Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 46, e20240159 (2024)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0159

Artigos Gerais

Das equações de Maxwell à Teoria de Yang-Mills (Uma celebração aos 70 anos do artigo de Yang & Mills)

From Maxwell's equations to Yang-Mills Theory (In celebration to the 70th anniversary of the paper by Yang & Mills)

G.L.L.W. Levy*[1], J.A. Helayël-Neto[1]

[1]Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 07 de maio de 2024. Revisado em 01 de agosto de 2024. Aceito em 03 de agosto de 2024.

Celebrando os 70 anos da publicação do artigo de C. N. Yang e R. Mills, este artigo apresenta a construção das chamadas equações de Yang-Mills a partir de requisitos fundamentais, averiguando como se pode formular uma teoria que descreva a auto-interação de bósons vetoriais eletromagneticamente neutros com massa nula. Como estes são atributos do fóton, o ponto de partida são as equações de Maxwell e sua chamada invariância de calibre local, com grupo de simetria $U(1)$. Assim, partindo de um conjunto de campos vetoriais que têm associada uma simetria não-Abeliana global, utilizaremos o chamado método das correntes de Noether para introduzir as auto-interações. O aspecto interessante é que este processo se conclui com a simetria de partida, inicialmente global, tornando-se automaticamente uma simetria de calibre em consequência da estrutura das auto-interações. A abordagem já deixa o caminho construído para a introdução do setor de matéria acoplado minimamente aos campos de Yang-Mills. É importante destacar que este procedimento vai no caminho oposto ao que é apresentado no paper original de Yang-Mills. O procedimento via correntes de Noether é mais natural, visto que responde à questão como partículas elementares de spin-1 podem auto-interagir, sem precisar introduzir o setor de matéria.
Palavras-chave: Bósons de spin-1 auto-interagentes, Teoria de calibre não-Abeliana, Método da corrente de Noether.

Celebrating the 70th anniversary of the publication of the paper by C. N. Yang and R. Mills, this paper proposes to present the construction of the so-called Yang-Mills equations based on fundamental requirements, investigating how one can formulate a theory that describes the self-interaction of electromagnetically neutral vector bosons with zero mass. As these are attributes of the photon, the starting point is Maxwell's equations and their so-called local gauge invariance, with symmetry group $U(1)$. Thus, starting from a set of vector fields that have an associated global non-Abelian symmetry, we will use the so-called Noether current method to introduce self-interactions. The interesting aspect is that this process concludes with the starting symmetry, initially global, automatically becoming a gauge symmetry as a result of the structure of the self-interactions. The approach already leaves the path built for the introduction of the matter sector minimally coupled to the Yang-Mills fields. It is important to highlight that this procedure goes in the opposite direction to what is presented in the original paper by Yang-Mills. The procedure via Noether currents is more natural, as it answers the question how elementary spin-1 particles can self-interact, without needing to appeal to matter fields.
Keywords: Self-interacting spin-1 bosons, non-Abelian gauge theory, Noether current method.

1. Introdução

A busca incessante da Física por uma descrição da Natureza da forma mais fundamental possível tem levado à formulação de teorias e modelos. Do final do Século XIX e até meados do século XX, conseguiu-se um notável entendimento sobre a matéria e a radiação, isto é, de tudo que constitui a parte observável de nosso Universo. Importantes descobertas sobre a matéria foram feitas em curtos períodos de tempo, quando analisamos de forma geral: J. J. Thomson utilizando o experimento de raios catódicos descobre o elétron em 1897. Em 1911, E. Rutherford propõe seu famoso experimento de folha de ouro e descobre que o átomo apresenta um núcleo, e este é carregado positivamente. Posteriormente, no ano de 1919, Rutherford utiliza a primeira vez o termo próton e descobre que o núcleo atômico é constituído por esses prótons, carregados positivamente. A descoberta do nêutron acontece em 1932, feita por J. Chadwick.

A partir de 1924, Louis de Broglie [1] introduz o termo ondas de matéria, propondo que, da mesma forma que a luz pode apresentar comportamento corpuscular, há cenários em que a matéria pode também exibir comportamento ondulatório. Em seguida, W. Heisenberg, P. Dirac e E. Schrödinger publicam os trabalhos que fundam a Mecânica Quântica [2, 3]. Até esse momento, o elétron era o ator principal de toda a teoria, porém a grande lacuna era a falta de uma descrição quântica que

*Endereço de correspondência: guslevy9@hotmail.com

incorporasse de forma plena, e não aproximada, efeitos relativísticos. Então, P.Dirac incorpora a Relatividade Restrita ao elétron [4], o mesmo continua com uma série de desenvolvimentos fundamentais para a Física de hoje, com a quantização do campo eletromagnético assim como o seu acoplamento ao elétron e a introdução da simetria de calibre (gauge) $U(1)$ [5]. Como resultado das suas teorias, Dirac prevê a existência de antipartículas, quando, em 1932, J. Chadwick descobre o nêutron e C. D. Anderson descobre a antipartícula do elétron, isto é, o pósitron [6].

Esses desenvolvimentos no estudo do átomo foram centrais para que I. Tamm, em 1934, e H. Yukawa, em 1935, começassem a pensar na interação entre os prótons e nêutrons no núcleo atômico [7]. Utilizando como inspiração o eletromagnetismo que estava muito bem estabelecido através das equações de Maxwell [8], os trabalhos de Dirac e Klein & Gordon vieram para reiterar que bósons vetoriais, quando mediassem interações, deveriam ser sem massa e no caso do eletromagnetismo o seu bóson vetorial sem massa, mediador de interações é o chamado fóton. Utilizando essa mesma analogia, Yukawa propôs que as interações nucleares fortes eram de curto alcance, isto é, deveriam estar restritos ao tamanho do núcleo atômico, essas interações eram mediadas por um bóson escalar massivo. A massa é inversamente proporcional a distância de interação, logo o bóson escalar mediador, chamado de méson Pi [9, 10], deveria ter uma massa correspondente a tal distância e esta por sua vez tem seu valor entre as massas do elétron e próton.

Em 1932, Heisenberg trabalhou no problema da estabilidade nuclear e a origem do spin isotópico (ou isospin); a forma que ele encontrou para contornar esse problema foi a inserção do grupo de simetria $SU(2)$ como base do isospin, promovendo prótons e nêutrons que apresentam uma massa próxima a membros de um dublete [11]. Então, E. Wigner [12] mostra em seu trabalho que esse novo número quântico total deveria ser conservado, sendo reverberado experimentalmente pelos trabalhos de T. Lauritsen [13]. Entretanto, para Yukawa isso se tornou um problema, já que seu sua formulação de bósons escalares massivos das interações fortes não contemplavam a conservação do spin isotópico total.

Os esforços estavam direcionados para o desenvolvimento de uma teoria de gauge, com spin-1, de auto-interação onde originalmente os bósons não possuem massa, porem vão se tornar massivos posteriormente na teoria com o mecanismo de quebra espontânea de simetria. Dois grupos publicaram a formulação dessa teoria para a interação nuclear forte. O primeiro e mais conhecido, publicado por C. N. Yang e R. Mills em 1954 e conhecido como teoria de Yang-Mills; a formulação independente, proposta por R. Shaw [14], em sua Tese de Doutorado, orientada por A. Salam, não chegou a ser publicado em um periódico, ficando registrada apenas em sua Tese, defendida na Universidade de Cambridge.

Assim, C. N. Yang e R. Mills construíram sua teoria $SU(2)$ local, conservando o spin isotópico total e, na época, esperando, sem demonstrar, que a mesma fosse renormalizável [15–17]. Entretanto, um grande problema de sua teoria era que os bósons vetoriais mediadores não apresentavam massa. Este problema da teoria implicava que as interações fortes teriam um alcance infinito, o que não é compatível com o alcance da interação nuclear forte ser confinada ao interior do núcleo atômico. Em 1954, ainda não tinha sido desenvolvido o mecanismo de geração de massa, chamado de mecanismo de Higgs, o que levava a este problema na teoria não ser resolvido. De forma geral, a física de interações fortes até 1954 não apresentava teorias que sustentassem os dados experimentais, levando a um conflito entre teoria e experimento.

Por outro lado, a física de interações fracas tinha sido criada com a proposta de Enrico Fermi, em 1934, sobre o decaimento-β e sua origem, podendo ser explicada através da interações de quatro férmions [18]. No ano de 1956, C. N. Yang com T. D. Lee publicam um trabalho onde as interações fracas violam a simetria de paridade para respeitarem a Relatividade Restrita [19]. Este trabalho instiga Salam a trabalhar em uma teoria de Yang-Mills para as interações fracas, dando uma grande importância a esse tipo de formulação e o levando a generalizar a paridade para o que foi chamado de simetria quiral. Note também que Salam não foi o único a se debruçar nessa formulação, tivemos também S. Glashow [20] e S. Weinberg [21]. Salam então incorpora as interações fracas à teoria de Y-M e o grupo SU(2) [22]. Em 1957 Yang e Lee ainda continuam contribuindo, publicando um artigo no assunto de decaimento-β com a possível violação da conservação da paridade em processos que envolvem neutrinos [23]. O problema da massa dos mediadores continuava assombrar a teoria de Y-M mesmo com a formulação de Salam. Esse problema só foi resolvido com a quebra espontânea de simetria, mecanismo esse que ficou conhecido como mecanismo Higgs e que rendeu o prêmio Nobel de 2013. Todos os fatos apresentados reverberam para a consolidação da teoria de Y-M como sendo a descrição mais completa para a física de interações fundamentais.

O objetivo principal deste artigo é desenvolver a teoria de Yang-Mills como sendo uma teoria de auto-interação de bósons de gauge. De forma mais precisa, iremos partir da construção do eletromagnetismo de Maxwell, utilizando o seu grupo $U(1)$, vamos estendê-lo para obter uma versão não-Abeliana das equações de Maxwell com grupo de simetria $SU(N)$. A forma que iremos fazer isso é utilizando um método para criar as auto-interações dos campos através de uma teoria livre, que é chamado de método de Noether[1]. Depois de obtidas essas equações, optamos por aplicar tais resultados em outras quantidades fundamentais para

[1] Estamos nos referenciando a Emmy Noether. Uma brilhante matemática, cuja contribuição mais significativa é hoje conhecida como teorema de Noether, responsável por conectar a conservação de grandezas físicas com simetrias da natureza [24, 25].

uma teoria eletromagnética como o vetor de Poynting e o tensor de energia e momento. Para não ficar somente no âmbito dos bósons vetoriais de spin-1, expandimos nossas aplicações para a matéria fermiônica através do método de auto-interação e foi possível perceber que o acoplamento mínimo da matéria fermiônica aos bósons mediadores (bósons de Y-M) surge de forma natural.

Este artigo está organizado da seguinte forma: A Seção 2 apresenta a base algébrica para os desenvolvimentos nas seções consecutivas. Na Seção 3, é descrito em detalhes como o método das correntes de Noether pode ser aplicado para se chegar à teoria de Yang-Mills a partir do Eletromagnetismo Maxwelliano. Além disso, utilizamos os resultados obtidos, aplicando-os em relações já conhecidos com o intuito de mostrar a equivalência do nosso método com a literatura. Finalmente, na Seção 4, apresentamos as nossas Considerações Finais.

Como usualmente adotado na literatura das Teorias Quânticas de Campos e da Física de Partículas Elementares, neste trabalho seguiremos a convenção de tomar $\hbar = c = 1$. Este é o chamado Sistema de Unidades Naturais no qual todas as grandezas físicas são expressas em unidades de energia, podendo sempre ser reobtidas em unidades do Sistema Internacional através de simples conversões que podem ser encontradas na literatura.

2. Revendo Brevemente o Eletromagnetismo Maxwelliano

Em 1873, J. C. Maxwell [8] publica suas famosas equações que descrevem a luz. Posteriormente, a partícula de luz foi descrita como sendo o fóton e este não possui massa, assim, os fenômenos elétricos e magnéticos podem ser descritos por equações da forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{4}$$

onde o campo elétrico pode ser escrito como

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{5}$$

e o campo magnético é

$$B = \nabla \times A. \tag{6}$$

O campo ϕ é chamado de potencial escalar e $\vec{A}$ de potencial vetor. O conjunto de equações de Maxwell apresentam liberdade de gauge. Isso significa que quando escrevemos o campo elétrico e magnético da forma (5) e (6) a simetria de gauge presente nas equações de Maxwell em relação aos potenciais deve ser preservada e portanto, os potenciais devem ser invariantes da forma

$$\{\phi, \vec{A}\} \to \{\phi', \vec{A}'\}, \tag{7}$$

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \alpha(t,\vec{x})}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A}' - \nabla \cdot \alpha(t,\vec{x}). \tag{8}$$

O próximo passo é utilizar o método de Noether, método este que já é bem estabelecido na supersimetria e supergravidade pela suas incontáveis aplicações [26–29], para construir uma teoria de Maxwell não-Abeliana. Note que neste artigo não vamos utilizar a notação covariante para o desenvolvimento desse processo. Optamos por utilizar essa escolha por questões didáticas e para leitores que apresentem dificuldade na notação desta forma, assim, optamos por apresentar todo este trabalho com os campos estando na formulação Euclidiana.

3. Construção da Teoria de Auto-interação Para Campos de Spin-1

A busca pela obtenção de uma formulação não-Abeliana das partículas de spin-1 e massa 0 com auto-interação começa pela introdução de um multípleto de campos que apresentem esse spin e que seja de massa nula da seguinte forma

$$A^i, i = 1, 2, \ldots, N \qquad \phi^i, i = 1, 2, \ldots, N \tag{9}$$

assim, temos os campos reunidos em um N-plete. A teoria de Yang-Mills é construída com base nos grupos de Lie, por isso vamos supor uma simetria tipo de Lie para os potenciais que estejam em uma representação arbitrária, de dimensão N, transformando-se como segue

$$\phi_i' = R_{ij}\phi_j, \tag{10}$$

$$A_i' = R_{ij}A_j, \tag{11}$$

sendo R_{ij} uma função do grupo de Lie, que devido a essa estrutura [30] pode ser escrita como

$$R_{ij} = (e^{iw_a G_a})_{ij} \sim \delta_{ij} + iw_a(G_a)_{ij} + O(w^2), \tag{12}$$

permitindo que os campos se transformem como

$$\delta A_i = iw_a(G_a)_{ij}A_j, \tag{13}$$

$$\delta\phi_i = iw_a(G_a)_{ij}\phi_j. \tag{14}$$

Onde $(G_a)_{ij}$ são os geradores da representação e são a essência da estrutura de um grupo de Lie, sua equação satisfaz a seguinte relação de comutação

$$[G_a, G_b] = if_{abc}G_c. \tag{15}$$

Estamos considerando as estruturas de um grupo mais geral possível, por isso, trabalhamos na representação do grupo especial unitário $SU(N)$ representado pelas matrizes complexas, $n \times n$, unitárias e com determinante igual a 1. E ainda w_a são funções arbitrárias de x. Vamos partir do lagrangiano livre da teoria eletromagnética

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2), \tag{16}$$

queremos que haja interações entre os campos, para isso vamos utilizar o principio de miníma ação, ou ainda, o principio variacional

$$\delta S = \int d^4x \ \delta \cdot \frac{1}{2}\left[E^2 - B^2\right] = 0. \tag{17}$$

A partir disso é possível encontrar uma corrente com componente espacial e uma de componente temporal. Para isso, vamos considerar que depois que o procedimento da equação (16) ocorreu, geramos derivadas totais de componente temporal e espacial, estas vão gerar as correntes respectivamente. Além disso, fazendo o uso das equações de Maxwell usuais podemos obter

$$\vec{j}_a = -iw_a(G_a)_{ij}[(\vec{E}_i \cdot \phi_j) - (\vec{B}_i \times \vec{A}_j)], \tag{18}$$

$$j_a^0 = -iw_a(G_a)_{ij}(\vec{E}_i \cdot \vec{A}_j). \tag{19}$$

Com a obtenção dessas correntes, passamos de uma teoria livre para uma que apresenta auto-interação entre seus bósons vetoriais de spin-1 e massa 0. Note que as correntes obtidas carregam o índice (a) de gerador do grupo de simetria, enquanto os campos carregam o índice da representação (i), desta forma a auto-interação só pode ocorrer quanto tais índices forem iguais, isto é, $i = a$. Então para que seja possível fazer a auto-interação entre campos e correntes obrigatoriamente os campos que estavam anteriormente em uma representação arbitrária passem para a representação adjunta e assim estejam na mesma representação das correntes. Depois desse procedimento concluído, o próximo passo é acoplar tais correntes ao lagrangiano usual (15) obtendo um lagrangiano de auto-interação para os fótons da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - l\phi_a j_a^0 - l\vec{A}_a\vec{j}_a, \tag{20}$$

utilizamos l como uma constante de acoplamento da auto-interação. Uma definição importante sobre a representação adjunta é que o número de campos é igual ao número de geradores e seus geradores são da forma

$$(G_a)_{bc} = -if_{abc}, \tag{21}$$

onde $a, b, \ldots = 1, \ldots, N^2 - 1$ e f_{abc} é a constante de estrutura do grupo $SU(N)$. Essa representação é deveras importante, pois no caso do $SU(3)$ a representação é feita pelo octeto das matrizes de Gell-Mann que são

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Desta forma é possível que as correntes obtidas anteriormente, possam ser escritas em termos dessas constantes de estrutura da representação adjunta em $SU(N)$

$$\vec{j}_a = -f_{abc}[(\vec{E}_b \cdot \phi_c) - (\vec{B}_b \times \vec{A}_c)], \tag{22}$$

$$j_a^0 = -f_{abc}(\vec{E}_b \cdot \vec{A}_c). \tag{23}$$

Utilizando a relação (19) obtemos o lagrangiano de auto-interação dos bósons vetoriais de massa 0 e spin-1 da forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) &+ l\phi_a f_{abc}\vec{E}_b \cdot \vec{A}_c \\ &+ l\vec{A}_a f_{abc}[(\vec{E}_b \cdot \phi_c) - (\vec{B}_b \times \vec{A}_c)],\end{aligned} \tag{24}$$

o lagrangiano de interação modifica o original e consequentemente as equações de campo originais dadas por (1), (2), (3) e (4). Vamos obter novas equações de Maxwell modificadas provenientes de (24). Assim obtemos expressões de Gauss eletricidade e Ampère-Maxwell como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}_a + 2lf_{abc}\nabla \cdot \vec{A}_b\phi_c + 2lf_{abc}\vec{A}_b\nabla \cdot \phi_c \\ +2l\vec{A}_b f_{abc}\vec{E}_c = 0,\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}(\nabla \times \vec{B}_a) - 2l\frac{\partial \vec{A}_b}{\partial t}f_{abc}\phi_c - 2lf_{abc}[(\vec{E}_b \cdot \phi_c) - (\vec{B}_b \times \vec{A}_c)] \\ +lf_{abc}\nabla \times [(A_b \times A_c)] - \frac{\partial \vec{E}_a}{\partial t} = 0.\end{aligned} \tag{26}$$

Note como a auto-interação leva a modificações em equações tradicionais. É necessário que façamos os mesmos procedimentos mais uma vez, com o intuito de retirar qualquer dependência do termo dos potenciais que estejam em uma representação adjunta nas derivadas. Definindo uma nova transformação para os campos da forma

$$\delta A_a = iw_d(G_d)_{ae}A_e = w_d f_{dae}A_e, \tag{27}$$

$$\delta\phi_a = iw_d(G_d)_{ae}\phi_e = w_d f_{dae}\phi_e. \tag{28}$$

Para obter as novas correntes é necessário que variamos o lagrangiano (24)

$$\begin{aligned}\delta S = \int d^4x \ \delta \Bigg[\frac{1}{2}(E^2 - B^2) + l\phi_a f_{abc}\vec{E}_b \cdot \vec{A}_c \\ + l\vec{A}_a f_{abc}[(\vec{E}_b \cdot \phi_c) - (\vec{B}_b \times \vec{A}_c)]\Bigg] = 0,\end{aligned} \tag{29}$$

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0159

levando a

$$\vec{j_d^{(1)}} = -f_{dae}[(E_a \cdot \phi_e) - (B_a \times A_e) - 2lf_{abc}A_b\phi_e\phi_c], \quad (30)$$

$$j_d^{0(1)} = -f_{dae}(E_a \cdot A_e - 2lf_{abc}A_bA_e\phi_c). \quad (31)$$

Por fim, o Lagrangiano de auto-interação é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - l'A_af_{abc}(B_b \times A_c) - 4ll'f_{abc}f_{ade}A_bA_d\phi_c\phi_e + 2l'f_{abc}\phi_aA_bE_c, \quad (32)$$

veja que obtida a expressão (32) não é necessário obter uma nova corrente. Isso ocorre devido a expressão não depender mais do termo dos potenciais na representação adjunta, que está ligado ao campo, logo se os mesmos procedimentos forem repetidos mais n vezes, iremos obter n correntes idênticas das anteriores (30) e (31). Assim, não é mais necessário obter correntes de auto-interação e podemos utilizar os valores $l = \frac{1}{4}g$ e $l' = \frac{1}{2}g$ para as constantes de acoplamento e escrever o lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - \frac{1}{2}gA_af_{abc}(B_b \times A_c) + gf_{abc}\phi_aA_bE_c - \frac{1}{2}g^2f_{abc}f_{ade}A_bA_d\phi_c\phi_e, \quad (33)$$

a partir da equação (33) encontramos as seguintes equações do campo elétrico e magnético de Yang-Mills segundo:

$$E_a = -\nabla \cdot \phi_a - \frac{\partial A_a}{\partial t} + gf_{abc}A_b\phi_c, \quad (34)$$

$$B_a = (\nabla \times A_a) + \frac{1}{2}gf_{abc}(A_b \times A_c). \quad (35)$$

Onde a partir lagrangiano (33) é possível obter as seguintes equações de campo

$$\nabla \cdot E_a + gf_{abc}A_bE_c = 0, \quad (36)$$

$$\nabla \times B_a + gf_{abc}(A_b \times B_c) + gf_{abc}\phi_bE_c = \frac{\partial E_a}{\partial t}. \quad (37)$$

Note que as equações (36) e (37) apresentam a mesma estrutura das equações (25) e (26) quando seus campos elétricos e magnéticos são definidos como em (34) e (35). Além disso, ainda faltam outras duas equações de campo para que seja formado o quarteto de equações de Maxwell. Assim, a partir das novas formulações (34) e (35) é possível obter as duas últimas equações de Maxwell (Gauss Magnetismo e Faraday-Lenz) na formulação não-Abeliana:

$$\nabla \times E_a = -\frac{\partial B_a}{\partial t} + gf_{abc}\phi_bB_c - gf_{abc}(A_b \times E_c), \quad (38)$$

$$\nabla \cdot B_a + gf_{abc}A_bB_c = 0. \quad (39)$$

De forma compacta, podemos escrever as novas equações de Maxwell não-Abelianas, isto é, escritas no formalismo de Yang-Mills no grupo $SU(N)$ são:

$$\nabla \cdot E_a + gf_{abc}A_bE_c = 0, \quad (40)$$

$$\nabla \cdot B_a + gf_{abc}A_bB_c = 0, \quad (41)$$

$$\nabla \times E_a + gf_{abc}(A_b \times E_c) = -\frac{\partial B_a}{\partial t} + gf_{abc}\phi_bB_c, \quad (42)$$

$$\nabla \times B_a + gf_{abc}(A_b \times B_c) = \frac{\partial E_a}{\partial t} - gf_{abc}\phi_aE_b. \quad (43)$$

A partir desse novo conjunto de equações não-Abelianas obtidas é possível analisar quando comparadas com as equações (1), (2), (3) e (4) que a equação de Gauss magnetismo (41) sofre modificações importantíssimas em sua estrutura. Tais modificações acarretam que os campos vetoriais de auto-interação que possuem spin-1 e massa 0 são aptos a criar monopolos magnéticos sem a presença da matéria fermiônica como pode ser visto na equação (41). Isso é uma importante distinção entre o caso Abeliano e o não-Abeliano proveniente das equações de Maxwell. É ainda importante salientar que os campos elétricos e magnéticos nesse caso não apresentam significados físicos, já que estes por sua vez, não são invariantes de gauge. Como proposta inicial de formular uma teoria de auto-interação para bósons vetoriais de spin-1 e massa nula a partir de primeiros princípios, podemos naturalmente definir a derivada covariante de gauge com componente espacial da forma:

$$\vec{D} = \delta_a^c\nabla + gf_{abc}A_b, \quad (44)$$

e a derivada temporal covariante de gauge é:

$$D_t = \delta_a^c\frac{\partial}{\partial t} - gf_{abc}\phi_b. \quad (45)$$

A partir de tais definições é possível reescrever as equações (40), (41), (42) e (43) com a mesma estrutura das equações de Maxwell usuais como em (1), (2), (3) e (4). Eles serão substituídos pelos operadores de derivadas com uma estrutura não-Abeliana de grupo $SU(N)$, desta forma, obtemos as seguintes expressões:

$$\vec{D} \cdot E_c = 0, \quad (46)$$

$$\vec{D} \cdot B_c = 0, \quad (47)$$

$$\vec{D} \times E_c = -D_t \cdot B_c, \quad (48)$$

$$\vec{D} \times B_c = D_t \cdot E_c. \quad (49)$$

Com esses resultados obtidos é possível que a analise da teoria seja estendida ao ponto de aplica-la a matéria, isto é, para que seja aplicada a construção da teoria eletrofraca e consequentemente a construção das teorias de interação do Modelo padrão.

3.1. A energia e o momento das ondas de Yang-Mills

Com a obtenção das equações (46), (47), (48) e (49) semelhantes às equações tradicionais de Maxwell, podemos mostrar que certas aplicações dessas equações nos retornam equações semelhantes àquelas do eletromagnetismo usual. Além disso, a derivada covariante de gauge se comporta como uma derivada usual quando estamos trabalhando com um termo escalar nos índices de Yang-Mills. Um escalar de Yang-Mills é o que chamamos de um singlete do grupo de simetria. Isto significa que os geradores, G_a, são triviais, $G_a = 0$, quando atuando sobre grandezas escalares de Y-M. Portanto, $D_t = \partial/\partial_t$ e $\vec{D} = \nabla$. Com isso, podemos escrever que:

$$\begin{aligned}(D_t \cdot B_c) \cdot B_c &= \left(\frac{\partial B_c}{\partial t} - g f_{cab}\phi_a B_b\right) \cdot B_c \\ &= \left(\frac{\partial B_c}{\partial t}\right) \cdot B_c - g f_{cab}\phi_a B_b B_c \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{50}$$

Tal relação ocorre de forma idêntica a derivada covariante de gauge espacial dada em (44). Portanto, iremos utilizar essa relação para encontrar o fluxo de energia direcional, isto é, o vetor de Poynting. A forma de obtenção desta quantidade é igual a feita nos cursos de graduação em eletromagnetismo, devido a propriedade da derivada covariante de gauge mostrada anteriormente, temos:

$$\nabla \cdot S + \frac{\partial U^{em}}{\partial t} = 0, \tag{51}$$

esta equação é associada à conservação de energia pois, $S = (E_c \times B_c)$ é o vetor de Poynting quantidade fundamental da teoria eletromagnética, pois representa o fluxo de momento e $U^{em} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$ fornece a densidade de energia eletromagnética. Tomando-se a derivada temporal do vetor de Poynting, podemos naturalmente deduzir a equação de continuidade relacionando o momento da onda não-Abeliana com o correspondente tensor de tensões, assim:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot T = 0, \tag{52}$$

onde novamente S é o vetor de Poynting e T é o tensor eletromagnético de energia e momento que determina as propriedades fundamentais do campos elétricos e magnéticos como energia, momento, pressão e etc... e apresenta componentes

$$T^{mn} = [\delta^{mn}(B_c^2 + E_c^2) - B_c^m B_c^n - E_c^m E_c^n]. \tag{53}$$

Após adentrarmos a algumas aplicações através das equações que descrevem campos de spin-1 nota-se que estamos trabalhando sem a presença das fontes. É de extrema importância pontuar que a adição das mesmas é de suma importância para as equações, assim como nas equações de Maxwell usuais. Entretanto, para a obtenção das equação de spin-1 não-Abelianas elas não apresentam um caráter fundamental. Desta forma, agora que toda a construção já foi feita, podemos adiciona-las. Isso levaria as equações (46) e (49) a serem rescritas como:

$$\vec{D} \cdot E_c = \rho_c, \tag{54}$$

$$\vec{D} \times B_c = D_t \cdot E_c + J_c. \tag{55}$$

Uma observação necessária na adição das fontes é que os índices de Yang-Mills dessas fontes devem ser os mesmos índices dos campos.

3.2. Acoplamento com a matéria

Como comentado em todo o trabalho, fizemos a construção de uma teoria de auto-interação para bósons vetoriais de massa nula e spin-1. Porém, é natural questionamentos acerca do que aconteceria quando trabalhássemos com o setor de matéria, mais especificamente o acoplamento com a matéria fermiônica. Descrever primeiramente o setor de matéria foi o caminho seguido por C. N. Yang e R. Mills no paper original de 1954. Essa análise permite que entendamos como as transformações de gauge se manifestam no setor de matéria, assim, iremos partir do lagrangiano original de Dirac

$$\mathcal{L}_D = i\psi^\dagger\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}\psi + i\psi^\dagger\gamma^\mu\nabla\psi, \tag{56}$$

onde ψ é o campo de matéria fermiônica e $\psi^\dagger = (\psi^*)^T$ é o que chamamos de conjugado transposto do campo ψ. Temos ainda que γ são as matrizes de Dirac, que obedecem à álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{57}$$

Sendo $g^{\mu\nu}$ a métrica no espaço de Minkowski. A partir da equação (56) podemos definir uma simetria de Lie para a matéria fermiônica semelhante às equações (10) e (11) da forma

$$\psi'_A = R_{AB}\psi_B, \tag{58}$$

onde A e B são índices da representação onde o férmion está, naturalmente colocamos esses índices na representação adjunta que no caso do $SU(N)$, os índices são $A, B = 1, \ldots, N^2 - 1$. Vamos propor uma transformação linear para a matéria fermiônica, assim queremos descobrir quem é essa função R_{AB}. Esse grupo tem como características as matrizes unitárias $R^\dagger R = 1$ que são dos grupos $U(N)$ e as mesmas matrizes possuem $|\det R|^2 = 1 \to \det R = 1$. Um desenvolvimento sobre esse grupo permite que encontramos que o mesmo apresente N vínculos reais e $N^2 - 1$ graus de liberdade. Vamos utilizar das derivadas covariantes (44) e (45) no N-plete de matéria, para que o lagrangiano (56) seja invariante, precisamos ter a seguinte transformação

$$(D_t\psi)'_A = R_{AB}(D_t\psi)_B, \tag{59}$$

$$(\vec{D}\psi)'_A = R_{AB}(\vec{D}\psi)_B. \tag{60}$$

Podemos utilizar a derivada covariante de gauge nas componentes espaciais quanto na temporal que o resultado será o mesmo. Só que para o $SU(N)$, sabemos que a derivada covariante tem uma transformação de similaridade

$$D'_t = RD_tR^{-1} \to \frac{\partial}{\partial t} + ig = R\left(\frac{\partial}{\partial t} + ig\right)R^{-1}, \tag{61}$$

$$\vec{D}' = R\vec{D}R^{-1} \to \nabla + ig = R\left(\nabla + ig\right)R^{-1}. \tag{62}$$

Logo como as matrizes são unitárias, elas apresentam uma representação unitária do grupo. Assim, essas transformações ocorrem da mesma forma para outros campos e podemos utilizar a transformação do campo Eq. (8) e encontrar a seguinte relação para o campo A com as componentes espaciais e temporais

$$\vec{A}' = R\vec{A}R^{-1} + i(\nabla R)R^{-1}, \tag{63}$$

$$A'_0 = RA_0R^{-1} + i\left(\frac{\partial}{\partial t}R\right)R^{-1}. \tag{64}$$

Vamos escolher trabalhar com as componentes espaciais (o resultado seria equivalente para as componentes temporais) utilizando que $A_0 = \Phi$, podemos substituir na equação

$$\nabla\psi' + i\vec{A}\psi' = R_{AB}\nabla\psi + iR_{AB}\vec{A}\psi, \tag{65}$$

que resolvendo-a, obtemos

$$R_{AB} = (e^{iw_aG_a})_{AB}. \tag{66}$$

Agora, é possível obter uma corrente de auto-interação fermiônica para este sistema através do método de Noether

$$\vec{j}_m = \psi_A^\dagger\gamma^\mu m(G_a)_{AB}\psi_B, \tag{67}$$

e temos ainda a corrente fermiônica na componente temporal que também é conhecida como densidade de carga que apresenta equação

$$\rho_m^0 = \psi_A^\dagger\gamma^0(G_a)_{AB}\psi_B. \tag{68}$$

O lagrangiano de auto-interação da matéria fermiônica pode ser escrito como

$$\mathcal{L}_D^1 = \mathcal{L}_D - g\rho_m^0\Phi + g\vec{j}_m\vec{A}, \tag{69}$$

onde g é a constante de acoplamento universal de Yang-Mills. Esta universalidade significa que tanto os auto-acoplamentos dos bósons mediadores como os acoplamentos dos mesmos à matéria em geral são governados pelo mesmo parâmetro g, onde este por sua vez é comumente escolhido para ser igual ao acoplamento de Yang-Mills na equação de Dirac. Se abrirmos todos esses termos, teremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D^1 &= i\psi_A^\dagger\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}\psi_B + i\psi_A^\dagger\gamma^\mu\nabla\psi_B - g\psi_A^\dagger\gamma^0(G_a)_{AB}\psi_B\Phi \\ &\quad + g\psi_A^\dagger\gamma^\mu(G_a)_{AB}\psi_B\vec{A} \\ &= \psi_A^\dagger i\gamma^0\left(\delta_{AB}\frac{\partial}{\partial t} + ig(G_a)_{AB}\Phi\right)\psi_B \\ &\quad + \psi_A^\dagger i\gamma^\mu(\delta_{AB}\nabla + ig(G_a)_{AB}\vec{A})\psi_B.\end{aligned} \tag{70}$$

Note que podemos reescrever essa expressão a partir das definições das derivadas covariantes na representação adjunta da forma

$$(\vec{D})_{AB} = \delta_{AB}\nabla + ig(G_a)_{AB}\vec{A}, \tag{71}$$

$$(D_t)_{AB} = \delta_{AB}\frac{\partial}{\partial t} + ig(G_a)_{AB}\Phi. \tag{72}$$

É possível perceber que a estrutura da derivada covariante de gauge vai se adaptando para a representação sugerida pela teoria. Por fim, obtemos uma expressão para o lagrangiano como

$$\mathcal{L}_D^1 = i\psi_A^\dagger\gamma^0(D_t)_{AB}\psi_B + i\psi_A^\dagger\gamma^\mu(\vec{D})_{AB}\psi_B. \tag{73}$$

4. Considerações Finais

Este trabalho tem como objetivo celebrar os 70 anos da teoria de Yang-Mills, construindo-a através de uma outra alternativa da construção feita nos livros e artigos em geral. Discutimos de forma histórica sua construção e os desafios enfrentados até a sua consolidação como a formulação mais adequada para descrever as interações fundamentais e a unificação das mesmas no Modelo-Padrão das Partículas Elementares. A ideia central é partir de uma teoria Abeliana livre de bósons vetoriais de spin-1 e massa nula e chegar em uma teoria de Yang-Mills, que vai apresentar essas mesmas propriedades dos bósons, só que com uma versão não-Abeliana e em auto interação. Com este objetivo, abordamos inicialmente as transformações de gauge para os campos utilizando conceitos da Teoria de Grupos, mais precisamente o grupo $SU(N)$.

A partir daí, desenvolvemos a construção de uma teoria de auto-interação não-Abeliana a partir do grupo $U(1)$ da teoria eletromagnética de Maxwell. Como o assunto já é bem estruturado na literatura, escolhemos utilizar um método popularizado no estudo da Supersimetria e Supergravidade, conhecido como método das correntes de Noether. A partir da Lagrangiana usual, construímos correntes de auto-interação para nosso campo até chegarmos finalmente às equações de campo não-Abelianas e após a definição da derivada covariante de Gauge, é possível obter equações Abelianas e não-Abelianas com a mesma estrutura, isto é, a estrutura de divergentes e rotacionais dos campos elétricos e magnéticos e suas derivadas temporais. Consequentemente, a derivada covariante de gauge surge naturalmente nas equações para os campos de Yang-Mills, o que nos permite escrever as novas equações de Maxwell não-Abelianas de forma mais compacta, e que seja possível intuitivamente estendê-la para introduzir o acoplamento mínimo com a matéria que transporta carga de Yang-Mills.

São muitos os desdobramentos possíveis das equações de Maxwell usuais, e mostramos que isso pode ser estendido ao formalismo não-Abeliano. As ilustrações que escolhemos foram: a equação de conservação de energia do vetor de Poynting e o calculo do tensor eletromagnético de energia e momento. Foi possível mostrar que tais quantidades se mostram semelhantes àquelas do formalismo Abeliano devido à estrutura dos campos e da derivada covariante de gauge, mantendo a generalização proposta por tais equações.

Por fim, escolhemos fazer a mesma análise para o setor de matéria fermiônica. Como dito anteriormente, a ordem dos passos seguidos por nós neste trabalho diferem do procedimento seguido no trabalho original de Yang e Mills. Tal escolha foi feita para mostrar ao leitor que se quisermos trabalhar primeiro com o acoplamento da matéria fermiônica e depois com os bósons vetoriais é possível, visto que os processos são independentes e o resultado final é o mesmo. Assim, partimos da lagrangiana usual de Dirac e lançando mão novamente da estrutura da derivada covariante de gauge foi possível mostrar que é possível obter a matriz de transformação de calibre do campo fermiônico. Até que obtemos por fim um lagrangiano de Dirac, de auto-interação escrito em termos do acoplamento mínimo (derivada covariante de gauge), onde essa por sua vez teve sua estrutura aparecendo de forma natural através das escolhas feitas com o acoplamento da matéria.

Referências

[1] L. Broglie, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **47**, 446 (1924).
[2] E. Schrödinger, Phys. Rev. **28**, 1049 (1926).
[3] W. Heisenberg, Z. Phys. **33**, 879 (1925).
[4] P. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A. **117**, 610 (1928).
[5] P. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A. **133**, 60 (1931).
[6] C. Anderson, Phys. Rev. **43**, 491 (1933).
[7] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. **17**, 48 (1935).
[8] J. Maxwell, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **155**, 459 (1865).
[9] C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini e C.F. Powell, Nature **159**, 694 (1947).
[10] E. Gardner e C.M.G. Lattes, Science **107**, 270 (1948).
[11] W. Heisenberg, Z. Phys. **77**, 1 (1932).
[12] E. Wigner, Phys. Rev. **51**, 106 (1937).
[13] T. Lauritsen, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **1**, 67 (1952).
[14] J.C. Taylor, *Gauge Theories in the Twentieth Century* (World Scientific, Singapura, 2001).
[15] C. Yang e R. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
[16] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
[17] O. Acevedo, R. Cuzinatto, B. Pimentel e P. Pompeia, Rev. Bras. Ensino Fís. **40**, e4302 (2018).
[18] E. Fermi, Z. Phys. **88**, 161 (1934).
[19] T. Lee e C. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
[20] S. Glashow, Nuclear Physics. **10**, 107 (1959).
[21] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
[22] A. Salam, Nuovo Cim. **5**, 299 (1957).
[23] T. Lee e C. Yang, Phys. Rev. **105**, 1671 (1957).
[24] E. Noether, Transport Theory And Statistical Physics **1**, 186 (1971).
[25] O.A. Acevedo e B.M. Pimentel, Rev. Bras. Ensino Fís. **45**, e20230091 (2023).
[26] S. Deser, Gen. Rel. Grav. **1**, 9 (1970).
[27] P.V. Nieuwenhuizen, Phys. Rept. **68**, 189 (1981).
[28] J. Furtado e J. Helaÿel-Neto, Rev. Bras. Ensino Fís. **44**, e20220045 (2022).
[29] A. Nogueira e D. Silva, Rev. Bras. Ensino Fís. **42**, e20200137 (2020).
[30] M. Peskin e D. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, Boston, 1995).

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0159