Constantes de Movimento para um Potencial Dependente da Velocidade

(Constants of motion for a velocity-dependent potential)

A. S. de Castro*(1), E. L. Marchesetti (1), A. Feldt (2)

(1) UNESP - Campus de Guaratinguetá, Departamento de Física e Química

Caixa Postal 205, 12500-000 Guaratinguetá SP

(2) Fachhochschule Karlsruhe, Moltkestrasse 4, 76133 Deutschland

Recebido em 3 janeiro, 2001. Aceito em 6 de março, 2002.

Simetrias geométricas contínuas para um sistema fechado de partículas são investigadas. Por suposto, as interações são deriváveis de uma função potencial dependente das velocidades das partículas. Tanto os vínculos sobre a forma da função potencial quanto os princípios de conservação resultantes das simetrias espaço-temporais contínuas são derivados. A lagrangiana de Darwin é utilizada como ilustração para o caso do movimento lento de cargas elétricas na formulação de Maxwell-Lorentz da eletrodinâmica clássica. O momento linear, o momento angular e a energia, quantidades dependentes de calibre, são obtidos.

(Geometric continuous symmetries for a closed system of particles are investigated. It is supposed that the interactions are derivable from a velocity-dependent potential. Both the constraints on the form of the potential and the conservation principles resulting from the continuous space-time symmetries are derived. Darwin´s Lagrangian is used as an illustration for the case of electric charges in slow motion in Maxwell-Lorentz´s formulation of classical electrodynamics and the gauge-dependent linear momentum, angular momentum and energy are obtained.)

I Introdução

Os princípios de simetria são ferramentas valiosas para o desenvolvimento de novas teorias físicas. Por outro lado, para se obter a evolução temporal do estado de um sistema torna-se necessário integrar as equações de movimento. Em certas ocasiões, tal tarefa não pode ser realizada completamente. Nessas situações os princípios de simetria tornam-se úteis na investigação da estrutura de tais teorias e na identificação das constantes de movimento, as quais representam uma valiosa fonte de informação para a compreensão, ainda que parcial, da evolução temporal de um sistema físico. Em mecânica clássica, por exemplo, as equações diferenciais de movimento são de segunda ordem no tempo e, conseqüentemente, duas integrações para cada equação diferencial têm que ser executadas para se obter a solução completa do problema. Nesse processo duas constantes arbitrárias e independentes são obtidas, duas delas para cada equação diferencial. Se todas essas constantes de movimento puderem ser determinadas, se obterseá, então, a solução completa do problema. Ainda que o processo completo não ocorra, cada constante de movimento encontrada representa um passo em direção à solução completa e, conseqüentemente, a uma melhor informação a respeito do movimento. Supondo-se que a dinâmica de partículas interagindo mutuamente possa ser descrita por uma função potencial que depende explicitamente das posições das partículas e do tempo, os princípios de simetria impõem certos vínculos sobre a estrutura de tal função potencial, e além disso os importantes princípios de conservação do momento linear, momento angular e energia podem ser obtidos em conexão com as propriedades do espaço e do tempo [1]-[4].

A importância da consideração de um potencial dependente das velocidades das partículas é evidente do familiar exemplo eletromagnético. A suposição de que as partículas interagem mutuamente via um potencial dependente da velocidade geralmente implica que a terceira lei de Newton falha, e o momento linear e o momento angular não são mais constantes de movimento, pelo menos em suas formas ordinárias. O mesmo pode-se afirmar a respeito da energia do sistema. Esse problema clama naturalmente por uma generalização. Além disso, uma nova simetria não relacionada com o espaço-tempo surge nesse cenário. Em um trabalho anterior este problema foi abordado para

*E-mail: castro@feg.unesp.br

o caso de invariância sob translação espacial [5]. O propósito do presente trabalho é apresentar uma generalização deste tópico, usando como ilustração um sistema de partículas em movimento lento interagindo de acordo com a eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz.

II Simetria espaço-temporal

Vamos considerar um sistema de N partículas no espaço tridimensional admitindo, *ab initio*, que as forças são deriváveis de uma função potencial $U(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$ pela prescrição

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

onde $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$ são a posição e a velocidade da i-ésima partícula no tempo t. Uma notação compacta equivalente a essa encontrada na Ref. [1] é introduzida para lidar com a pletora de $\boldsymbol{\nabla}$ que aparecem por todo este trabalho. $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}$ e $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i}$ são simplesmente abreviações para $\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i}\right)$ e $\left(\frac{\partial U}{\partial v_{x_i}}, \frac{\partial U}{\partial v_{y_i}}, \frac{\partial U}{\partial v_{z_i}}\right)$, respectivamente.

Para um potencial dependente da velocidade que é, no máximo, uma função quadrática nas velocidades das partículas, como esse usado para descrever o movimento de partículas eletricamente carregadas, pode-se escrever

$$U = U_2 + U_1 + U_0 \tag{2}$$

onde

$$U_2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\left(a_{ij}\,\mathbf{v}_i{\cdot}\mathbf{v}_j + \mathbf{b}_{ij}\cdot\mathbf{v}_i\,\mathbf{c}_{ij}\cdot\mathbf{v}_j\right) \tag{3}$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{d}_i\cdot\mathbf{v}_i \tag{4}$$

$$U_0 = c_0 \tag{5}$$

Os coeficientes a_{ij}, $\mathbf{b}_{ij}$, $\mathbf{c}_{ij}$, $\mathbf{d}_i$ e c_0 são funções das posições e do tempo e a_{ij}, $\mathbf{b}_{ij}$ e $\mathbf{c}_{ij}$ são simétricos nos índices i and j.

As equações de Newton para o sistema que estamos considerando são

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \tag{6}$$

onde $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i$ é o momento linear da i-ésima partícula e m_i é sua massa.

Alternativamente, o sistema pode ser descrito pela lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$, que satisfaz as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{0} \tag{7}$$

com $\mathcal{L}$ dado por sua forma padrão $\mathcal{L} = T - U$. Aqui $T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^2$ é a energia cinética do sistema. Definindo-se o momento linear generalizado, ou momento linear canônico, por

$$\mathbf{P}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_i}\ , \tag{8}$$

as equações de Lagrange podem ser reescritas como

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i}\ . \tag{9}$$

Vamos, agora, considerar a seguinte transformação infinitesimal

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i, \qquad \mathbf{v}_i \to \mathbf{v}_i + \delta\mathbf{v}_i, \qquad t \to t + \delta t \tag{10}$$

Esta transformação induz uma variação na lagrangiana dada, em primeira ordem em $\delta\mathbf{r}_i$, $\delta\mathbf{v}_i$ e δt, por

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i}\cdot\delta\mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_i}\cdot\delta\mathbf{v}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\delta t \tag{11}$$

Usando as equações de Lagrange, obtemos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\delta t \tag{12}$$

Escrevendo a derivada temporal parcial de $\mathcal{L}$ em termos de sua derivada temporal total, temos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{v}_i - \mathcal{L}\right)\delta t \tag{13}$$

Agora postulamos que a transformação dada por (10) é uma transformação de simetria do sistema, *i.e.*, que as equações de Lagrange são invariantes sob tal transformação. Além disto, também postulamos que $\mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$ é também invariante ($\delta\mathcal{L} = 0$), de modo que

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{v}_i - \mathcal{L}\right)\delta t = 0 \tag{14}$$

Eqs. (11) e (14) são as expressões desejadas para prescrever os vínculos sobre a forma da lagrangiana e obter as constantes de movimento relacionadas às transformações de simetria contínuas. Para ilustrar este ponto, consideraremos as simetrias de translação espacial, rotação espacial e translação temporal.

É cabível lembrar que a simetria espaço-temporal considerada aqui é simplesmente um caso especial. É um caso particular de um caso mais geral abraçado pelo teorema de Noether, que afirma que a toda simetria contínua, geométrica ou não, existe uma constante de movimento [6]. Uma tranformação contínua finita pode ser obtida por meio de uma sucessão de transformações infinitesimais.

II.1 Translação espacial

A homogeneidade do espaço significa que todos os pontos do espaço são indistinguíveis. Conseqüentemente, as propriedades de um sistema fechado não se modificam quando ele é rigidamente transladado no espaço. Em outras palavras, uma translação espacial rígida é uma transformação de simetria.

Vamos considerar a translação espacial rígida infinitesimal

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}, \qquad \delta \mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \qquad \delta t = 0 \tag{15}$$

onde $\delta \mathbf{r}$ é um deslocamento infinitesimal independente do tempo comum a todos os vetores posição $\mathbf{r}_i$. A invariância espaço-translacional requer que a lagrangiana, sendo independente da escolha da origem dos vetores posição, satisfaça

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) = \mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) \tag{16}$$

ou equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \tag{17}$$

Inserindo (15) na expressão geral (14), e levando em consideração que $\delta \mathbf{r}$ é arbitrário, obtemos

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i = \mathbf{0} \tag{18}$$

Isto, junto com (8), significa que

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i} = const. \tag{19}$$

onde $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$ é o momento linear ordinário do sistema e $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i$ é o momento linear generalizado do sistema.

O princípio de simetria sob translações espaciais impõe um certo vínculo sobre a forma da lagrangiana do sistema dado por (16) ou (17), e como conseqüência o momento linear generalizado é uma constante do movimento. Além disso, substituindo (8) em (18), obtemos

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i} \tag{20}$$

que mostra uma violação da igualdade entre ação e reação (terceira lei de Newton na forma fraca: $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$) no caso geral.

II.2 Rotação espacial

A idéia da isotropia do espaço pressupõe que todas as direções do espaço são equivalentes. Este fato acarreta que as propriedades de um sistema fechado são invariantes sob uma rotação rígida. Uma rotação rígida é, então, uma transformação de simetria para um sistema fechado.

Vamos considerar uma rotação infinitesimal

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta\phi\, \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i, \qquad \delta \mathbf{v}_i = \delta\phi\, \mathbf{n} \times \mathbf{v}_i, \qquad \delta t = 0 \tag{21}$$

onde $\delta\phi$ é um ângulo de rotação independente do tempo e infinitesimal, e $\mathbf{n}$ é um vetor unitário cuja direção é igual a essa do eixo de rotação. Neste caso, o postulado de invariância requer a seguinte condição sobre a lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_i + \delta\phi\, \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i + \delta\phi\, \mathbf{n} \times \mathbf{v}_i, t) = \mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) \tag{22}$$

ou equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \delta \mathbf{v}_i \right) = 0 \tag{23}$$

A Eq. (21) junto com (14), levando-se em consideração que $\delta\phi$ é arbitrário, fornece

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = 0 \tag{24}$$

Permutando os termos deste produto, e considerando que $\mathbf{n}$ é também arbitrário, obtemos

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \mathbf{0} \tag{25}$$

Usando-se (8), isso reduz-se a

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i} = const \tag{26}$$

onde $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ é o momento angular ordinário do sistema e $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i$ é o momento angular generalizado do sistema.

Vemos, por conseguinte, que a invariância sob rotações espaciais demanda que a lagrangiana tenha a forma ditada por (22) ou (23), o que dá surgimento à conservação do momento angular. Além disso, substituindo-se (8) em (25) e usando-se o fato que $\mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$, resulta que

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i} \tag{27}$$

Como regra geral Eq. (27) mostra uma falha na terceira lei de Newton na forma forte $\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}\right)$.

II.3 Translação temporal

As propriedades de um sistema fechado não se modificam sob uma translação temporal. Esta simetria segue da homogeneidade do tempo, que afirma que todos os instantes são equivalentes.

A invariância sob translação temporal, *i.e.*

$$\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{0}, \qquad \delta\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \qquad \delta t \neq 0 \tag{28}$$

significa que

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t + \delta t) = \mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) \tag{29}$$

isso acontece se a lagrangiana não tiver qualquer dependência temporal explícita, *i.e.*, se o tempo aparecer somente implicitamente na variação temporal das posições e velocidades das partículas do sistema:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \tag{30}$$

Usando Eqs. (28) e (14), e considerando que δt é arbitrário, encontramos

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{v}_i - \mathcal{L}\right) = 0 \tag{31}$$

Isto implica, usando-se (8), que

$$E = T + U - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{v}_i = const \tag{32}$$

é a energia generalizada do sistema.

Para potenciais quadráticos nas velocidades temos

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{v}_i = U + U_2 - U_0 \tag{33}$$

de modo que a energia generalizada pode ser escrita na forma

$$E = T + U_0 - U_2 \tag{34}$$

onde U_2 e U_0 são dados por (3) e (5), respectivamente. Observe que isto é a geneneralização de $E = T + U_0$ para potenciais ordinários, e que o termo linear nas velocidades não contribui para a energia generalizada.

III Uma simetria interna

Agora, suponha que

$$U \to U + \dot{\Theta} \tag{35}$$

onde $\Theta = \Theta(\mathbf{r}_i, t)$ é uma função arbitrária das posições e do tempo. Isso acarreta que a lagrangiana transforma-se de acordo com

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \dot{\Theta}, \tag{36}$$

e o princípio de Hamilton ($\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$) assegura que as equações de movimento são inafetadas, *i.e.*, a transformação (35) é uma transformação de simetria. A mesma conclusão pode também ser obtida por substituição direta de (36) nas equações de Lagrange. Neste ponto pode-se observar que a demanda de que a lagrangiana seja invariante é muito restritiva.

Agora é oportuno perguntar como essa transformação afeta as constantes de movimento generalizadas obtidas nas seções precedentes. Sob a transformação (35) obtemos

$$\mathbf{P} \to \mathbf{P} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \mathbf{v}_i} \tag{37}$$

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L} - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \mathbf{v}_i} \tag{38}$$

$$E \to E + \dot{\Theta} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{v}_i \tag{39}$$

A derivada temporal total de Θ é

$$\dot{\Theta} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial \Theta}{\partial t} \tag{40}$$

portanto

$$\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{41}$$

e podemos escrever (37)-(39) como

$$\mathbf{P} \to \mathbf{P} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{42}$$

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L} - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{43}$$

$$E \to E + \frac{\partial \Theta}{\partial t} \tag{44}$$

Devido ao fato de que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L} - \dot{\Theta}$ descrevem a mesma física – a grandeza Θ não é uma grandeza física observável e pode assim ser escolhida arbitrariamente – exceto por que $\dot{\Theta}$ deve ter a mesma estrutura matemática que $\mathcal{L}$ para serem preservadas as simetrias do sistema descritas por ambas lagrangianas. Se isso ocorre, as constantes de movimento generalizadas geralmente dependerão da escolha de Θ e, portanto, não serão quantidades físicas mensuráveis. Apesar disso, não há um total enfraquecimento da importância de tais constantes de movimento, tendo em vista que, mesmo que elas não sejam quantidades físicas mensuráveis, ainda serão úteis como primeiras integrais de movimento.

IV A lagrangiana de Darwin

Na formulação de Maxwell-Lorentz da eletrodinâmica clássica, as N partículas carregadas de um sistema fechado estão sujeitas a forças de Lorentz

$$\mathbf{F}_i = q_i\mathbf{E} + q_i\mathbf{v}_i \times \mathbf{B} \tag{45}$$

onde q_i é a carga elétrica da i-ésima partícula. Os campos elétrico e magnético nas posições das partículas no tempo t, $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}_i, t)$, respectivamente, podem ser expressos em termos dos potenciais escalar e vetor, $\phi(\mathbf{r}_i, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$, respectivamente, por

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}_i} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{46}$$

$$\mathbf{B} = \nabla_i \times \mathbf{A} \tag{47}$$

O campo eletromagnético e a força de Lorentz são invariantes sob a chamada transformação de calibre

$$\phi \to \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{48}$$

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla_i\Lambda \tag{49}$$

onde Λ é uma função arbitrária dependente das posições das partículas e do tempo.

Para cargas em movimento lento Darwin derivou uma lagrangiana contendo somente as coordenadas e as velocidades retendo termos somente até a ordem ${\mathbf{v}_i}^2/c^2$ [7]-[9]. É oportuno mencionar que, além da tradicional aplicação de tal lagrangiana em física atômica [10]-[14], há também aplicações em física de plasmas [15]-[22], modelos de supercondutividade [19]-[20] e astrofísica [19].

O modo de se obter a lagrangiana de Darwin é considerado, com brevidade, como segue. A lagrangiana geral para um sistema consistindo de N partículas carregadas é a simples extensão da lagrangiana para uma partícula carregada em um campo eletromagnético externo:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \left[\phi\left(\mathbf{r}_i, t\right) - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}\left(\mathbf{r}_i, t\right)\right] \tag{50}$$

onde os potenciais escalar e vetor na posição da i-ésima partícula são devidos as outras $N-1$ partículas do sistema. Quando da eliminação dos potenciais da lagrangiana acima, temos que considerar que existirão, em geral, correções relativísticas para ambos ϕ e $\mathbf{A}$, como pode ser deduzido dos potenciais de Liénard-Wiechert. Contudo, o potencial coulombiano

$$\phi = \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \tag{51}$$

será dado corretamente para todas as ordens em $\mathbf{v}_i/c$ se o calibre de Coulomb ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$) for utilizado. Aqui $\mathbf{r}_{ij}$ significa a posição relativa $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ e ϵ_0 é a permissividade do vácuo. No calibre de Coulomb o potencial vetorial, acurado até $\mathbf{v}_i/c$, é

$$\mathbf{A} = \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{8\pi\epsilon_0 c^2 r_{ij}} \left(\mathbf{v}_j + \frac{\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2}\mathbf{r}_{ij}\right) \tag{52}$$

Substituindo (51) e (52) em (48), obtemos a lagrangiana de Darwin

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j + \frac{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{r}_{ij}\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2}\right)\right] \tag{53}$$

e podemos identificar a função potencial como

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j + \frac{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{r}_{ij}\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2}\right)\right] \tag{54}$$

Neste ponto nós investigamos a estrutura matemática da lagrangiana de Darwin para verificar se ela satisfaz os requerimentos impostos pelas simetrias espaço-temporais contínuas. De relance, pode-se notar que a lagrangiana de Darwin é invariante sob translações temporais simplesmente porque ela não tem qualquer dependência temporal explícita. Ela depende dos vetores posição das partículas por $\mathbf{r}_{ij}$ e, assim, ela é inafetada por translações espaciais rígidas. A verificação da invariância rotacional não é tão imediata. Nas seguintes transformações, somente os termos de primeira ordem em $\delta\phi$ serão mantidos. Sob a rotação espacial (21) a posição relativa transforma-se como $\mathbf{r}_{ij} \to \mathbf{r}_{ij} + \delta\phi\, \mathbf{n} \times \mathbf{r}_{ij}$; portanto, usando o fato que $\mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_{ij}) = 0$, obtemos

$$r_{ij} \to r_{ij} \tag{55}$$

enquanto $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_{ij} \to \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_{ij} + \delta\phi\, [\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_{ij}) + \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}_i)]$. Devemos também considerar o termo $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ e neste caso temos $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \to \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j + \delta\phi\, [\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}_j) + \mathbf{v}_j \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}_i)]$. Ambas as transformações, permutando os termos no produto triplo, conduzem a

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_{ij} \to \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_{ij} \tag{56}$$

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \to \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \tag{57}$$

Finalmente (55), (56) e (57), permite-nos concluir que a lagrangiana de Darwin também é invariante sob rotações.

Para se encontrar as constantes de movimento relacionadas às invariâncias espaço-temporais contínuas, nós consideramos o cálculo de $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i}$. Com a identidade vetorial para $\boldsymbol{\nabla}\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ podemos escrever

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i} = -\sum_{j \neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{8\pi\epsilon_0 c^2 r_{ij}} \left(\mathbf{v}_j + \frac{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \mathbf{r}_{ij} \right) \tag{58}$$

Então, (52) pode ser utilizada para fornecer

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}_i} = -q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \tag{59}$$

O momento linear, o momento angular e a energia generalizados podem agora ser escritos como

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \tag{60}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} + \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \tag{61}$$

$$E = T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \left[\phi(\mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \right] \tag{62}$$

Portanto, pode-se identificar o momento linear, o momento angular e a energia de origem eletromagnética como

$$\mathbf{P}_{em} = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \tag{63}$$

$$\mathbf{L}_{em} = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \tag{64}$$

$$E_{em} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \left[\phi(\mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \right] \tag{65}$$

Sob uma transformação de calibre, a lagrangiana de Darwin e a função potencial transformam-se como $\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \dot{\Theta}$ e $U \to U + \dot{\Theta}$, respectivamente, onde $\Theta = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \Lambda$. Portanto, estas últimas quantidades eletromagnéticas são dependentes de calibre e, assim, são também as quantidades conservadas generalizadas.

V Conclusão

Mostramos que um potencial dependente da velocidade pode ser facilmente abordado no formalismo lagrangiano. Baseados na invariância espaço-temporal contínua, nós obtivemos não somente os vínculos sobre a forma da lagrangiana, mas também os importantes princípios de conservação do momento linear, momento angular e energia. Essas constantes de movimento generalizadas não são geralmente quantidades mensuráveis mas isso não representa nenhuma desvantagem na busca para uma melhor compreensão da evolução temporal de um sistema físico.

A teoria eletromagnética clássica de Maxwell-Lorentz foi considerada neste trabalho como ilustração, e mostramos que o momento linear, o momento angular e a energia são quantidades dependentes de calibre.

Poderíamos também ter abordado as simetrias geométricas discretas, tais como a paridade e a reversão temporal, para obter restrições adicionais sobre a forma da lagrangiana. Preferimos deixar este tópico como um exercício para os leitores, incluindo, é claro, a verificação da invariância da lagrangiana de Darwin.

Agradecimentos

Um dos autores (ASC) é grato à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] E. C. G. Sudarshan e N. Mukunda, *Classical Dynamics A Modern Perspective*, Wiley, New York (1974) pp. 154-155.

[2] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood, New York, vol. 1 (1981) pp. 178-179.

[3] J. W. Norbury, Eur. J. Phys. **9**, 297 (1988).

[4] A. S. de Castro, Phys. Ed. (India) **9**, 29 (1992).

[5] A. S. de Castro e S. A. de Paula, Phys. Ed. (India) **10**, 74 (1993).

[6] Veja, *e.g.*, F. W. Byron e R. W. Fuller, *Mathematics of Classical Mechanics and Quantum Physics*, Addison-Wesley, Reading, vol. 1 (1969) pp. 72-80.

[7] C. G. Darwin, Phyl. Mag. **39**, 537 (1920).

[8] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1975) pp. 165-168.

[9] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 2a. ed. (1975) pp. 593-595.

[10] G. Breit, Phys. Rev. **39**, 616 (1932).

[11] H. A. Bethe e E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*, Plenum, New York (1977).

[12] J. de Luca, Phys. Rev. E **58**, 5727 (1998).

[13] J. de Luca, Phys. Rev. Lett. **80**, 680 (1998).

[14] J. de Luca, Phys. Rev. E **62**, 2060 (2000).

[15] A. N. Kaufman e T. Soda, Phys. Rev A **136**, 1614 (1964).

[16] A. N. Kaufman e P. S. Rostler, Phys. Fluids **14**, 446 (1971).

[17] C. W. Nielson e H. R. Lewis, in *Methods in Computational Physics*, editado por J. Killeen, Academic, New York (1976), vol. 16, pp. 367-388.

[18] D. Q. Ding, L. C. Lee e D. W. Swift, J. Geophys. Res. **97**, 8453 (1992).

[19] H. Essén, Phys. Rev. E **53**, 5228 (1996).

[20] H. Essén, Phys. Rev. E **56**, 5858 (1997).

[21] H. Essén, J. Phys. A **32**, 2297 (1999).

[22] V. Mehra e J. de Luca, Phys. Rev. E **61**, 1199 (2000).