

# Escoamento lateral em cano de PVC: uma comparação entre modelos

Lateral flow in PVC pipe: a model comparison

T.C. Luchese<sup>\*1</sup>, M.C. Pinheiro<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal da Fronteira Sul, 97900-000, Cerro Largo, RS, Brasil.

Recebido em 20 de fevereiro de 2023. Aceito em 05 de junho de 2023.

Um cano de PVC de 100 mm de diâmetro e 70 cm de comprimento constituiu um reservatório de água cuja dinâmica de vazão lateral, através de seis orifícios de diferentes diâmetros, foi filmada e analisada quadro-a-quadro. Uma comparação entre os escoamentos observados e aqueles previstos para quatro diferentes descrições teóricas foi feita. Além da descrição ideal, três modelos que visavam considerar os efeitos viscosos foram comparados com o escoamento real: (i) com viscosidade constante ao longo do tempo; (ii) com um termo constante e um termo adicional de viscosidade proporcional à velocidade de escoamento; (iii) com um termo constante e um termo adicional de viscosidade proporcional ao quadrado da velocidade de escoamento. O modelo que melhor se ajustou às curvas experimentais foi o (iii). Por tratar-se de uma experiência simples e barata, essa comparação entre modelos pode enriquecer discussões em ambiente de ensino por trazer à atenção temas como a validade e utilidade de um modelo ideal, ferramentas numéricas e analíticas de resolução de equações diferenciais, ajuste de curvas teóricas a dados experimentais, entre outros. Espera-se que esse trabalho possa servir de auxílio para o desenvolvimento qualitativo e quantitativo da temática de escoamento lateral de fluidos.

**Palavras-chave:** Efeitos de viscosidade; modelagem teórica; comparação teoria-prática; software Tracker.

A PVC pipe of 100 mm in diameter and 70 cm in length constituted a water reservoir whose lateral flow dynamics, through six holes of different diameters, were filmed and analyzed frame by frame. A comparison between observed and predicted flows for four different theoretical descriptions was made. In addition to the ideal description, three models that aimed to consider the viscous effects were compared with the real flow: (i) with constant viscosity over time; (ii) with a constant term and an additional viscosity term proportional to the flow velocity; (iii) with a constant term and an additional viscosity term proportional to the square of the flow velocity. The model that best fitted the experimental curves was (iii). Because it is a simple and inexpensive experience, this comparison between models can enrich discussions in a teaching environment by bringing to attention topics such as the validity and usefulness of an ideal model, numerical and analytical tools for solving differential equations, curve fitting theoretical to experimental data, among others. It is hoped that this work can serve as an aid to the qualitative and quantitative development of the theme of lateral flow of fluids.

**Keywords:** Viscosity effects; theoretical modeling; theory-practice comparison; Tracker software.

## 1. Introdução

O ensino dos conceitos básicos de Física exige, para que seja didaticamente possível, uma série de simplificações da realidade que resultam nos chamados *modelos ideais*. Com frequência os estudantes concluem que a física básica, por tratar majoritariamente de situações ideais, não serve para tratar de fenômenos reais do seu cotidiano. No entanto, eles não se apercebem que é essa construção de uma idealidade que permite organizar e estruturar a linguagem necessária para o estudo e aplicações mais específicas que podem ser efetuadas às várias situações-problema possíveis do dia-a-dia. Essa linguagem inicial, ideal, é que servirá de substrato à construção de modelos específicos que, apesar de serem aplicáveis apenas a situações mais restritas, terão melhor concordância com

a realidade que aquela situação ideal que lhe deu origem. Sendo assim, no dia-a-dia são, efetivamente, esses modelos restritos os utilizados no estudo e desenvolvimento de aparatos científicos ou tecnológicos. Esse trabalho pretende tangenciar essa questão através do estudo da vazão lateral da água de um reservatório através de orifício.

Nessas bases, o problema de estudo desse trabalho é a análise em vídeo do escoamento lateral de água através de orifício em cano de PVC. A descrição ideal desse problema é embasada em dois princípios: conservação de energia mecânica, aplicada quantitativamente por meio da Equação de Bernoulli, e conservação de matéria, quantitativamente aplicada pela equação da continuidade [1]. Esses dois princípios, em conjunto, são capazes de fornecer uma descrição do escoamento em função do tempo e essa descrição, por sua vez, fornece um tempo mínimo para que o reservatório seja completamente

\*Endereço de correspondência: [thiago.luchese@uffs.edu.br](mailto:thiago.luchese@uffs.edu.br)

escoado. Mais tarde, esse tempo mínimo é usado como uma unidade de medida apropriada ao problema para comparação entre os vários modelos. Ou seja: será notado que o modelo ideal não descreve a realidade (afinal, a energia mecânica é dissipada), no entanto, ele servirá de base de comparação e interpretação de significado de parâmetros dos vários modelos.

O aparato utilizado para coleta de dados consistiu em um tubo de PVC de 70 cm de comprimento e 100 mm de diâmetro nominal que teve uma de suas extremidades vedada com um tampão. Em seguida, foram feitas linhas de referência de 10 em 10 cm na lateral externa desse tubo. Uma vez que a intenção do estudo era a de observar em vídeo a dinâmica de escoamento e o tubo comercial utilizado não é transparente, recorreu-se ao artifício de conectar a parte interna do tubo à sua parte externa por meio de uma mangueira fina e transparente, mangueira essa que passava por um orifício (posteriormente vedado) feito nas proximidades da extremidade vedada do tubo. Por fim, orifícios de diferentes diâmetros foram feitos na sexta linha de referência lateral, à distância de aproximadamente 50 cm da extremidade aberta do tubo e, mais uma vez para facilitar a visualização da dinâmica de escoamento em vídeo, a água utilizada para filmagens foi tingida de azul. O resultado do aparato em funcionamento, em um instantâneo de escoamento, é mostrado na Figura 1.

O trabalho será apresentado como segue: na Seção 2 o escoamento ideal é revisado e na Seção 3 desenvolvem-se os três modelos que pretendem considerar os efeitos de viscosidade sobre a dinâmica do escoamento. A Seção 4 apresenta a metodologia de coleta de dados do escoamento observado, enquanto que esses dados são comparados com os modelos na Seção 5. Por fim, algumas considerações acerca dos resultados são apresentadas na seção final, Seção 6.

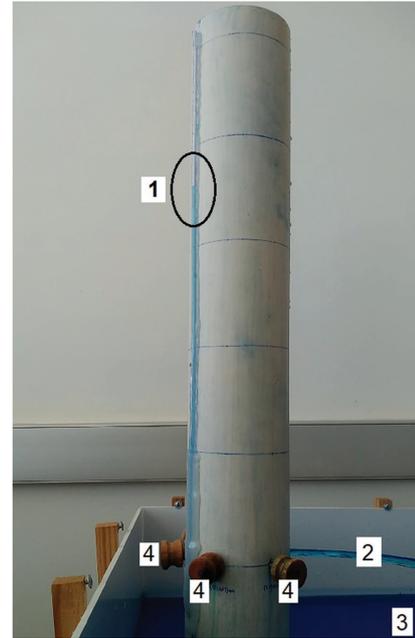
## 2. Escoamento ideal

Uma vez que o escoamento a ser analisado se dá apenas na dimensão vertical, um eixo  $y$  orientado para cima e com origem coincidente com a posição do orifício de escoamento será tomado como referência.

A equação de Bernoulli é aplicada em dois pontos do fluido: (1) na interface água-ar que está dentro do tubo, no topo da reserva que está sendo escoada; (2) na interface água-ar do orifício de escoamento. Escolhidos esses dois pontos, escreve-se:

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \\ \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h &= \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ v_1^2 + 2gh &= v_2^2 \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $\rho$  é a densidade da água,  $g$  é a aceleração da gravidade local e, ainda, da linha 1 para a linha 2



**Figura 1:** Aparato experimental utilizado nesse estudo em um instantâneo da dinâmica de escoamento. O número 1 destaca a altura da água no interior da cano, conforme observado pela mangueira lateral afixada externamente ao tubo. O número 2 identifica o jato d'água escoando. O 3 está sobre a água já escoada e recolhida em reservatório apropriado e, por fim, os números 4 indicam três outros orifícios tampados que também foram, oportunamente, abertos para fornecer as dinâmicas de escoamento correspondentes. Seja observado que existem, ao longo do cano, linhas horizontais azuis igualmente espaçadas de 10 cm entre si, linhas essas que serviram de escala de referência para análise de vídeo.

considerou-se  $p_1 = p_2 = p_0$ , sendo  $p_0$  a pressão atmosférica local,  $y_1 = h$ , sendo  $h$  a altura da coluna d'água no interior do reservatório, e  $y_2 = 0$ , que é a posição de referência do próprio orifício de escoamento.

A relação entre  $v_1$  e  $v_2$  pode ser obtida por meio da equação da continuidade aplicada aos mesmos dois pontos de referência:

$$\begin{aligned} A_1 v_1 &= A_2 v_2 \\ D^2 v_1 &= d^2 v_2 \end{aligned} \quad (2)$$

em que ambas as superfícies foram consideradas circulares de diâmetros  $D$  para a superfície no ponto (1) – diâmetro do cano de PVC – e  $d$  para a superfície no ponto (2) – diâmetro do orifício.

Usando a equação (2) para escrever  $v_1$  como função de  $v_2$  e substituindo o resultado na equação (1) chega-se em

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \delta^4}} \quad (3)$$

que é a velocidade de escoamento da água através do orifício em função da altura de coluna d'água e da razão

entre os diâmetros

$$\delta \equiv \frac{d}{D}. \tag{4}$$

É a relação (3) que possibilita equacionar a dinâmica do escoamento, ou seja, obter a altura  $h$  como uma função do tempo.

Seja um intervalo de tempo  $dt$  em que o volume de água no interior do tubo foi reduzido de uma altura  $dh$ ; uma vez que o volume escoado, conforme observado no reservatório, é dado por  $dV = -A_1 dh$  (o sinal negativo sendo necessário para tornar  $dV$  positivo, lembrando que  $dh$  é negativo durante o escoamento) e que, por conservação de matéria, esse mesmo volume é aquele que atravessa o orifício de escoamento, a saber  $dV = A_2 v_2 dt$ , é possível escrever

$$\begin{aligned} -A_1 dh &= A_2 v_2 dt \\ -D^2 dh &= d^2 \sqrt{\frac{2gh}{1-\delta^4}} dt \end{aligned} \tag{5}$$

onde foi utilizada a equação (3) e as áreas  $A_1$  e  $A_2$  foram assumidas circulares. Separando variáveis e integrando, obtém-se  $h(t)$

$$\begin{aligned} -\int_{h_0}^h \frac{dh'}{\sqrt{h'}} &= \delta^2 \sqrt{\frac{2g}{1-\delta^4}} \int_0^t dt' \\ \sqrt{h} &= \sqrt{h_0} - \delta^2 \sqrt{\frac{g}{2(1-\delta^4)}} t \\ h(t) &= h_0 - \frac{\delta^2}{\sqrt{1-\delta^4}} \sqrt{2gh_0} t \\ &\quad + \frac{\delta^4}{1-\delta^4} \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \tag{6}$$

em que se pode notar que foi tomado  $h_0$  como a altura da coluna d'água no início do processo de escoamento (em  $t = 0$ ).

Cabe observar que a função  $h(t)$  é um polinômio de grau 2, decrescente em  $t = 0$ . Como esse comportamento indicaria um reabastecimento do reservatório a partir de uma altura  $h$  mínima, o que é fisicamente inconsistente, o domínio de  $h(t)$  deve se limitar ao intervalo  $[0, t_0]$ , em que  $t_0$  é o tempo correspondente ao vértice da parábola descrita por essa função. Esse termo é dado por

$$t_0 = \frac{\sqrt{1-\delta^4}}{\delta^2} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}, \tag{7}$$

tempo esse que irá constituir uma unidade apropriada para comparar as vazões dos diferentes orifícios conforme descritas pelos vários modelos estudados.

### 3. Desenvolvendo modelos

Serão adotados três modelos para inserção de processos dissipativos à descrição ideal. No Modelo 1 a dissipação

será considerada por meio da introdução de um coeficiente constante à equação de Bernoulli no ponto de referência 2 (saída de água pelo orifício). Já nos Modelos 2 e 3, além do fator constante presente do Modelo 1, considera-se a presença de resistência proporcional à velocidade, no Modelo 2, e proporcional ao quadrado da velocidade, no Modelo 3. Sendo assim, o Modelo 1 contém 1 parâmetro de ajuste às curvas experimentais enquanto que os Modelos 2 e 3 contém 2 parâmetros.

#### 3.1. Modelo 1

Esse modelo considera uma resistência  $a_1$  constante ao escoamento à medida que a dinâmica acontece. Aplicando a equação de Bernoulli com o coeficiente de resistência  $a_1$  aos pontos de referência 1 e 2 indicados na Seção 2 têm-se

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 &= p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 + a_1 \\ v_1^2 + 2gh &= v_2^2 + \frac{2a_1}{\rho} \end{aligned} \tag{8}$$

em que o coeficiente  $a_1$  (assumido como positivo) é interpretado como uma pressão adicional no ponto 2 para compensar a resistência oferecida ao escoamento e, ainda, as considerações e passos dados para chegar à equação (8) foram os mesmos indicados para chegar à equação (1).

Utilizando a equação (2) para escrever  $v_1$  como função  $v_2$  (a equação da continuidade não é alterada quando da presença de efeitos viscosos!) e substituindo na equação (8) obtém-se

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh - \frac{2a_1}{\rho}}{1-\delta^4}}. \tag{9}$$

De posse da dependência de  $v_2$  com a altura  $h$ , procedendo de modo análogo ao que foi feito para obter a equação (6), chega-se em

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 - \frac{\delta^2}{\sqrt{1-\delta^4}} \sqrt{\left(1 - \frac{a_1}{\rho g h_0}\right) 2gh_0} t \\ &\quad + \frac{\delta^4}{1-\delta^4} \frac{g}{2} t^2. \end{aligned} \tag{10}$$

É fácil notar que  $a_1 = 0$  recupera a equação de escoamento ideal, equação (6).

#### 3.2. Modelo 2

Esse modelo considera, além de uma resistência constante à saída d'água, uma resistência ao escoamento proporcional à velocidade de saída da água através do orifício de escoamento.

Aplicando a equação de Bernoulli aos pontos de referência 1 e 2 indicados na Seção 2, introduzindo agora

os coeficientes de ajuste  $a_2$  e  $b_2$ , têm-se

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 + a_2 + b_2 v_2 \\ v_1^2 + 2gh &= v_2^2 + \frac{2a_2}{\rho} + \frac{2b_2}{\rho} v_2 \end{aligned} \quad (11)$$

em que os coeficientes  $a_2$  e  $b_2$  (assumidos como positivos) correspondem a uma correção constante à pressão e a uma correção proporcional à velocidade de vazão pelo orifício, respectivamente e, ainda, aplicam-se as mesmas considerações e passos que levaram à obtenção da equação (1) para o caso ideal.

Utilizando a equação (2) para escrever  $v_1$  como função de  $v_2$  e substituindo na equação (11) obtém-se uma equação quadrática para  $v_2$  cujas raízes são

$$v_2 = \frac{-\frac{2b_2}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{2b_2}{\rho}\right)^2 + 4(1-\delta^4)\left(2gh - \frac{2a_2}{\rho}\right)}}{2(1-\delta^4)}. \quad (12)$$

Considerando apenas a raiz que fornece uma velocidade positiva de vazão (assume-se  $\delta < 1$  e  $\frac{2a_2}{\rho} < 2gh$ ), a velocidade de saída como função da altura  $h$  será dada por

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\delta^4}} \left[ \sqrt{1 - \frac{a_2}{\rho gh} + \frac{b_2^2}{2(1-\delta^4)\rho^2 gh}} - \frac{b_2}{\rho\sqrt{2(1-\delta^4)gh}} \right]. \quad (13)$$

Ao considerar elementos de volume que escoam em um determinado tempo  $dt$ , analogamente ao feito para obter a equação (5), chega-se à seguinte equação diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\delta^2}{\sqrt{1-\delta^4}} \sqrt{2gh} \left[ \sqrt{1 - \frac{a_2}{\rho gh} + \frac{b_2^2}{2(1-\delta^4)\rho^2 gh}} - \frac{b_2}{\rho\sqrt{2(1-\delta^4)gh}} \right]. \quad (14)$$

que não possui solução analítica. Utilizaremos o método de Runge-Kutta de quarta ordem [2] para obter as soluções numéricas, ao passo que os coeficientes de ajuste  $a_2$  e  $b_2$  serão determinados por mínimos quadrados em uma varredura nesse espaço de parâmetros.

Apesar da equação diferencial (14) não ter solução analítica, é importante notar que, quando  $a_2$  e  $b_2$  são nulos, o caso ideal é restabelecido.

### 3.3. Modelo 3

Um último modelo, que também possui solução analítica, é o que considera, além de uma resistência constante tal qual o Modelo 1, uma resistência proporcional ao quadrado da velocidade de escoamento.

Aplicando a equação de Bernoulli aos pontos de referência 1 e 2 indicados na Seção 2, introduzindo agora

os coeficientes de ajuste  $a_3$  e  $b_3$ , têm-se

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 + a_3 + b_3 v_2^2 \\ v_1^2 + 2gh &= \left(1 + \frac{2b_3}{\rho}\right) v_2^2 + \frac{2a_3}{\rho} \end{aligned} \quad (15)$$

em que os coeficientes  $a_3$  e  $b_3$  (assumidos como positivos) correspondem a uma correção constante à pressão e a uma correção proporcional ao quadrado da velocidade de vazão de escoamento, respectivamente e, ainda, aplicam-se as mesmas considerações e passos que levaram à obtenção da equação (1) para o caso ideal.

Utilizando a equação (2) para escrever  $v_1$  como função de  $v_2$  e substituindo na equação (15) obtém-se

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh - \frac{2a_3}{\rho}}{1 - \delta^4 + \frac{2b_3}{\rho}}}. \quad (16)$$

Procedendo de modo análogo ao desenvolvido para obter a Equação (6) no caso ideal, o Modelo 3 prediz a seguinte dinâmica para o sistema:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 - \frac{\delta^2}{\sqrt{1-\delta^4}} \sqrt{2gh_0} \frac{1 - \frac{a_3}{\rho gh_0}}{1 + \frac{2b_3}{(1-\delta^4)\rho}} t \\ &\quad + \frac{\delta^4}{1-\delta^4} \frac{1}{1 + \frac{2b_3}{(1-\delta^4)\rho}} \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Assim como ocorrido nos modelos 1 e 2, seja notado que quando os coeficientes de ajuste  $a_3$  e  $b_3$  se anulam recupera-se a descrição do escoamento ideal.

## 4. Aquisição de dados

O aparato experimental utilizado para o estudo é apresentado na Figura 1. As linhas horizontais azuis que podem ser vistas no cano de PVC estão igualmente espaçadas em 10 cm uma da outra, de modo que, ao observar a altura de coluna d'água no tubo fino exterior ao PVC (destacado com uma elipse e indicado com número 1 na Figura 1) pode-se acompanhar o escoamento da água do interior do tubo reservatório. Um corante azul foi adicionado à água para facilitar esse acompanhamento.

Foram feitos seis orifícios com diâmetros distintos para observar a dinâmica de escoamento:  $d_1 = 3.09(7)$  mm,  $d_2 = 6.12(6)$  mm,  $d_3 = 9.00(2)$  mm,  $d_4 = 13.18(7)$  mm,  $d_5 = 17.33(9)$  mm e  $d_6 = 22.2(3)$  mm. Cada orifício possui uma dinâmica de escoamento distinta, com tempos característicos, sendo o escoamento mais rápido no orifício de diâmetro maior. Para cada orifício foram feitos cinco vídeos do escoamento e, para cada vídeo, uma análise quadro a quadro no software livre *Tracker* [3] permitiu o levantamento dos dados experimentais de altura da água como função do tempo. A trajetória  $h(t)$  apresentada para cada orifício corresponde à trajetória

média dos cinco vídeos e o desvio padrão associado a cada média foi assumido como o erro do processo de medida. Uma vez que o tamanho da barra de erro mostrou-se menor, em todos os casos, que o símbolo utilizado para representar os pontos experimentais, a representação gráfica de tais barras foi suprimida.

Nas análises quadro-a-quadro dos vídeos, o tempo 0 foi assumido como o primeiro quadro em que aparecia o tampão do orifício já extraído do reservatório e, como tempo final da análise, foi assumido o quadro em que a altura da coluna d'água atingia a marca de 10 cm de distância até o orifício. Teve-se o cuidado de evitar alturas pequenas de escoamento com a finalidade de adequar os dados coletados aos recortes propostos pelos modelos desenvolvidos, recortes esses que não seriam capazes de descrever o escoamento quando a altura da coluna d'água no reservatório tende a zero.

Por fim, cabe observar que nem todos os pontos experimentais foram mostrados nos gráficos para que esses não ficassem demasiado densos.

### 5. Comparação entre descrições

Com a finalidade de fazer a comparação entre os dados experimentais e os resultados ideal e dos modelos mostra-se conveniente tratar de variáveis adimensionais, o que facilita, também, as resoluções numéricas. Adotar-se-á como tempo característico ao problema aquele dado pela equação (7) e como comprimento característico a altura inicial de escoamento  $h_0$ .

Sendo assim, redefine-se o tempo e a altura de escoamento como

$$t = t_0 t' \quad h = h_0 h' \tag{18}$$

sendo as variáveis com linha as novas variáveis adimensionais que serão utilizadas daqui para frente.

As equações relevantes para comparação são: (i) escoamento ideal, equação (6), (ii) escoamento dado pelo Modelo 1, equação (10), (iii) escoamento dado pelo Modelo 2, equação (14) e (iv) escoamento dado pelo Modelo 3, equação (17). Cada uma dessas equações reescritas em termos das novas variáveis adimensionais (onde se abandonou o uso da linha por comodidade) é apresentada a seguir:

- Modelo ideal:

$$h(t) = 1 - 2t + t^2. \tag{19}$$

- Modelo 1:

$$h(t) = 1 - 2\sqrt{1 - \alpha_1} t + t^2 \tag{20}$$

onde foi definido o parâmetro adimensional de ajuste

$$\alpha_1 \equiv \frac{a_1}{\rho g h_0}. \tag{21}$$

- Modelo 2:

$$\frac{dh}{dt} = -2\sqrt{h - \alpha_2 + \frac{\beta_2^2}{1 - \delta^4}} + \frac{2\beta_2}{\sqrt{1 - \delta^4}} \tag{22}$$

onde foram definidos os parâmetros adimensionais

$$\alpha_2 \equiv \frac{a_2}{\rho g h_0} \quad \text{e} \quad \beta_2 \equiv \frac{b_2}{\rho \sqrt{2g h_0}}. \tag{23}$$

- Modelo 3:

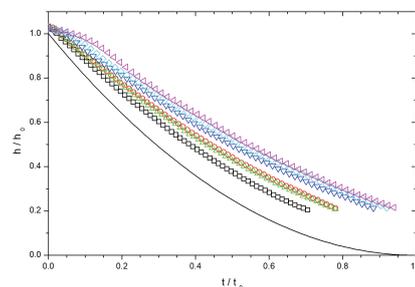
$$h(t) = 1 - 2\sqrt{\frac{1 - \alpha_3}{1 + \frac{\beta_3}{1 - \delta^4}}} t + \frac{1}{1 + \frac{\beta_3}{1 - \delta^4}} t^2 \tag{24}$$

onde foram definidos os parâmetros adimensionais

$$\alpha_3 \equiv \frac{a_3}{\rho g h_0} \quad \text{e} \quad \beta_3 \equiv \frac{2b_3}{\rho}. \tag{25}$$

A Tabela 1 sumariza as dimensões relevantes ao processo de adimensionalização e indica a escala de tempo correspondente à dinâmica de cada orifício. Já a Figura 2 apresenta todas as dinâmicas renormalizadas juntamente com uma linha sólida correspondente ao caso ideal, essa última apenas para guiar os olhos.

É possível perceber, na Figura 2, que as trajetórias iniciam em uma altura diferente da unidade adotada como padrão. Nota-se que há um desvio sistemático para valores superiores à unidade em aproximados (e menores que) 5%. Esse desvio sistemático acontece porque, de fato, o reservatório era preenchido até um pouco acima dos 50 cm (aproximadamente 2 cm acima) para permitir que parte da água escoasse apenas para o estabelecimento do fluxo estacionário através do orifício. Esse tempo de estabelecimento de fluxo estacionário pode ser percebido especialmente na trajetória de escoamento referente aos orifícios 5 (losangos cianos) e 6 (triângulos à

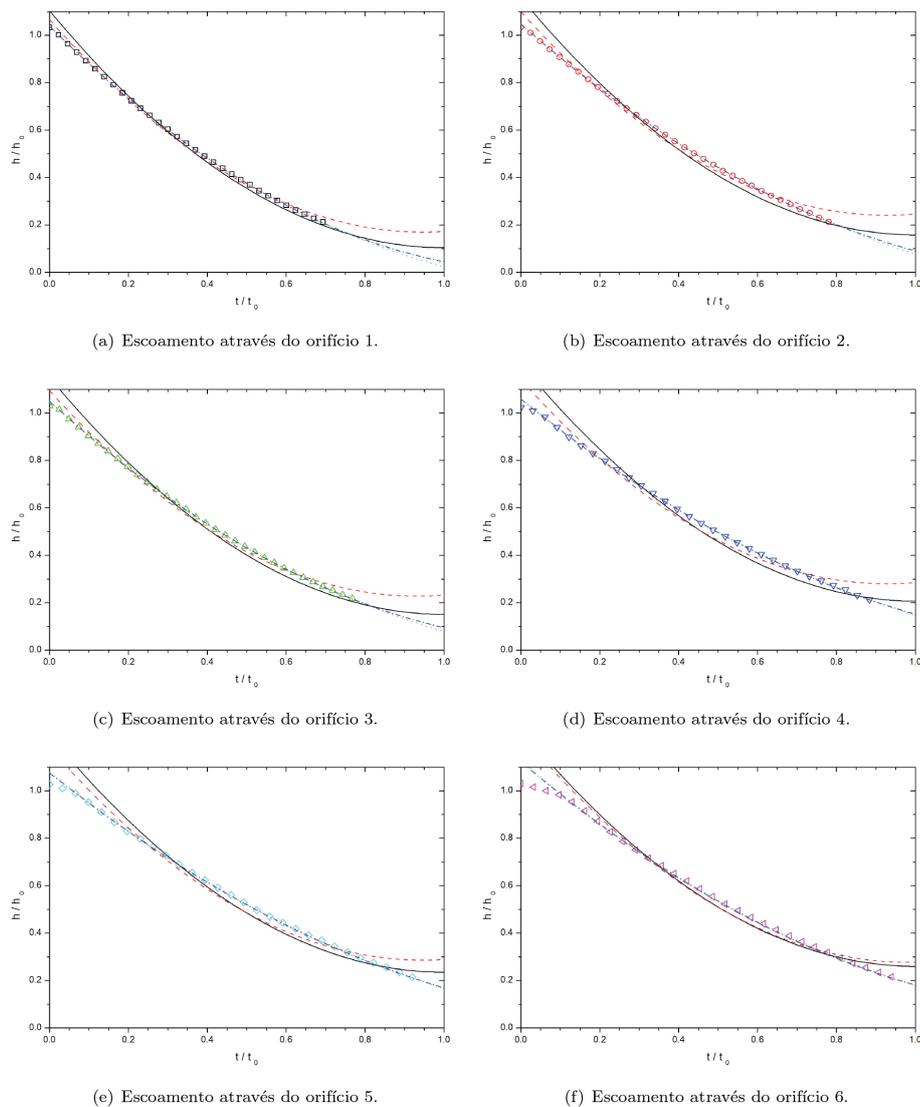


**Figura 2:** Dinâmicas médias de escoamento lateral por orifícios de diferentes diâmetros (as dimensões características de cada dinâmica estão indicadas na Tabela 1). Os quadrados (pretos) correspondem ao escoamento através do orifício 1, os círculos (vermelhos) ao escoamento pelo orifício 2, os triângulos para cima (verdes) à dinâmica através do orifício 3, os triângulos para baixo (azuis) ao escoamento pelo orifício 4, os losangos (cianos) à dinâmica pelo orifício 5 e os triângulos à esquerda (magentas) correspondem à dinâmica através do orifício 6. A linha sólida preta corresponde ao que seria o escoamento ideal.

esquerda magentas). Trata-se de uma característica da vazão através de todos os orifícios e a sua visibilidade apenas nos orifícios de maior calibre é consequência da grande diferença nos tempos característicos de cada dinâmica.

Ao observar que há um tempo de resposta para estabelecimento do fluxo estacionário, foi inserido um parâmetro adicional no ajuste das curvas experimentais aos dados coletados: a altura inicial de escoamento  $\eta$ . Esse parâmetro entra nas equações analíticas para o escoamento, equações (19), (20) e (24), por meio da substituição da altura inicial 1 pela altura de ajuste  $\eta$ . Já na expressão não-analítica referente ao Modelo 2, equação (22), esse parâmetro corresponde diretamente à condição inicial da equação diferencial.

Uma comparação entre cada trajetória individual dada na Figura 2 e cada um dos modelos desenvolvidos pode ser vista na Figura 3. A escala e os símbolos para cada trajetória experimental foram mantidos, para facilitar a comparação. Os modelos, no entanto, são representados por linhas de cores e estilos de traçado distintos. Os parâmetros resultantes para cada ajuste estão indicados na Tabela 2, exceto a altura inicial  $\eta$ , que está indicada também na Tabela 1. A determinação dos parâmetros se deu pelo método dos mínimos quadrados e foi analítica para as equações (19), (20) e (24) enquanto que para a equação (22) foi numérica (tentativa e erro em uma varredura no espaço de parâmetros). Essa determinação por mínimos quadrados desconsiderou os pontos iniciais das trajetórias, pontos esses que correspondem



**Figura 3:** Dinâmicas de escoamento médias para cada orifício comparada com os diferentes modelos. Os símbolos correspondem aos dados experimentais (com formas e cores equivalentes àqueles da Figura 2). As linhas sólidas (pretas) correspondem ao ajuste da descrição ideal, as linhas tracejadas (vermelhas) correspondem ao ajuste do Modelo 1, as linhas pontilhadas (verdes) ao Modelo 2 e, por fim, as linhas em traço e ponto (azuis) correspondem ao ajuste do Modelo 3. As escalas de tempo e comprimento, bem como os parâmetros de ajuste de cada modelo, estão indicados nas Tabelas 1 e 2.

**Tabela 1:** Diâmetros dos orifícios de escoamento, suas respectivas escalas de tempo ( $t_0$ ) e as alturas iniciais efetivas (parâmetro adimensional correspondente ao tempo de adaptação do sistema à vazão) de escoamento para cada modelo. Foi considerado o diâmetro do reservatório  $D = 98$  mm, a altura de referência  $h_0 = 50$  cm e a aceleração da gravidade  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>.

Orifício	$d$ (mm)	$\delta$	$t_0$ (s)	$\eta_0$ - Ideal	$\eta_1$ - Modelo 1	$\eta_2$ - Modelo 2	$\eta_3$ - Modelo 3
1	3.09(7)	0.0315(7)	320(10)	1.1039(9)	1.067(2)	1.041(4)	1.039(3)
2	6.12(6)	0.0624(6)	82(2)	1.1578(8)	1.100(2)	1.048(5)	1.047(5)
3	9.00(2)	0.0918(2)	37.9(2)	1.1507(5)	1.096(1)	1.052(2)	1.050(3)
4	13.18(7)	0.1345(7)	17.6(2)	1.207(1)	1.141(3)	1.062(4)	1.06(1)
5	17.33(9)	0.1768(9)	10.2(1)	1.2349(8)	1.183(2)	1.080(4)	1.076(8)
6	22.2(3)	0.228(3)	6.2(2)	1.260(1)	1.241(4)	1.130(9)	1.12(1)

**Tabela 2:** Parâmetros adimensionais e seus correspondentes já com unidades apropriadas. Para retorno de dimensões, a altura de referência é de  $h_0 = 50$  cm, a aceleração da gravidade  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> e a densidade da água  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

Orif.	$\alpha_1$	$a_1$ (kPa)	$\alpha_2$	$a_2$ (kPa)	$\beta_2$	$b_2$ $\left(\frac{\text{kPa} \cdot \text{s}}{\text{m}}\right)$	$\alpha_3$	$a_3$ (kPa)	$\beta_3$	$b_3$ $\left(\times 10 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$
1	0.103(4)	0.50(2)	-0.16(5)	-0.8(2)	0.29(4)	0.9(1)	-0.03(4)	-0.1(2)	0.51(5)	26(3)
2	0.141(3)	0.69(1)	-0.28(6)	-1.4(3)	0.53(6)	1.7(2)	-0.06(8)	-0.3(4)	1.0(1)	50(5)
3	0.132(2)	0.65(1)	-0.18(2)	-0.9(1)	0.41(2)	1.28(6)	-0.02(4)	-0.1(2)	0.77(6)	38(3)
4	0.139(4)	0.68(2)	-0.25(5)	-1.2(2)	0.61(5)	1.9(2)	0.0(1)	0.0(5)	1.3(3)	65(2)
5	0.103(3)	0.50(1)	-0.27(4)	-1.3(2)	0.66(5)	2.1(2)	-0.1(1)	-0.5(5)	1.4(2)	70(1)
6	0.036(3)	0.18(1)	-0.16(5)	-0.8(2)	0.52(6)	1.6(2)	-0.1(1)	-0.5(5)	1.1(2)	55(1)

ao estabelecimento do fluxo estacionário - efeito não considerado pelos modelos.

A Figura 3 revela a insuficiência do modelo ideal (linha sólida preta) em descrever a dinâmica observada; no entanto, revela também que a idealidade não está longe da realidade. Em especial, seja notado que a descrição ideal é tanto mais afastada do escoamento real quanto maior o diâmetro do orifício, o que concorda com a afirmação de que a queda de pressão em um escoamento viscoso guarda proporção com a vazão volumétrica (ver [4]).

O Modelo 1 (linha tracejada vermelha), que considera uma queda de pressão constante durante o escoamento, por sua vez, consegue melhorar a descrição ideal no sentido de que o ajuste aos dados experimentais é um pouco melhor que o ideal; no entanto, ainda não o descreve bem no intervalo de tempo observado. Note-se que, assim como o modelo ideal, a discrepância com os dados coletados aumenta à medida que o diâmetro do orifício é aumentado.

Os Modelos 2 e 3 (linhas pontilhada verde e traço-ponto azul, respectivamente) mostram-se suficientes para descrever a dinâmica observada, sendo indistinguíveis um do outro no início do escoamento e distanciando-se ao término do mesmo. Esse comportamento é percebido para todos os orifícios. Ainda, apesar de o Modelo 2 adequar-se aos pontos experimentais, uma olhada atenta para as dinâmicas (em especial dos orifícios de maior diâmetro) evidencia que o Modelo 3 ajusta-se um pouco melhor aos pontos experimentais.

Quanto ao significado físico de cada parâmetro de ajuste pode-se afirmar, por análise dimensional e por construção dos próprios modelos, que as constantes  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) correspondem a uma (suposta) queda de

pressão durante o escoamento, a constante  $b_2$  corresponde a uma viscosidade por unidade de comprimento e a constante  $b_3$  a uma densidade.

Observando os valores desses parâmetros na Tabela 2 nota-se que as constantes  $a_1$  são todas positivas e correspondem, de fato, a uma queda de pressão. Já as constantes  $a_2$  são todas negativas, significando que, no Modelo 2, o orifício de escoamento insere um aumento na pressão; talvez esse reforço ao escoamento inserido por esse parâmetro, nesse modelo, possa estar associado à tensão superficial da água mas, até onde os autores conseguem descrever o processo, esses valores negativos permanecem não explicados. Por outro lado, as constantes  $a_3$ , embora também sejam indicadas como negativas, têm margem de erro que não nos dão clareza sobre os seus sinais e indicam que o Modelo 3 pode ser simplificado para apenas um parâmetro:  $b_3$ . Para além do sinal dos parâmetros  $a_i$ , cabe notar que todos eles são, em módulo, muito menores que a pressão atmosférica ( $\approx 100$  kPa).

As constantes  $b_2$ , uma vez que estão associadas a uma viscosidade por unidade de comprimento, são melhor interpretadas à luz da Lei de Poiseuille. De acordo com essa lei, a resistência ao escoamento permanente e laminar através de um tubo cilíndrico de diâmetro  $d$  e comprimento  $L$  pode ser expressa, em termos de queda de pressão  $\Delta P$ , como:

$$\Delta P = \frac{32\nu L}{d^2} v \tag{26}$$

onde  $\nu$  é a viscosidade da água e  $v$  a velocidade do escoamento. O valor de referência para a viscosidade da água a 20°C é  $\nu = 1,00$  mPa·s [4] e, como na data da coleta

dos dados a temperatura era de aproximados  $32^{\circ}\text{C}$ , possivelmente seu valor estava abaixo desse valor de referência (a viscosidade da água diminui com o aumento da temperatura no intervalo de temperaturas associado a esse experimento). Em outras palavras, as constantes  $b_2$  podem ser utilizadas para determinar diretamente a viscosidade da água pois elas correspondem exatamente à fração que está multiplicando a velocidade (comparar com a equação de Bernoulli aplicada ao Modelo 2, equação (11)), desde que  $L$  seja associado à espessura do tubo. Fazendo essa determinação da viscosidade  $\nu_i$ , correspondente ao valor do parâmetro  $b_2$  do  $i$ -ésimo orifício, tomando como espessura do tubo  $L = 2$  mm e o diâmetro de cada orifício, tem-se (em unidades de Pa·s):  $\nu_1 = 0.13$ ,  $\nu_2 = 0.99$ ,  $\nu_3 = 1.6$ ,  $\nu_4 = 5.2$ ,  $\nu_5 = 9.9$  e  $\nu_6 = 12$ . Nota-se que são valores muito maiores que o valor de referência e indicam a não aplicação da Lei de Poiseuille nesse contexto. Apesar de não ser aplicável, a Lei de Poiseuille estabelece significado físico ao parâmetro  $b_2$ .

As constantes  $b_3$ , que correspondem a uma densidade, podem ser entendidas como um acréscimo à inércia da água ao escoamento. De fato, pode-se tirar essa conclusão diretamente da equação de Bernoulli aplicada ao Modelo 3, equação (15), ao escrevê-la com o quadrado da velocidade em evidência ao lado direito da igualdade:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}(\rho + 2b_3)v_2^2 + \rho g y_2 + a_3. \quad (27)$$

Seja notado que essa correção à densidade corresponde ao dobro do valor do parâmetro  $b_3$  e, de acordo com os valores de  $b_3$  apresentados na Tabela 2, é possível perceber que essa correção, apesar de variar bastante, tem a mesma ordem de grandeza que a própria densidade da água.

Por fim, as alturas iniciais observadas na Tabela 1, introduzidas como um parâmetro de ajuste e não um parâmetro dos modelos, apresentam um aumento sistemático com o diâmetro do orifício. Esse aumento é revelador do tempo de resposta ao estabelecimento do fluxo estacionário: diâmetros maiores possuem vazões maiores que, por sua vez, levam mais tempo para serem estabelecidos.

## 6. Considerações finais

Nesse estudo foram desenvolvidos três modelos distintos ao processo de escoamento lateral da água através de orifícios de diferentes diâmetros. Embora tenha ficado evidente que a descrição ideal não é capaz de descrever quantitativamente o fenômeno, foi possível mostrar que esse modelo forneceu a linguagem necessária ao desenvolvimento do estudo, as unidades apropriadas e, ainda, a forma funcional mais adequada para a altura como função do tempo: um polinômio de ordem 2. Essa última afirmação está embasada na constatação de que o Modelo 3 é o que possui melhor ajuste aos pontos experimentais para os seis diâmetros de vazão analisados.

O Modelo 2, apesar de também descrever satisfatoriamente os dados experimentais, possui o inconveniente didático de necessitar de integração numérica.

O melhor ajuste do Modelo 3 aos dados experimentais revela que um escoamento que pode ser descrito com um polinômio quadrático tem resistência viscosa proporcional ao quadrado da velocidade de escoamento e que esse escoamento ocorre com uma densidade duplicada, pelo menos para a água. Se o parâmetro  $a_3$  for desconsiderado (o que é sugerido pelos valores desse parâmetro indicados na Tabela 2) então esse modelo se torna ainda mais simples e de fácil interpretação.

Apesar de ter sido analisada a dinâmica de escoamento através da coleta de dados da altura da coluna d'água no reservatório como função do tempo,  $h(t)$ , o método de coleta de dados aqui apresentado poderia ser aplicado para levantar dados com respeito à velocidade de saída da água através do orifício como função do tempo,  $v_2(t)$ . Esse dado é extraído diretamente de um vídeo de vazão por meio da distância horizontal percorrida pelo jato d'água antes de tocar o reservatório. Até mesmo a equação da continuidade poderia ser diretamente verificada se os vídeos fossem levantados de tal forma a permitir extração de ambos os dados  $h(t)$  e  $v_2(t)$ . Um trabalho que destaca a importância da viscosidade na descrição do escoamento lateral de fluidos analisando esse alcance lateral, porém sem vídeos, é a referência [5].

Espera-se que esse estudo venha a estimular a comparação teoria-experiência no ensino de Física [6] (assim como já há relato de seu uso como motivador no ensino de Matemática [7, 8]) bem como ao desenvolvimento de modelos que melhor descrevem um dado fenômeno. Por ter esse cunho didático é que os autores não recorreram ao uso de literatura especializada em hidráulica para interpretar e modelar a experiência aqui relatada.

## Referências

- [1] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física: gravitação, ondas e termodinâmica* (LTC, Rio de Janeiro, 2018), 10 ed.
- [2] P.L. De Vries, *A first course in computational physics* (John Wiley and Sons, New York, 1994).
- [3] <https://physlets.org/tracker/>, acessado em 16/07/2022.
- [4] P.A. Tipler, *Física: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica* (LTC, Rio de Janeiro, 2000), 4 ed.
- [5] E.C.B. Moraes, H.C. Baptista, A.B. Souza e L.R. Santos, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20190187 (2020).
- [6] R.F. Silva, E. Santos e D.F.S. Cruz, *Tecnia* **2**, 85 (2017).
- [7] J.C.A. Macedo, *Determinação experimental da função que modela o escoamento de um líquido*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos (2010).
- [8] L.F.A. Silva, *Equações diferenciais aplicadas a escoamento de fluidos*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró (2019).