

# Estudo da Lei de Ampere com a hipótese do condutor de comprimento finito

Ampere's Law study with the finite length wire hypothesis

Jorge Pedraza Arpasi\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Pampa, Centro Tecnológico de Alegrete, Alegrete, RS, Brasil.

Recebido em 29 de setembro de 2022. Revisado em 14 de novembro de 2022. Aceito em 27 de novembro de 2022.

Neste artigo é proposto o estudo da Lei de Ampere, que é ensinado nas disciplinas de Física dos cursos de graduação em engenharias no Brasil, utilizando a hipótese do condutor de comprimento finito ao invés do condutor de comprimento infinito. Para isto é necessária a utilização do Teorema de Stokes que no caso do condutor infinito é dispensado. A factibilidade desta proposta é subsidiada pelo fato de que as técnicas para calcular as integrais de linha e integrais de fluxo, necessárias nesta nossa proposta, são ministradas nas disciplinas de Cálculo. Esta abordagem permite uma distinção clara entre a “corrente encerrada” pela curva fechada da integral de linha amperiana e a corrente que efetivamente passa pelo condutor. Com a hipótese do condutor de comprimento infinito estas duas correntes são indistinguíveis. Um outro ganho desta abordagem é que a corrente de deslocamento pode ser introduzida intuitivamente como a integral de fluxo do rotacional do campo magnético que aparece num dos membros da equação de Stokes.

**Palavras chave:** Lei de Ampere, Teorema de Stokes, Condutor comprimento finito, Corrente de deslocamento.

This article proposes the study of Ampere's Law, which is taught in the Physics course of undergraduate engineering courses in Brazil, using the hypothesis of the finite-length conductor instead of the infinite-length conductor. For this, it is necessary to use Stokes' Theorem, which in the case of infinite conductor is dispensed with. The feasibility of this proposal is supported by the fact that the techniques to calculate the line integrals and flux integrals, necessary in our proposal, are taught in the disciplines of Calculus. This approach allows a clear distinction between the “current enclosed” by the closed curve of the amperian line integral and the current actually flowing through the conductor. With the assumption of the infinite length conductor these two currents are indistinguishable. Another benefit of this approach is that the displacement current can be introduced intuitively as the flux integral of the curl of the magnetic field that appears in one of the members of the Stokes equation.

**Keywords:** Ampere's law, Stokes's theorem, Finite length wire, Displacement current.

## 1. Introdução

Nas ementas da maioria dos cursos de graduação em engenharias do Brasil está incluído o ensino do Eletromagnetismo onde um dos assuntos abordados é a Lei de Ampere:

$$\oint_C \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \mu_0 i_{encerr}, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{B}$  é o campo magnético e  $i_{encerr}$  é a corrente encerrada pela curva fechada  $C$ . Seguindo os livros texto [1, 2], a prova teórica de (1) é realizada assumindo que a curva  $C$  encerra um condutor retilíneo de comprimento infinito por onde se desloca uma corrente  $i$ . Uma consequência desta hipótese do condutor infinito é que a corrente encerrada  $i_{encerr}$  pela curva  $C$  coincide com a corrente  $i$  que esta atravessando uma seção transversal

do condutor, isto é:

$$\mu_0 i_{encerr} = \oint_C \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \mu_0 i. \quad (2)$$

Um estudante atento poderia inquirir, qual é então a diferença entre a corrente  $i_{encerr}$  encerrada pela curva  $C$  e a corrente  $i$  que efetivamente atravessa cada seção transversal do condutor? Um objetivo do presente artigo é mostrar que existe, sim, diferença entre estas duas correntes. A ferramenta a ser utilizada para mostrar esta diferença é o Teorema de Stokes que o estudante tem a seu alcance dentro do seu curso de formação em alguma disciplina de cálculo vetorial, baseada maioritariamente na bibliografia [3, 4]:

$$\oint_C \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \iint_S \text{rot} \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (3)$$

onde  $C$  é a borda de alguma superfície  $S$ ,  $\mathbf{F}$  um campo vetorial, enquanto que  $\boldsymbol{\gamma}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  são parametrizações de  $C$  e  $S$ , respectivamente. Combinando a Lei de Ampere (1)

\* Endereço de correspondência: arpasi@gmail.com

e o Teorema de Stokes (3) temos que:

$$\mu_0 i_{encerr} = \oint_C \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \iint_S \text{rot} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (4)$$

Até onde chega o nosso conhecimento existe pouca ou nenhuma literatura, em nível de ensino de graduação, onde seja explanada esta aplicação (4) do Teorema de Stokes na demonstração da Lei de Ampere. Nos textos de Física, por exemplo [1, 2], a hipótese de condutor infinito permite dispensar o Teorema de Stokes para mostrar a Lei de Ampere. Reciprocamente, nos textos de Cálculo [3, 4], nenhum dos exemplos de campos vetoriais usados para ilustrar o Teorema de Stokes ou a integral de linha é o campo magnético  $\mathbf{B}$ . No intuito de obter uma distinção objetiva e portanto, didática entre as correntes  $i_{encerr}$  e  $i$  da equação (2), acreditamos que o presente artigo também serve para contribuir a estender essa ponte que está faltando entre o ensino da Lei de Ampere e o ensino do Teorema de Stokes.

O problema didático da explicação da Lei de Ampere em condutores de comprimento finito já foi abordado anteriormente em algumas outras publicações tais como [5–9]. Em [5] o estudo é abordado supondo que os pontos extremos do condutor são uma fonte e um poço de cargas elétricas gerando um campo elétrico variante no tempo, não é mencionado o Teorema de Stokes. Em [6] é mencionada a inaplicabilidade do Teorema de Stokes quando a superfície considerada é transversa ao condutor. Em este nosso artigo resolvemos este problema considerando um anel ao invés de uma superfície simplesmente conexa demandada pelo Teor. de Stokes. No artigo [7] que é uma crítica a [6], a Lei de Ampere em condutores de comprimento finito, é explanada com técnicas e notações avançadas de Física e Matemática, de um nível acima do que costumeiramente é ensinado nas disciplinas de graduação em engenharias. O artigo [8] utilizando a ideia de fonte-poço ao respeito dos extremos do condutor finito admite a corrente de deslocamento sem mencionar Stokes. Finalmente, em [9], um objetivo explícito é evitar a utilização da corrente de deslocamento na explicação da Lei de Ampere em condutores de comprimento finito.

Neste, o nosso trabalho, usamos plenamente o Teorema de Stokes para explanar a Lei de Ampere em condutores de comprimento finito. Isto permite definir com naturalidade a corrente de deslocamento  $i_{desloc}$ . Mostraremos que esta corrente de deslocamento é a que faz a diferença entre a corrente encerrada  $i_{encerr}$  pela curva amperiana e a corrente  $i$  que efetivamente passa pelo condutor da equação (2).

### 1.1. Organização do artigo

Este artigo está organizado como segue:

Na Seção 2 estabelecemos as fórmulas que regem as componentes do campo magnético a partir da Lei de Bios-Savart.

Na Seção 3, calculamos a integral de linha da Lei de Ampere para o campo obtido na Seção 2, e mostramos

que existe sim uma diferença entre a corrente  $i_{encerr}$  de (1) e a corrente  $i$  que efetivamente atravessa uma seção transversal do condutor.

Na Seção 4 definimos a corrente de **deslocamento**  $i_{desloc}$ . Esta definição é fundamentada na análise das unidades físicas envolvidas no Teorema de Stokes. Então, é mostrado que  $i_{encerr} = i + i_{desloc}$  que permite explicar porque  $i \neq i_{encerr}$ .

Finalmente, na Seção 5 mostramos que no caso do condutor de comprimento infinito o rotacional do campo magnético é nulo que impede a existência de corrente de deslocamento o que explica neste caso o porque  $i = i_{encerr}$ .

## 2. Campo Magnético Gerado Por Uma Corrente Atravessando um Hipotético Condutor Reto de Comprimento Finito

Suponha um cabo condutor de comprimento finito descrito pela curva  $\mathbf{s}(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Pela Lei de Bios-Savart uma corrente  $i$  se deslocando pelo cabo gera o campo magnético

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathbf{s}'(t) \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t))}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)\|^3} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Claramente este campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  não está definido no pontos espaciais  $\mathbf{s}(t)$  ocupados pelo cabo, isto é  $\mathbf{r} = (x, y, z) \neq \mathbf{s}(t)$ . Para o caso de um condutor reto, de comprimento finito  $l$ , localizado no eixo coordenado  $X$ , temos  $\mathbf{s}(t) = (s(t), 0, 0)$ , com  $\mathbf{s}(t_1) = (l_1, 0, 0)$  e  $\mathbf{s}(t_2) = (l_2, 0, 0)$  com  $l_2 - l_1 = l > 0$ . Além disso,  $\mathbf{s}'(t) = (v, 0, 0)$  que implica  $d\mathbf{s} = \mathbf{s}'(t)dt = (vdt, 0, 0) = (ds, 0, 0)$  e  $\mathbf{r} - \mathbf{s} = (x - s, y, z)$  donde

$$d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) = (0, -zds, yds). \quad (6)$$

Para melhor descrever geometricamente as ideias apresentadas a seguir, seja  $\mathbf{s}(t) = L$ , isto é:

$$L = \{(x, y, z); l_1 \leq x \leq l_2, y = 0, z = 0\}. \quad (7)$$

Calculando explicitamente (5) temos

$$\begin{aligned} B_1(x, y, z) &= 0 \\ B_2(x, y, z) &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} z \int_{l_1}^{l_2} \frac{ds}{((x-s)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ B_3(x, y, z) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} y \int_{l_1}^{l_2} \frac{ds}{((x-s)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

e fazendo a mudança  $u = x - s$ , as componentes do campo magnético são:

$$\begin{aligned}
 B_1(\mathbf{r}) &= 0 \\
 B_2(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} z \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
 B_3(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} y \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{r} \notin \mathbf{L}$ , onde  $\mathbf{L}$  representa o conjunto de pontos ocupados pelo condutor e que está definido explicitamente na equação (7).

### 3. Lei de Ampere no Condutor de Comprimento Finito

Considere a curva plana e fechada (Amperiana)  $C$ :

$$\gamma(t) = (x, a \cos(t), a \sin(t)), \tag{9}$$

onde  $x \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq t \leq 2\pi$ , Figura 1. Temos que  $C$  é uma curva que encerra um disco plano ortogonal com o eixo  $X$  onde está o condutor  $\mathbf{L}$  definida na equação (7). Substituindo  $\gamma$  em (8) obtemos;

$$B_2(\gamma(t)) = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} a \sin(t) \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}, \tag{10}$$

e também

$$B_3(\gamma(t)) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} a \cos(t) \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}. \tag{11}$$

Como as tangentes de  $C$  são  $\gamma'(t) = (0, -a \sin(t), a \cos(t))$  teremos;

$$\mathbf{B}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \frac{\mu_0 i a^2}{4\pi} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}, \tag{12}$$

que significa que o produto escalar  $\mathbf{B}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  não depende de  $t$ .

Seja  $i_{encerr}$  a corrente encerrada pela curva  $C$ , pela Lei de Ampere temos

$$\begin{aligned}
 \mu_0 i_{encerr} &= \oint_C \mathbf{B}(\gamma) \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \mathbf{B}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \frac{\mu_0 i a^2}{2} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

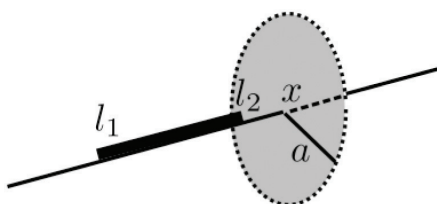


Figura 1: Condutor finito.

Utilizando a fórmula  $\int \frac{du}{(A^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{A^2\sqrt{A^2+u^2}}$  temos a forma final da integral de linha é

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{B}(\gamma) \cdot d\gamma &= \frac{\mu_0 i}{2} \left( \frac{x-l_1}{\sqrt{a^2+(x-l_1)^2}} - \frac{x-l_2}{\sqrt{a^2+(x-l_2)^2}} \right), \tag{14}
 \end{aligned}$$

para qualquer  $a > 0$  e para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Nesta ultima equação (14) notamos que a função

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x-l_1}{\sqrt{a^2+(x-l_1)^2}} - \frac{x-l_2}{\sqrt{a^2+(x-l_2)^2}} \right) \tag{15}$$

não possui unidades físicas e está definida continuamente em toda a reta real  $\mathbb{R}$ . Se  $l_1 \leq x \leq l_2$  teremos

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x-l_1}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x-l_2}\right)^2}} \right), \tag{16}$$

que mostra que  $0 \leq f(x) \leq 1$ , para todo  $x \in [l_1, l_2]$ .

Por outro lado, se  $x > l_2 > l_1$ , temos

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x-l_1}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x-l_2}\right)^2}} \right), \tag{17}$$

que mostra que também  $0 \leq f(x) \leq 1$  para todo  $x > l_2$ .

Além disso, por simples substituição, podemos verificar que  $f(x)$  é simétrica com respeito do ponto médio do condutor  $l_m = \frac{l_1+l_2}{2}$ , isto é,  $f(l_m+x) = f(l_m-x)$ . Todos estes fatos nos permitem concluir que  $0 \leq f(x) \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Um gráfico de  $f(x)$  para  $a = 0.5$ ,  $l_1 = -1$  e  $l_2 = 4$  é mostrado na Figura 2.

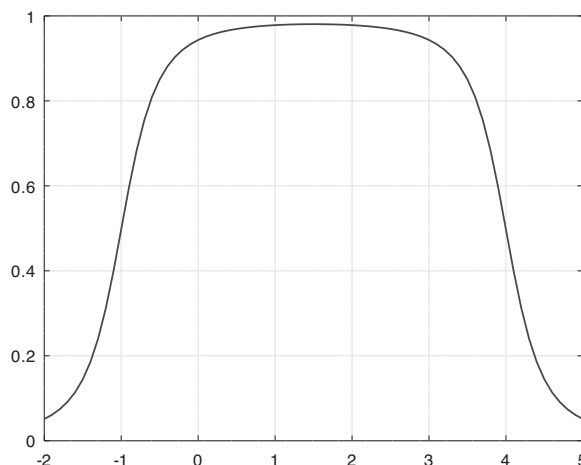


Figura 2:  $0 \leq f(x) \leq 1$ .

Portanto, para qualquer  $a > 0$ , teremos que

$$\mu_0 i_{encerr} = \oint_C \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot d\boldsymbol{\gamma} < \mu_0 i, \tag{18}$$

que mostra que a corrente encerrada  $i_{encerr}$  pela curva  $C$  é diferente da corrente que atravessa cada seção transversal do condutor  $L$ . Explicitamente, temos:

$$i_{encerr} < i \tag{19}$$

#### 4. Corrente de Deslocamento no Condutor de Comprimento Finito

Seja  $S$  uma superfície simples não-fechada com parametrização  $\boldsymbol{\sigma}(u, v)$  e seja  $C$  uma curva fechada com parametrização  $\boldsymbol{\gamma}(t)$ , tal que a curva  $C$  é a borda da superfície  $S$  de modo que a superfície e a curva tenham orientações compatíveis. Se o campo  $\mathbf{B}$ , esta continuamente definido em  $S$  e  $C$ , então o Teorema de Stokes, [3, 4], afirma que:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot d\boldsymbol{\gamma} &= \iint_S \text{rot}\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \iint_R \text{rot}\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial v} dA \end{aligned} \tag{20}$$

Tendo como referência a equação (14), as unidades físicas de qualquer um dos membros da equação (20) são as unidades da grandeza  $\mu_0 i$ . Por outro lado, qualquer uma das integrais duplas de (20) é uma integral de fluxo do campo  $\text{rot}\mathbf{B}$  através de  $S$ . Isto nos permite interpretar o rotacional do campo magnético normalizado pela constante  $\mu_0$  como sendo a densidade de alguma corrente de cargas elétricas. Mais precisamente temos a seguinte definição

**Definition 1** *Seja  $\mathbf{B}$  um campo magnético continuamente definido numa superfície  $S$ . Então, a corrente de deslocamento associada a  $\mathbf{B}$  e atravessando  $S$  é definida por*

$$i_{desloc} = \frac{1}{\mu_0} \iint_S \text{rot}\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{21}$$

Para o caso do campo  $\mathbf{B}$  gerado por um condutor finito  $L$  com em (7), utilizaremos a fórmula (21) em duas superfícies:

- Um disco plano  $D_a$  perpendicular ao condutor  $L$  e com componente  $x$  tal que  $x > l_2$ , Figura 1, ou mais explicitamente:

$$D_a = \{(x, y, z); x > l_2, y^2 + z^2 \leq a^2\} \tag{22}$$

- Um anel  $A$  perpendicular ao condutor  $L$  e com componente  $x$  tal que  $l_1 < x < l_2$ :

$$A_{a,\epsilon} = \{(x, y, z); l_1 < x < l_2, 0 < \epsilon^2 < y^2 + z^2 \leq a^2\} \tag{23}$$

Aplicando a fórmula do rotacional em (8) obtemos

$$\text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (B_{3y}(\mathbf{r}) - B_{2z}(\mathbf{r}), -B_{3x}(\mathbf{r}), B_{2x}(\mathbf{r})), \tag{24}$$

onde  $B_{3y} = \frac{\partial B_3}{\partial y}$ ,  $B_{2z} = \frac{\partial B_2}{\partial z}$  e assim por diante; e cuidando sempre que  $\mathbf{r} \notin L$ .

#### 4.1. Corrente de deslocamento no disco $D_a$

Este disco pode ser parametrizado por  $D_a : \boldsymbol{\sigma}(y, z) = (x, y, z)$ , onde  $(y, z) \in R = \{y^2 + z^2 \leq a^2\}$ , com isto obtemos a orientação  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} = (1, 0, 0)$ . Como o campo  $\text{rot}\mathbf{B}$  está continuamente definido em todo  $D_a$ , a integral de fluxo está bem definida;

$$\iint_{D_a} \text{rot}\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_R (B_{3y}(y, z) - B_{2z}(y, z)) dA \tag{25}$$

O cálculo de (25) requer os cálculos prévios da derivada parcial;

$$\begin{aligned} B_{3y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_0 i y}{4\pi} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{3\mu_0 i y^2}{4\pi} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned} \tag{26}$$

e também a da derivada parcial;

$$\begin{aligned} B_{2z}(x, y, z) &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{3\mu_0 i z^2}{4\pi} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Donde

$$\begin{aligned} (B_{3y} - B_{2z})(x, y, z) &= \frac{2\mu_0 i}{4\pi} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{3\mu_0 i (y^2 + z^2)}{4\pi} \int_{x-l_2}^{x-l_1} \frac{du}{(u^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Utilizando as fórmulas de integração  $\int \frac{du}{(A^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{A^2 \sqrt{A^2 + u^2}} + c$ , e  $\int \frac{du}{(A^2 + u^2)^{5/2}} = \frac{u(3A^2 + 2u^2)}{3A^4(A^2 + u^2)^{3/2}} + c$  que podem ser obtidas em [3, 4] ou serem calculadas diretamente com a calculadora web [10]; podemos escrever:

$$\begin{aligned} (B_{3y} - B_{2z})(x, y, z) &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \left( \frac{u}{(u^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \Bigg|_{u=x-l_2}^{u=x-l_1}, \end{aligned}$$

substituindo isto, na integral de fluxo (25) obtemos:

$$\begin{aligned} & \iint_{D_a} \text{rot} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \left( \iint_R \frac{u}{(u^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dA \right) \Big|_{u=x-l_2}^{u=x-l_1}, \end{aligned} \tag{29}$$

onde  $R = \{(y, z); y^2 + z^2 \leq a^2\}$ .

Integrando em coordenadas polares teremos:

$$\begin{aligned} & \iint_{D_a} \text{rot} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \left( \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{u}{(u^2 + r^2)^{3/2}} r dr d\theta \right) \Big|_{u=x-l_2}^{u=x-l_1} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2} \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}} - \frac{u}{|u|} \right) \Big|_{u=x-l_2}^{u=x-l_1} \end{aligned} \tag{30}$$

Especificamente, para  $x > l_2 > l_1$  temos:

$$\begin{aligned} & \iint_{D_a} \text{rot} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2} \left( \frac{x-l_1}{\sqrt{(x-l_1)^2 + a^2}} - \frac{x-l_2}{\sqrt{(x-l_2)^2 + a^2}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 i}{2} f(x), \end{aligned} \tag{31}$$

onde  $f(x)$  está definida em (15).

Portanto, comparando (31) e (21), a corrente de deslocamento através do disco  $D_a$  é:

$$i_{desloc} = \frac{i}{2} f(x) \neq 0.$$

#### 4.2. Corrente de deslocamento no anel $A_{a,\epsilon}$

Neste caso o fluxo do rotacional é:

$$\begin{aligned} & \iint_{A_{a,\epsilon}} \text{rot} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \left( \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^a \frac{u}{(u^2 + r^2)^{3/2}} r dr d\theta \right) \Big|_{u=x-l_2}^{u=x-l_1} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2} \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}} - \frac{u}{\sqrt{u^2 + \epsilon^2}} \right) \Big|_{u=x-l_2}^{u=x-l_1} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2} \left( f(x) - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{x-l_1}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{x-l_2}\right)^2}} \right). \end{aligned} \tag{32}$$

Dai

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_{a,\epsilon}} \text{rot} \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu_0 i}{2} (f(x) - 2) < 0, \tag{33}$$

disto segue que:

$$i_{desloc} = \frac{i}{2} (f(x) - 2); \quad l_1 \leq x \leq l_2. \tag{34}$$

Portanto

$$i + i_{desloc} = \oint_C \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot d\boldsymbol{\gamma} \tag{35}$$

### 5. Corrente de Deslocamento no Condutor de Comprimento Infinito

Se o condutor é infinito, podemos obter as equações do campo  $\mathbf{B}$  a partir de (8) fazendo tender  $l_1$  para  $-\infty$  e  $l_2$  para  $+\infty$  e assim obter

$$\begin{aligned} B_1(\mathbf{r}) &= 0 \\ B_2(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{z}{y^2 + z^2} \right) \\ B_3(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{y}{y^2 + z^2} \right), \end{aligned} \tag{36}$$

para todo  $\mathbf{r}$  que não está no eixo  $X$ . Se  $\mathbf{r}$  está a uma distância  $a > 0$  do eixo  $X$ , teremos que a norma do campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  é  $\|\mathbf{B}(\mathbf{r})\| = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$  que é conforme a fórmula mostrada em [1, 2].

Por outro lado, para calcular o rotacional (24) temos  $B_{3x} = 0$ ,  $B_{2x} = 0$  e  $B_{3y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{z^2 - y^2}{(y^2 + z^2)^2} \right)$  e  $B_{2z} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{y^2 - z^2}{(y^2 + z^2)^2} \right)$ . Com isto, pela fórmula (24), o rotacional para este caso é o vetor nulo, isto é:

$$\text{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = (0, 0, 0), \tag{37}$$

para todo  $\mathbf{r}$  que não esteja no eixo  $X$ . Então a integral (21) é nula e portanto  $i_{desloc} = 0$ . A Lei de Ampere para este caso é

$$\mu_0 i_{encerr} = \oint_C \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma}) \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \mu_0 i \tag{38}$$

conforme os livros texto [1, 2] e outros utilizados fora do Brasil tal como [11].

### 6. Conclusões

Neste artigo estudamos a Lei de Ampere utilizando o Teorema de Stokes e algumas outras técnicas e fórmulas ensinadas em disciplinas de Cálculo. Este estudo foi focado principalmente em condutores de comprimento finito e comparado depois à Lei de Ampere no condutor infinito. As consequências desta abordagem são:

- No caso do condutor finito, a integral de linha resulta em  $\mu_0 i_{encerr} < \mu_0 i$ , equações (14) e (18), que mostra claramente a diferença entre a corrente encerrada  $i_{encerr}$  por  $C$  e a corrente  $i$  que efetivamente atravessa uma seção transversal do condutor.

- No caso do condutor infinito a integral de linha resulta em  $\mu_0 i_{encerr} = \mu_0 i$ , equação (38). A explicação objetiva desta igualdade é a nulidade do rotacional de  $\mathbf{B}$  equação (37).
- A definição de corrente de deslocamento, equação (21), foi baseada na análise das unidades físicas da fórmula de Stokes (20). Com os mesmos níveis de conhecimento de cálculo dos textos [3, 4] e um pouco de conhecimento das identidades Maxwellianas tais como  $\rho =$  densidade volumétrica de carga [coulomb/m<sup>3</sup>],  $\mathbf{J} =$  densidade de corrente [ampere/m<sup>2</sup>], etc., podemos verificar que esta definição de corrente de deslocamento (21) é compatível com a equação de Ampere-Maxwell

$$\oint_C \mathbf{B}(\gamma) \cdot d\gamma = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

pois

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (\operatorname{div} \mathbf{J}) = \operatorname{div} \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

que implica que  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$ . Então, utilizando a igualdade  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , obtemos

$$i_{desloc} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

## Agradecimentos

O autor gostaria agradecer o revisor anonimo deste artigo pelos comentários e valiosas sugestões que ajudaram a melhorar o mesmo.

## Referências

- [1] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física – Eletromagnetismo* (LTC, Rio de Janeiro, 2016), 10 ed.
- [2] P.A. Tipler e G. Mosca, *Física para cientistas e engenheiros* (LTC, Rio de Janeiro, 2009), v. 2, 6 ed.
- [3] H. Anton, I. Bivens e S. Davis, *Cálculo: Novos horizontes* (Bookman, Porto Alegre, 2014), v. 2, 10 ed.
- [4] J. Stewart, *Cálculo* (CENGAGE Learning, São Paulo, 2016) v. 2, 8 ed.
- [5] T. Charitat e F. Graner, *European Journal of Physics* **24**, 267 (2003).
- [6] D. Barchiese, *European Journal of Physics* **35**, 038001 (2014).
- [7] H. van Hees, *European Journal of Physics* **35**, 058001 (2014).
- [8] B. Morvay e L. Pálfalvi, *European Journal of Physics* **36**, 065014 (2015).
- [9] K. Aledealat e C. Duston, *European Journal of Physics* **39**, 045204 (2018).
- [10] www.wolframalpha.com
- [11] R. Shankar, *Fundamentals of Physics II: Electromagnetism, Optics, and Quantum Mechanics* (Yale University Press, New Haven, 2020).