Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 2, p. 91 - 91, (2004)
www.sbfisica.org.br

Carta ao Editor

Cálculo do trabalho elétrico via conceitos microscópicos

G. F. Leal Ferreira[1]

[1]*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo*

Na Eletrostática macroscópica mostra-se que o trabalho elétrico, por unidade de volume, para produzir o deslocamento $\vec{D}$ e o campo elétrico $\vec{E}$, num dielétrico, é $\vec{D}.\vec{E}/2$. Mas sabemos também, do estudo microscópico da polarização, que o campo efetivo $\vec{E}_{ef}$ que polariza uma molécula num meio isotrópico é o campo de Lorentz,

$$\vec{E}_{ef} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \tag{1}$$

em que estamos usando o sistema MKS racionalizado, $\vec{P}$ é a polarização e ϵ_0 é a permitividade do vácuo. Vem então a pergunta: se as moléculas existem de fato, como justificar o resultado macroscópico, ou, em outros termos, se é possível reobtê-lo usando na análise grandezas microscópicas. Para isso, faremos aqui uma simplificação que consistirá em usarmos o caso de um condensador plano, preenchido por dielétrico homogêneo, em que todas as grandezas são co-lineares. Seremos, porém, um pouco mais gerais do que na Eq. 1 e partiremos da relação linear

$$E_{ef} = E + \frac{aP}{\epsilon_0} \tag{2}$$

em que a é uma constante. Suponhamos que o condensador tenha sido carregado, dispendendo-se para isso o trabalho $DE/2$ por unidade de volu$m$e. Tem-se, em geral,

$$D = \epsilon_0 E + P \tag{3}$$

Imaginemos que ao se atingir o campo E, a polarização já induzida no dielétrico fosse congelada. Para o estudo envolvendo o cômputo de trabalho, tal suposição é perfeitamente permissível. E imaginemos também que começássemos a, ordenadamente, retirar moléculas polarizadas, ou seja, dipolos, do interior do dilétrico, levando-as ao infinito, onde estes podem ser considerados como isolados. Queremos calcular o trabalho total que deveria ser realizado para se esvaziar por inteiro o condensador. A energia w de um dipolo $\vec{p}$ num campo elétrico $\vec{F}$ é $w = -\vec{p}.\vec{F}$. O trabalho realizado para retirar o dipolo do campo será a energia final menos a inicial, ou seja, $\vec{p}.\vec{F}$. Retornando ao dielétrico, o trabalho dW_1 realizado para variar a polarização de dP será $dW_1 = -E_{ef}dP$, o sinal negativo se devendo ao fato de a polarização ser decrescente. Durante o processo imaginado, o campo efetivo, Eq. 2, varia, embora o deslocamento se mantenha constante. Com isso, substituindo E em função de D e P, Eq. 3, na Eq. 2, o trabalho total W_1 para levar todos os dipolos ao infinito será

$$W_1 = -\int_P^0 (\frac{D-(1-a)P)}{\epsilon_0}dP = \frac{DP}{\epsilon_0} - \frac{(1-a)P^2}{2\epsilon_0} \tag{4}$$

Na fase em que estamos teríamos dispendido, além de $DE/2$,o trabalho W_1, ou seja, ao todo W_2

$$W_2 = \frac{D(D-P)}{2\epsilon_0} + \frac{DP}{\epsilon_0} - \frac{(1-a)P^2}{2\epsilon_0} = \frac{D^2}{2\epsilon_0} + \frac{PE_{ef}}{2} \tag{5}$$

Disporíamos então de um condessador carregado, no vácuo, que forneceria na descarga trabalho igual a $D^2/2\epsilon_0$, igual ao primeiro termo após a última igualdade da Eq. 5, e da energia dos dipolos isolados. Sendo assim, temos agora de verificar se a energia armanezada nos dipolos isolados igualaria o termo $PE_{ef}/2$ da Eq. 5. E de fato isto acontece. Porque, como mostraremos logo, a energia armazenada em cada dipolo é igual a $\alpha E_{ef}^2/2$ [1] sendo α a polarizabilidade das moléculas e sendo N o número delas por unidade de volume. Teríamos ao todo a energia $N\alpha E_{ef}^2/2 = PE_{ef}/2$, já que a polarização P é igual a $N\alpha E_{ef}$. Portanto, exatamente como o segundo termo do lado direito da Eq.5.

Para provar que a energia armazenada no dipolo induzido p, de polarizibilidade α, sob o campo F é $w = \alpha F^2/2$ [1], suponhamos que a energia, considerada reversível, seja representada como armazenada numa mola de constante k. Temos as relações

$$f = kx = qF \ \text{ e } \ p = qx = \alpha F \tag{6}$$

sendo x a elongação da carga móvel q do dipolo. Vê-se que a energia
$w = kx^2/2$ pode efetivamente ser escrita como $\alpha F^2/2$. De forma que há concordância entre os tratamentos macro e microscópico.

Referências

[1] C.J.F. Bottcher, *Theory of Electrical Polarization*, Elsevier, 1952, Cap. V.

[1]Enviar correspondência para G. F. Leal Ferreira. E-mail:guilherm@if.sc.usp.br .