se trata de ejemplificar cómo en diversos escenarios hay que elegir un valor representativo de un conjunto de datos. La opinión común es que ese valor representativo es el promedio. Incluso la evaluación del desempeño de nuestros estudiantes es normalmente señalado por alguna clase de promedio.

Por otra parte, el aprendizaje significativo, requiere de un anclaje desde el cual construir con sentido el nuevo conocimiento. Este anclaje no significa necesariamente que sea un antecedente lógico de la situación de aprendizaje. Alguna de los asuntos tratados en esta nota pueden utilizados para ser elegidos como los pre-supuestos que Ausubel llama “advance organizers” [1].

2. Promedios aritmético y geométrico

Abordaremos primero un caso térmico. Consideremos el caso del contacto térmico entre dos cuerpos de igual masa y calor específico, m y c, respectivamente. Inicialmente los cuerpos están a temperaturas T_1 y T_2.Puestos en contacto térmico su temperatura de equilibrio es $\frac{T_1+T_2}{2}$, y el cambio de entropía es [2]:

$$\Delta S = mc\,ln\left[\frac{\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)^2}{T_1T_2}\right] \tag{1}$$

Claramente, $<T>=\frac{T_1+T_2}{2}$, es el promedio (aritmético) entre ambas temperaturas y $\sqrt{T_1T_2}$ es el correspondiente medio geométrico. Este cambio de entropía de fácil cálculo, puede usarse didácticamente para mostrar en un caso concreto la segunda ley de la termodinámica, esto es que en los procesos naturales, la entropía aumenta (o es cero) . Esto significa que hay que demostrar la expresión anterior es positiva (o cero).

De las múltiples maneras en que esto puede realizarse hay una que engarza con la geometría griega (Fig. 1). Se debe demostrar que $(T_1+T_2)/2 \geq \sqrt{T_1T_2}$, o sea, el promedio aritmético es mayor (o igual, sólo si $T_1 = T_2$) a la media geométrica. Para demostrarlo, consideremos una circunferencia de diámetro $T_1 + T_2$. La altura en el punto de unión es la media geométrica entre las trazas de la hipotenusa. De la simple observación de la figura, esta altura es menor (o lo sumo igual) que el radio de la circunferencia.

Observemos que de este modo han aparecido dos “promedios”. Uno, el más conocido, el promedio aritmético y el otro el promedio geométrico.

El concepto de centro de masa (en el lenguaje griego, centro de gravedad), fue desarrollado ya por los griegos [3, 4] como parte de su concepción geométrica de la estática y formaba parte de la descripción de los cuerpos como su volumen y forma. Puede decirse que el centro de masa es el punto donde (a efectos de una fuerza

*Correo electrónico: carlos.worner@pucv.cl

Copyright by Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

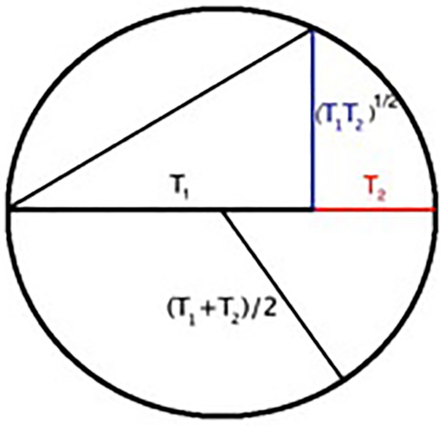

Figura 1: Representación geométrica del medio geométrico en un triángulo rectángulo con diámetro $(T_1 + T_2)$.

externa) se concentra la masa del cuerpo. Se trata de un promedio ponderado, donde cada masa aporta un factor de peso (en el sentido estadístico). Para un sistema de N masas puntuales $\{m_1, m_2, \ldots, m_N\}$, con posiciones $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \ldots \boldsymbol{r_N}$, se define como:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{\sum\limits_{1}^{N} m_i} \sum_{1}^{N} m_i \boldsymbol{r_i} \tag{2}$$

Por otra parte, este concepto está relacionado con el concepto de dipolo eléctrico [5]. Para toda distribución finita de carga eléctrica el término predominante en desarrollo multipolar es el asociado a una carga puntual que concentra (para puntos externos), la acción eléctrica. Pero aún hay efectos si dicha carga es nula y hay una distribución de cargas fuente en el sistema. El tratamiento clásico nos enseña que aunque la carga neta sea cero, hay efectos eléctricos en el espacio (así funcionan las antenas). En este caso el "promedio" de la carga es cero, pero hay momentos dipolares que producen un campo eléctrico no nulo en el espacio.

El promedio aritmético aparece también naturalmente al considerar el modelo del gas ideal. En el caso más simple del gas ideal monoatómico, se utiliza para definir la temperatura absoluta a través de la conocida relación,

$$< K >= \frac{3}{2} k_B T \tag{3}$$

donde $<K>= 1/2\ \mathrm{m}<\mathrm{v}^2>$, es la energía cinética promedio por molécula y k_B es la constante de Boltzmann [6]. Aquí, además se establece una relación entre propiedades térmicas y mecánicas. Este modelo dinámico es el primero que aparece en la enseñanza de la física básica y permite una discusión pedagógica sobre los modelos, su utilidad y también sus debilidades. La enseñanza de la física utilizando modelos ha sido resaltada por los trabajos de Hestenes [7,8].

Por otra parte y aunque no forma parte del curriculum habitual (sí en los cursos de física moderna), en el tratamiento de procesos estocásticos como el movimiento browniano aparecen los desplazamiento cuadráticos medios (también la Ec. 2 se puede escribir en términos de cuadrática media: $v_{rms} = \sqrt{< v^2 >}$). La formulación de Einstein de este fenómeno es uno de los trabajos fundamentales en su "año dorado" de 1905 y a la vez un reconocimiento empírico sobre la existencia de los "átomos" [9] Este tratamiento modélico de Einstein del movimiento browniano, reafirma la relación modelo-experimento, propio de la física contemporánea. Notable parece que Einstein use un modelo (gas ideal) para construir su propio modelo browniano.

3. Promedio armónico

No son los únicos promedios que aparecen en la enseñanza de la física elemental. También está el menos conocido "promedio armónico", M, definido para dos elementos x_1 y x_2 como:

$$\frac{2}{M} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \tag{4}$$

Salvo por el número dos, esta expresión nos aparece inmediatamente asociada al cálculo de la resistencia equivalente de dos elementos óhmicos en paralelo (o la conexión en serie de dos capacitores). De la misma manera, su forma es similar a la de la masa reducida de un sistema de dos masa puntuales, un conocido artificio para reducir el problema mecánico de dos cuerpos a su equivalente de una partícula [10]

Por otra parte es útil utilizar, en cinemática, un ejemplo de movimiento rectilíneo que permite distinguir entre promedios simples y velocidad media. Supongamos que tenemos un móvil que recorre una distancia *2L.* La mitad de esta distancia la recorre a velocidad v_1

y la otra mitad a velocidad v_2.. La pregunta es, ¿cuál es la velocidad promedio del móvil? (ver Fig. 2) De acuerdo la definición de velocidad media y usando el diagrama (x, t) correspondiente, la velocidad media es $< v >= \frac{2L}{\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2}}$, donde nuevamente aparece el medio harmónico:

$$\frac{2}{< v >} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \quad , \tag{5}$$

Nótese que el resultado <u>no</u> es $(v_1 + v_2)/2$, el simple promedio aritmético

4. Otras medidas de tendencia central

El problema estadístico básico es cómo representar un conjunto de mediciones, por un único guarismo. Los casos tratados anteriormente muestran diversas maneras de hacerlo con los promedios aritméticos, geométricos y armónicos. Así, se han discutido estas medidas de tendencia central, ya que aparecen relacionados en fenómenos físicos que pueden tratarse elementalmente. La teoría estadística distingue otras medidas de tendencia central; la mediana y la moda

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0149

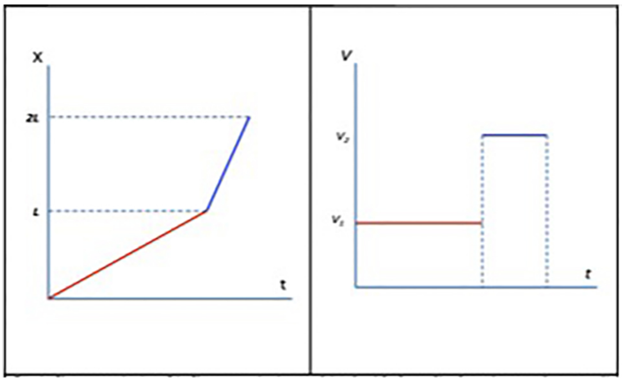

Figura 2: a) diagrama (x,t) y b) diagrama (v,t) para el problema de la velocidad media descrito en el texto. El área bajo la línea roja del diagrama (v, t) es L. Igual que le área bajo la recta azul.

Se define la mediana como el valor que divide el conjunto de mediciones en dos subconjuntos con igual número de elementos. Es decir el 50 % de los valores es menor que la mediana y el resto, el 50 % superior. Además se usa otro indicador, la moda, que se define como el valor más frecuente en la distribución de datos. En un diagrama de frecuencias, representa el valor que corresponde al máximo observado En la Fig. 3. se representa la distribución de frecuencia de rapideces de acuerdo al modelo del gas ideal [11] y se indican los respectivos valores de tendencia central utilizados.

Quizá el valor cuadrático medio aparece en la enseñanza de la física elemental porque está ligado a la energía cinética promedio, la que a su vez está relacionada con la temperatura (absoluta) como indica la Ec. 2. ¿No es asombroso que se pueda medir una rapidez con un termómetro?

Por otra parte este valor representa la varianza de la muestra con la conocida relación: $\sigma^2 =< x^2 > - < x >^2$, donde σ es la desviación estándar y σ^2 es la varianza.

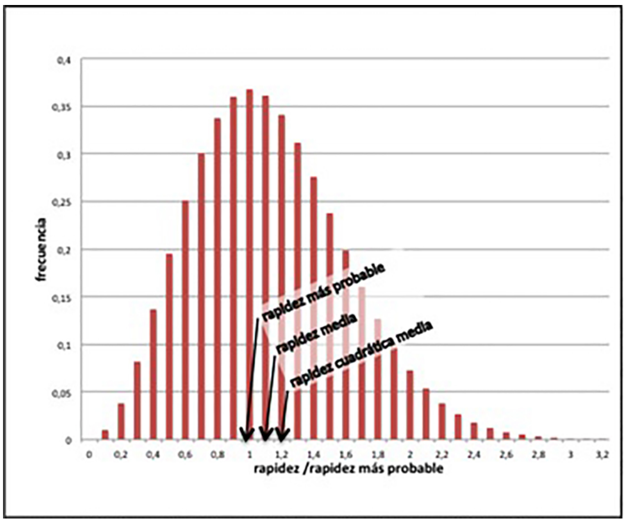

Figura 3: Distribución de frecuencias de rapideces en el modelo del gas ideal (estadística de Maxwell-Boltzmann) [11].

La desviación estándar representa una aproximación a la amplitud de la dispersión de la muestra (usualmente del promedio).

No es la única vez que se usa el valor cuadrático medio para describir un fenómeno físico. La teoría elemental de los circuitos de corriente alterna, indica el uso de este valor para describir –por ejemplo- el voltaje entre dos terminales. Puede ser el común conector domiciliario, que como indica la Fig. 4, está diseñado para un voltaje (rms) de 250V. Recordemos que el voltaje es una función periódica usualmente sinusoidal. Es además un ejemplo de cómo una variable cuyo promedio es cero, puede tener efectos importantes (a veces, devastadores). Lo dicho vale también para los voltímetros y amperímetros de corriente alterna (CA).

5. Comentarios finales

Con lo anterior se debe enfatizar la importancia de los conceptos estadísticos en la enseñanza experimental. El concepto de promedio y desviación (como medida del error) forman parte de lo esencia del proceso de medición. En ese sentido, se puede decir que la física no es una ciencia exacta, ya que su verosimilitud depende de resultados experimentales. Esta realidad ya fue señalada por Galileo cuando habla de los "accidentes" (*accidenti*, en el original italiano). Como lo señala Koerge [12] refiriéndose al pensamiento de Galileo:

> *Because of physical, observational, and mathematical accidents, we do not find nor expect to find an exact match between ideal, simple scientific laws and what we actually observe*[1]

En resumen, hemos mostrado diversas aplicaciones (o reconocimiento) de la aparición de estas medidas de tendencia central (o valores típicos) en el desarrollo de la física universitaria. Estos pueden ser usados con provecho en las distintas propuestas didácticas que cada profesor elabore.

En los cursos introductorios de Mecánica Cuántica también aparecen estos conceptos, sobretodo al considerar la interpretación probabilística de la función de

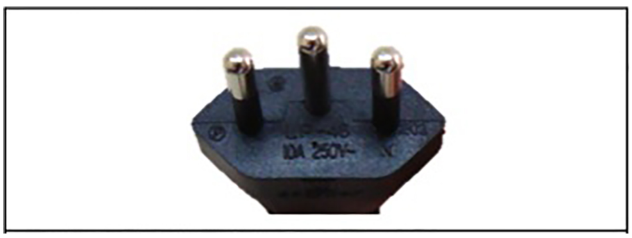

Figura 4: Enchufe (o clavija) eléctrica común que muestra sus indicaciones de uso: CA; 250 V (rms).

[1] Debido a accidentes observacionales, físicos y matemáticos no esperamos ni podemos esperar una coincidencia perfecta entre las leyes físicas ideales y simples., con lo que realmente observamos.

onda sugerida por la escuela de Copenhagen [13]. Un típico ejemplo es el cálculo del error intrínseco de una medición para introducir el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Para terminar, surge la pregunta: ¿cuál de estos diversos indicadores de tendencia central -los descritos y/u otros- hay que usar? No hay una respuesta única a esta pregunta y el presente ejercicio debiera a ayudar para que profesores y estudiantes disciernan la propia respuesta.

Aquí sólo queda usar el sentido común. Y el instructor ilustrado dirá: hay que tener presente el contexto de lo que se está discutiendo.

Referencias

[1] D.P. Ausubel, *Journal of Educational Psychology* **51**, 267 (1960).
[2] S. Kiatgamolchai, *Phys. Teach.* **53**, 95 (2015).
[3] Arquimedes, *El Método* (Alianza Editorial, Madrid, 1986).
[4] C.H. Wörner y G.I. Amunátegui, *Eur. J. Phys.* **28**, 643 (2007).
[5] C.H. Wörner, *Phys. Teach* **39**, 462 (2001).
[6] R.A. Serway, *Physics for Scientist and Engineers* (Saunders College Publishing, Philadelphia, 1996) 4ª ed.
[7] D. Hestenes, *Am J Phys* **55**, 440 (1987).
[8] D. Hestenes, in: *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies,* editado por R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Springer, Boston, 2010).
[9] J. Bernstein, *Am. J. Phys.* **74** 863 (2006).
[10] J.D. McGervey, *Am J. Phys.* **53**, 909 (1985).
[11] R.A. Serway, C.J. Moses y C.A Moyer, *Modern Physics* (Thomson Brooks/Cole, Belmont, 2005).
[12] N. Koertge, *Journal of the History of Ideas* **3**, 389 (1977).
[13] R.B. Leighton, *Principles of Modern Physics* (Mac-Graw Hill, New York, 1959).

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0149