

Um modelo teórico para o cálculo do raio do próton

A theoretical model for calculating the proton radius

Renata Krupczak^{*1}, César Augusto Dartora²

¹Universidade Federal do Paraná, Departamento de Física, Curitiba, PR, Brasil.

²Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Elétrica, Curitiba, PR, Brasil.

Recebido em 21 de janeiro de 2021. Revisado em 03 de março de 2021. Aceito em 08 de março de 2021.

Medir o raio do próton oferece informações a respeito de sua estrutura interna, de modo que medidas utilizando diferentes métodos foram realizadas ao longo da história. Contudo, em 2010 uma nova medida diferindo 4% das anteriores gerou o problema chamado de o quebra-cabeça do raio do próton, referindo-se ao fato de não haver explicação aparente para essa discrepância. Observando que os atuais cálculos do raio do próton são fundamentados em dados experimentais, este artigo tem como propósito apresentar um modelo teórico simplificado, baseado nos termos de energias potenciais da QCD perturbativa. Apesar de aproximado, o modelo chega ao valor de 0,817 fm, o que difere em 2,9% do atual valor considerado pelo CODATA. Assim sendo, este trabalho busca contribuir com uma formulação didática para abordar o problema do tamanho do próton e o entendimento das interações fundamentais da matéria.

Palavras-chave: Energias potenciais da QCD, quarks, fator de forma do próton.

Measuring the proton radius provides information about its internal structure, therefore measurements using different methods have been carried out throughout history. However, in 2010 a new measure that differs 4% from the previous ones generated the so-called proton radius puzzle, referring to the fact that no apparent explanation has been found to explain why such measures differ. Observing that the current proton radius calculations are based on experimental data, this article aims to put forward a simplified theoretical model, being based on the potential energies of the perturbative QCD. Although approximate, the model amounts to 0.817 fm, which differs by 2.9% from the current value considered by CODATA. Therefore, this work seeks to contribute with a didactical formulation to the proton radius problem and the understanding of the fundamental interactions of matter.

Keywords: Potential energies of QCD, quarks, proton form factor.

1. Introdução

A busca pela constituição da matéria no seu aspecto mais fundamental é umas das questões que sempre guiou a humanidade, desde os antigos gregos, que procuravam a partícula indivisível, até as atuais pesquisas nos mais modernos aceleradores de partículas. Neste contexto, a Física de Partículas Elementares é o ramo das ciências naturais que investiga a estrutura e as interações mais fundamentais da natureza.

Atualmente, o chamado Modelo Padrão (*standard model* em inglês) descreve as várias partículas elementares conhecidas, ou seja, aquelas que até o presente estágio do desenvolvimento parecem não possuir nenhuma estrutura interna, como é o caso dos quarks e elétrons. Segundo a teoria quântica, as partículas ditas elementares devem possuir dimensão nula, ou seja, são do tipo pontuais, e são compreendidas como excitações locais de um campo [1]. No entanto partículas como o próton e o nêutron, os quais possuem estrutura interna [2], devem apresentar um tamanho finito, que está diretamente ligado à sua composição.

Neste contexto, a determinação do tamanho do próton pode revelar informações sobre sua estrutura e interações internas. Atualmente existem dois métodos experimentais para chegar-se ao valor do raio do próton [3]. Um deles utiliza a seção de choque elétron-próton [4] e o outro método é realizado através da espectroscopia do átomo de hidrogênio [5]. Para os dois procedimentos, o valor obtido é próximo de 0,87 fm. No entanto, em 2010 uma nova medida com espectroscopia do hidrogênio muônico, no qual o elétron dá lugar ao seu análogo mais pesado denominado de múon, apontou para um valor diferente, da ordem de 0,84 fm [6]. Atualmente esta divergência é conhecida como o quebra-cabeça do raio do próton [7] e não pode ser atribuída aos limites de erros experimentais. Esse problema impulsiona a busca tanto por medidas experimentais mais precisas quanto por modelos teóricos capazes de explicar essa discordância.

Tendo em vista que os atuais modelos teóricos para o raio do próton são baseados no fator de forma do próton, o qual é obtido experimentalmente [3], este trabalho traz como objetivo central apresentar um modelo teórico e simples, que deve partir da teoria perturbativa da QCD como primeira tentativa de reproduzir um valor teórico aproximado para o raio do próton.

* Endereço de correspondência: renatakrupczak@gmail.com

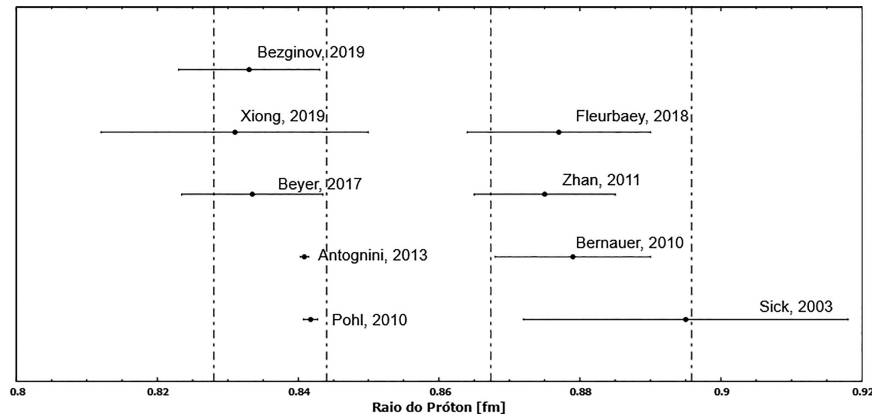


Figura 1: Representação dos valores experimentais do raio do próton e suas barras de erro, em que é possível perceber os dois diferentes grupos de valores. Cada ponto é identificado com o primeiro autor do artigo e o ano de publicação, os dados completos da montagem experimental podem ser consultados nas referências [4–6, 8–13]. As duas linhas tracejadas formam um intervalo à direita e um à esquerda, que representam a média dos valores máximos e mínimos das medidas selecionadas.

Para isto, o presente trabalho está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 expõe-se os resultados de medidas atuais; já a Seção 3 revisa características fundamentais da Cromodinâmica Quântica (QCD) e apresenta algumas energias potenciais bem conhecidas da teoria, que serão utilizadas na Seção 4 como base para o nosso modelo de cálculo. Por fim, na Seção 5 são identificados os resultados finais e conclusões deste trabalho.

2. Atuais Medidas do Raio do Próton

Atualmente, o raio do próton é obtido através do fator de forma do próton G_p [3], o qual é uma função experimental que se relaciona com o raio quadrático médio através da equação

$$\langle r_p^2 \rangle = 6 \frac{dG_p(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0}, \quad (1)$$

sendo Q o momento transferido em um espalhamento.

Deste modo, os modelos atuais se baseiam na obtenção do fator de forma G_p . Um dos métodos é através da seção de choque do espalhamento elétron-próton, em que se considera a influência do tamanho finito do próton. Além desse, outro procedimento experimental pode ser realizado, o qual utiliza a espectroscopia de laser do átomo de hidrogênio, em que é mensurada a diferença energética entre alguns níveis eletrônicos, sendo possível obter o fator de forma. Para os dois métodos os resultados do raio do próton chegavam em valores da ordem de 0,87 fm com incertezas de até 2% [4].

No entanto, com o avanço da espectroscopia realizou-se uma medida com o átomo de hidrogênio muônico, o qual possui um raio atômico da ordem de 200 vezes menor que o raio do hidrogênio eletrônico, devido à massa do múon ser aproximadamente 200 vezes a massa

do elétron. Assim com esta medida, pretendia-se diminuir as incertezas experimentais na determinação do raio do próton. Apesar de as incertezas caírem para no máximo 0,1%, o valor obtido para o raio do próton foi da ordem de 0,84 fm [6], o que gerou uma contradição entre os valores do raio do próton obtidos por métodos distintos.

A incompatibilidade dos dois valores obtidos não é causa de uma incerteza experimental, pois essa diferença de 4% ultrapassa as incertezas dos experimentos. A Figura 1 mostra as divergências de algumas medições realizadas por diferentes grupos de pesquisa. Assim esses distintos resultados culminam no que se conhece como o quebra cabeça do raio do próton, o que gerou uma busca por melhores medidas e que explicassem a discordância desses dados. Os recentes trabalhos [8] e [9] determinaram através do desvio de Lamb do hidrogênio eletrônico, medidas da ordem de 0,83 fm, concordando com as medidas de espectroscopia do hidrogênio muônico. Além disso, outra recente medida feita em 2019 através do espalhamento elétron-próton, também concordou com o valor menor do raio [10]. Com estas medidas, atualmente o CODATA¹ assume o raio do próton com o valor de 0,8414 fm, pois este é o valor médio de medidas que utilizam dados de espectroscopia do hidrogênio eletrônico e muônico, além do espalhamento elétron-próton.

3. Energias Potenciais da QCD

A presente Seção tem como objetivo revisar as propriedades da interação forte e examinar algumas energias potenciais associadas com a carga de cor dos quarks. Posteriormente, essas energias serão utilizadas na determinação de um modelo para o cálculo do raio do próton.

¹ <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?rp>, acessado em 11 de janeiro de 2021.

3.1. A carga de cor e a QCD

Hoje sabemos que os prótons e nêutrons não são partículas verdadeiramente elementares, sendo constituídas de unidades menores, denominadas quarks. Os quais são separados em três diferentes gerações, a primeira e mais importante é constituída de dois tipos (ou sabores) de quarks, o up (u) e o down (d), que possuem carga elétrica $+2/3$ e $-1/3$ da carga fundamental do elétron, respectivamente. Os anti-quarks \bar{u} e \bar{d} possuem as cargas de sinal contrário, sendo no restante idênticos aos quarks. O próton é constituído de dois quarks do tipo u e um quark do tipo d , sendo denotado simplesmente por uud , enquanto o nêutron tem a constituição udd . Para um tratamento detalhado dos quarks e suas interações através da chamada QCD há uma vasta literatura que pode ser consultadas [1, 2, 14].

O estudo da interação nuclear forte tem origem na busca pela explicação da estabilidade do núcleo atômico, o qual possuindo partículas de carga elétrica positiva, deveria sofrer uma repulsão coulombina não sendo estável. Para corrigir isso, propõe-se uma força atrativa entre os prótons que supere a repulsão eletrostática [2], e, que também age entre nêutrons e prótons. Atualmente entende-se que a convivência de prótons e nêutrons no núcleo é na verdade uma interação forte residual, já que a verdadeira interação forte é responsável pela união de quarks dentro do próton (ou do nêutron). Desse modo, os quarks devem possuir além da carga elétrica, um outro tipo de carga conhecida como carga de cor, a qual é a fonte da interação forte. Para que ocorra concordância com o princípio de exclusão de Pauli, esta carga deve vir em três tipos distintos, denominados R (red), G (green) e B (blue), em analogia com o padrão de cores RGB, pois a combinação de R, G e B produz carga cor branca (ou nula) [1]. A descrição matemática da carga cor por meio de uma teoria de Gauge é feita através do grupo de simetria $SU(3)$ e das matrizes de Gell-Mann [14].

Cada quark possui uma carga de cor, a qual pode ser alterada pela emissão ou absorção de um glúon, de modo que, para ocorrer conservação da carga de cor, o glúon deve possuir uma cor e uma anticor em sua composição. Essa característica faz com que o glúon além de mediar a interação forte, possa interagir consigo mesmo. Essa particularidade resulta no comportamento não perturbativo da teoria.

O fato de a carga cor não ser observada externamente na matéria ordinária é explicado pela propriedade de confinamento, em que os quarks só aparecem em estado de cor nula. Esses estados podem ser bárions (três quarks sendo um de cada cor) como é o caso do próton, ou podem ser mésons (um quark e um antiquark sendo um de uma cor e o outro da respectiva anticor). No entanto existem ainda outros estados ligados que são neutros, mas por não serem tão comuns são ditos estados exóticos, é o caso dos tetraquarks e pentaquarks [15, 16].

3.2. Energia potencial de interação entre quarks

A interação entre duas partículas carregadas com carga elétrica é bem conhecida da eletrostática e dada pela energia potencial de Coulomb, a qual possui um comportamento baseado no inverso da distância. Na Física de Partículas é mais comum reescrevermos a energia potencial através da constante de acoplamento da teoria [2], que no caso da eletrodinâmica quântica (QED) assume o valor $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$. Com isto, a energia de Coulomb é dada pela expressão:

$$U_{QED} = Q_1 Q_2 \frac{\alpha \hbar c}{r}, \quad (2)$$

em que Q_1 e Q_2 representam as respectivas cargas elétricas das partículas 1 e 2 em unidades da carga elementar $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, r representa a distância de separação entre as partículas.

Além da carga elétrica, quarks possuem carga de cor, a qual tem uma energia potencial análoga a equação 2, em que deve-se realizar a troca da constante de acoplamento da QED α pela constante da QCD α_s e alterar as frações de carga $Q_1 Q_2$ por um fator de cor f :

$$U_{QCD} = f \frac{\alpha_s \hbar c}{r}. \quad (3)$$

Aqui o fator de cor f está relacionado com o tipo de interação, possuindo valores de $f = -2/3$ para interação quark-quark e $f = -4/3$ para interação quark-antiquark. Este fator de cor pode ser obtido através do cálculo da amplitude de espalhamento entre os quarks interagentes, dependendo do estado de cor do sistema. Para maiores detalhes consulte [2].

Uma análise sobre a equação 3 revela que U_{QCD} não é só dependente do fator de cor e da distância entre os quarks, mas também da constante de acoplamento da teoria α_s , a qual apresenta uma forte variação com a energia do sistema. Este ponto é crucial para a QCD, pois para a teoria quântica de campos a constante de acoplamento define se a teoria pode ser descrita de modo perturbativo ou não. Assim para a QCD, em alguns limites a teoria perturbativa possui boa descrição, já em outros limites a teoria não perturbativa prevalece, sendo necessário o uso de um formalismo mais complexo.

Tendo em mente nosso objetivo, usaremos $\alpha_s = 1$ [17], que corresponde ao seu valor para a energia de repouso do próton. No entanto, este valor define, também, o limite máximo para o uso de uma teoria perturbativa, de modo que utilizando isto, nosso modelo toma um caráter aproximado por desconsiderar energias da teoria não perturbativa.

3.3. Energia potencial de confinamento

Uma das propriedades que difere a QED e a QCD é a carga de seus bósons mediadores. No caso da interação forte o glúon além de mediar a interação possui a carga de cor, ou seja, o glúon é capaz de interagir consigo

mesmo, diferentemente da interação eletromagnética, na qual o fóton é neutro e é responsável somente pela mediação da interação entre as partículas carregadas.

Tomando conhecimento deste fato, surgem características exclusivas da QCD, como o confinamento e a liberdade assintótica [2]. O confinamento é a propriedade responsável pela não existência de quarks livres. Mesmo o confinamento sendo aceito como uma propriedade fundamental da QCD, sua descrição é baseada em modelos fenomenológicos, aqui usaremos a energia potencial de comportamento linear com a distância de separação dos quarks [18]:

$$U_{conf} = kr, \quad (4)$$

em que $k = 1 \text{ GeV/fm}$ [17], que é uma constante obtida experimentalmente. A equação 4 possui o comportamento esperado de unir os quarks quando estes são colocados à grandes distâncias.

3.4. Energia potencial de vácuo

Outra energia potencial que é utilizada em nosso modelo está associada com estados ligados, como o caso do próton. A energia potencial de vácuo, descrita pelo chamado bag model, examina a energia necessária para a criação de uma região onde o vácuo é perturbado, ou seja, a energia necessária para a existência da partícula.

O modelo utilizado aqui é proporcional ao volume do estado ligado e à constante de bag B [19], a qual possui um valor de $B = \frac{6\alpha_s \hbar c}{4\pi r^4}$, de modo que:

$$U_{vacuo} = \frac{4}{3}\pi r^3 B = 2\frac{\alpha_s \hbar c}{r}. \quad (5)$$

4. Cálculo do Raio do Próton

Com o objetivo de elaborar um modelo teórico para o cálculo do raio do próton, o qual não dependa do fator de forma, esta seção une a teoria de energias potenciais perturbativas da QCD, para a obtenção de um valor para o raio do próton.

A proposta de modelo geométrico que descreva o próton é uma esfera de raio R_p . Como mencionado anteriormente, quarks são partículas elementares que não possuem uma estrutura interna, ou seja, quarks não apresentam um tamanho, mas devem ser localizados em um ponto para que se estabeleça uma energia de interação. Deste modo, mesmo com sua dinâmica de movimento dentro do próton, propõe-se um modelo no qual quarks teriam probabilidade próxima de zero para se localizarem no centro e nas bordas do próton, pois esses pontos gerariam um desequilíbrio entre suas forças atrativas e repulsivas. Assim, a probabilidade de encontrar o quark é dada por uma gaussiana de largura R_p centrada em $R_p/2 = R$. Além disso, neste modelo os três quarks estão separados pela mesma distância r , o que faz com que seus pontos de maior probabilidade formem um cone equilátero.

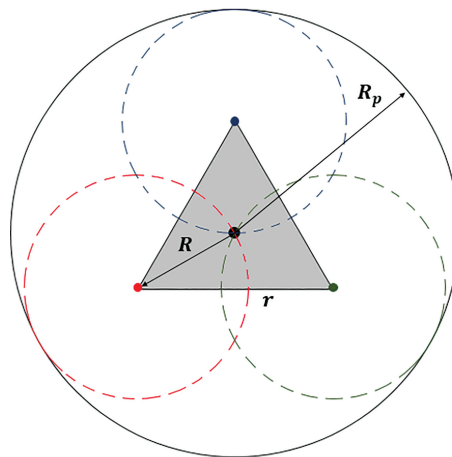


Figura 2: Representação esquemática da posição dos quarks dentro do próton de raio R_p . Os círculos tracejados representam as possíveis regiões de probabilidade para localização do quark, como simplificação propõe-se que os quarks estão localizados exatamente no centro deste círculo de raio $R = R_p/2$. O cone equilátero central (lado medindo r) representa a área de ligação dos três quarks.

A visualização deste modelo geométrico é dada na Figura 2, na qual representa-se as posições dos quarks em um modelo esquemático. Uma análise matemática desta geometria revela a relação entre as três distâncias é: $R_p = 2R = 2r/\sqrt{3}$.

É importante justificar que este modelo utiliza apenas energias da QCD, sem considerar por exemplo a energia do potencial de Coulomb elétrica, pois como vimos das equações 2 e 3, sua diferença central reside em α e α_s , as quais diferem por duas ordens de grandeza. Assim contribuições eletromagnéticas são desconsideradas.

Ajustando a equação 3 para as distâncias da Figura 2 e somando para os três pares quark-quark, os quais mesmo apresentando sabores diferentes possuem a mesma energia, já que U_{QCD} só é dependente do estado de cor:

$$U_{QCD} = -2\frac{\alpha_s \hbar c}{r} = -\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\alpha_s \hbar c}{R_p}. \quad (6)$$

As energias de confinamento e vácuo atuam no estado ligado como um todo (de raio R) e não em cada par de interação quark-quark. De modo que das equações 4 e 5, escritas em função de R_p ficam dadas por:

$$U_{conf} = kR = \frac{kR_p}{2}, \quad (7)$$

$$U_{vacuo} = 2\frac{\alpha_s \hbar c}{R} = 4\frac{\alpha_s \hbar c}{R_p}. \quad (8)$$

Com as equações 6, 7 e 8 descritas em termos do raio do próton, é possível escrever a energia potencial total do próton:

$$U_p = 4\frac{\alpha_s \hbar c}{R_p} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{k}{2}R_p. \quad (9)$$

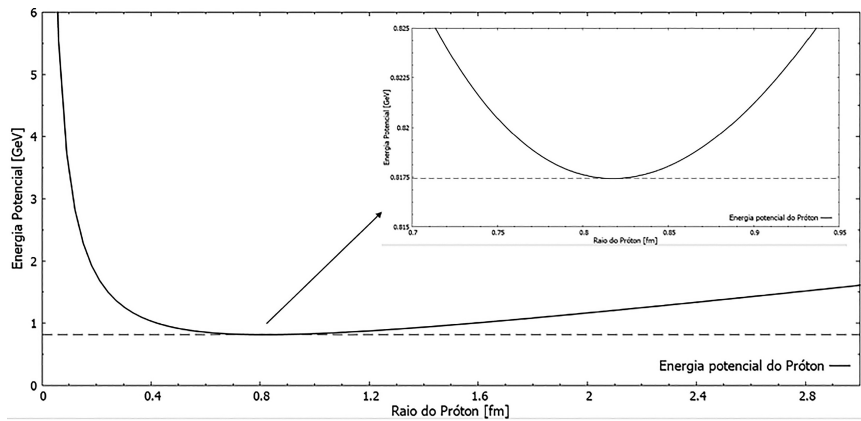


Figura 3: Gráfico da energia potencial em função do raio do próton $U_p = 0,3341/R_p + \frac{1}{2}R_p$, nas unidades adequadas. No gráfico maior percebe-se o comportamento da função energia potencial do próton, já o gráfico do lado superior direito focaliza no ponto de equilíbrio, demonstrando que a função possui um ponto de mínimo, o qual corresponde ao raio do próton $R_p = 0,817$ fm. A linha tracejada indica a energia correspondente ao ponto de mínimo, a qual vale $0,81744$ GeV.

Para encontrar o raio estável do próton, busca-se o ponto em que a força resultante seja nula, ou seja, basta derivar a equação 9 em relação a R_p igualando o resultado a zero. Com isto determinamos um ponto de equilíbrio, o qual pode ser provado que é um ponto de equilíbrio estável, dado por:

$$R_p = \sqrt{\frac{8\alpha_s \hbar c}{k}(1 - 1/\sqrt{3})} \simeq 8,17 \times 10^{-16} \text{ m}, \quad (10)$$

em que usamos $\alpha_s = 1$, $\hbar = 1,054 \times 10^{-34}$ J.s, $c = 3 \times 10^8$ m/s e $k = 1$ GeV/fm = $1,6 \times 10^5$ J/m. Deste modo o raio encontrado para o próton é de $R_p = 0,817$ fm. A Figura 3 plota a equação 9 gerada neste trabalho. Nela é possível encontrar o ponto de mínimo, que define o raio do próton $R_p = 0,817$ fm e sua respectiva energia $U_p \simeq 0,82$ GeV, que é próxima da energia de repouso do próton $E = 0,94$ GeV. A diferença de energia entre nosso modelo e a energia de repouso do próton, é ocasionada por este trabalho não considerar as energias da QCD não perturbativa, as quais alteram o valor da constante α_s e possuem mais termos relacionados com a contribuição da auto interação de glúons.

Perceba que nosso modelo atinge o objetivo de calcular o raio do próton através de uma análise teórica da estrutura da QCD. No entanto esse modelo não soluciona o quebra-cabeça do raio do próton, pois para tal, não se deve fazer as simplificações de desconsiderar a parte não perturbativa da teoria. Modelos que usam a QCD de rede, possibilitam uma melhor análise do próton como elemento não perturbativo da QCD, no entanto vale ressaltar que esse ajuste retira a simplicidade deste modelo, pois sua formulação matemática teria uma estrutura mais complexa.

5. Conclusões

Esse trabalho criou um cálculo para o raio do próton, obtendo o valor de $R_p = 0,817$ fm, o qual possui um

erro de 2,9% do atual valor considerado pelo CODATA (0.8414 fm). O objetivo era conseguir uma formulação diferente da atual, a qual se baseia na obtenção do fator de forma. Para isto elaborou-se um modelo teórico simplificado estruturado nas energias potenciais da QCD.

Vale ressaltar que mesmo o modelo obtendo um valor da ordem das medidas experimentais, ele não é capaz de resolver o atual quebra-cabeça do raio do próton, pois para isso deve-se tomar um modelo exato, no qual considera-se todas as contribuições internas do próton, ou seja, contribuições da teoria não perturbativa.

Além do valor do raio do próton, o modelo resulta na energia associada com a massa de repouso do próton, em que percebe-se a falta da contribuição não perturbativa para a energia.

Desse modo, esse trabalho buscou contribuir com uma formulação teórica para o problema do tamanho do próton, contribuindo com o entendimento da interação entre quarks em um estado ligado.

Referências

- [1] M.A. Moreira, Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 1306 (2009).
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley & Sons, Nova Jersey, 1987).
- [3] G.A. Miller, Physical Review C **99**, 035202 (2019).
- [4] I. Sick, Physics Letters B **576**, 62 (2003).
- [5] H. Fleurbaey, S. Galtier, S. Thomas, M. Bonnaud, L. Julien, F. Biraben, F. Nez, M. Abgrall e J. Guéna, Physical Review Letters **120**, 183001 (2018).
- [6] R. Pohl, A. Antognini, F. Nez, F.D. Amaro, F. Biraben, J.M.R. Cardoso, D.S. Covita, A. Dax, S. Dhawan, L.M.P. Fernandes et al., Nature **466**, 213 (2010).
- [7] H.W. Hammer e U.G. Meißner, Science Bulletin **65**, 257 (2020).
- [8] A. Beyer, L. Maisenbacher, A. Matveev, R. Pohl, K. Khabarova, A. Grinin, T. Lamour, D.C. Yost, T.W. Hänsch, N. Kolachevsky et al., Science **358**, 79 (2017).

- [9] N. Bezginov, T. Valdez, M. Horbatsch, A. Marsman, A.C. Vutha e E.A. Hessels, *Science* **365**, 1007 (2019).
- [10] W. Xiong, A. Gasparian, H. Gao, D. Dutta, M. Khadaker, N. Liyanage, E. Pasyuk, C. Peng, X. Bai, L. Ye et al., *Nature* **575**, 147 (2019).
- [11] A. Antognini, F. Nez, K. Schuhmann, F.D. Amaro, F. Biraben, J.M.R. Cardoso, D.S. Covita, A. Dax, S. Dhawan, M. Diepold et al., *Science* **339**, 417 (2013).
- [12] J.C. Bernauer, *Physical Review Letters* **105**, 242001 (2010).
- [13] X. Zhan, *Physics Letters B* **705**, 59 (2011).
- [14] W. Greiner, S. Schramm e E. Stein, *Quantum Chromodynamics* (Springer Science & Business Media, Berlin, 2007).
- [15] S.K. Choi, S.L. Olsen, K. Abe, T. Abe, I. Adachi, B.S. Ahn, H. Aihara, K. Akai, M. Akatsu, M. Akemoto et al., *Physical Review Letters*, **91**, 262001 (2003).
- [16] R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi, A. Affolder, Z. Ajaltouni, S. Akar, J. Albrecht, F. Alessio, M. Alexander, S. Ali et al., *Physical Review Letters* **115**, 072001 (2015).
- [17] M. Thomson, *Modern Particle Physics* (Cambridge University Press, Nova York, 2013).
- [18] A.E. Bernadini, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **25**, 305 (2003).
- [19] P.R. Silva, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **30**, 3305 (2008).