

# Sobre a importância do modelo de Veneziano para a teoria de cordas (Concerning the importance of Veneziano model for string theory)

D.A. Magalhães<sup>1</sup>

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil

Recebido em 20/2/2013; Aceito em 1/5/2013; Publicado em 15/10/2013

O objetivo deste texto é discutir a importância da amplitude de Veneziano para a teoria de cordas. Apresentam-se algumas motivações que levaram à construção dos modelos duais. Em seguida, a amplitude proposta por Veneziano é discutida juntamente com a hipótese da dualidade, a qual foi imprescindível para o trabalho desse físico. Mostra-se como a amplitude de Veneziano satisfaz ao requisito da dualidade e a alguns dos postulados do método da Matriz S. Ao final, é discutido como o trabalho de Veneziano marca o nascimento da teoria de cordas.

**Palavras-chave:** modelos duais, amplitude de Veneziano, teoria de cordas.

The purpose of this paper is to discuss the importance of the Veneziano amplitude for string theory. We present some motivations for the construction of dual models. Then, the amplitude proposed by Veneziano is discussed along with the hypothesis of duality, which was essential for our work. We show how the Veneziano amplitude satisfies the requirement of duality and some of the postulates of the S Matrix method. At the end, we discuss how the work of Veneziano marks the birth of string theory.

**Keywords:** dual models, Veneziano amplitude, string theory.

## 1. Introdução

No início de década de 60, foi-se observado um enorme número de hádrons, partículas que interagem segundo a cromodinâmica quântica [1–4], mas que era uma interação diferente das conhecidas na época. Buscou-se por um modelo que fosse capaz de descrever as interações fortes. A teoria quântica de campos teve êxito em descrever fenômenos quânticos do eletromagnetismo, tal como a determinação do momento magnético do elétron [5] e descobertas acerca da estrutura fina do átomo de hidrogênio [6–10]. Por outro lado, não obteve o mesmo sucesso na descrição das interações fortes: primeiro devido à grande quantidade de hádrons encontrados, o que, de fato, como veremos, não era um problema, mas isto era tido como inviável por exigir uma igual quantidade de campos; em segundo lugar, muitos dos hádrons encontrados possuíam spin maior do que 1 e não se sabe como construir uma teoria quântica de campos que seja consistente perturbativamente para partículas massivas com esse spin. Isso fez com que a comunidade tentasse outros caminhos, tal como a abordagem da Matriz S.

Historicamente, a ideia da Matriz S surgiu em 1943 através do trabalho de Heisenberg [11], a qual relaciona os estados inicial  $|i\rangle$  e final  $|f\rangle$  de um sistema físico em

processo de espalhamento. Cada elemento da matriz S  $\langle f|S|i\rangle \equiv S_{if}$  é uma amplitude de espalhamento. As seções de choque e tempos de meia vida, quantidades mensuráveis em laboratório, são dadas em termos dessas amplitudes de espalhamento [12, 13]. Os pólos das amplitudes de espalhamento para partículas que interagem fortemente aparecem na teoria como ressonâncias, partículas instáveis cujo tempo de meia vida é da ordem de  $10^{-24}$ s. Os elementos  $S'_{if}$  correspondem à amplitude de probabilidade que a mecânica quântica atribui à reação  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ . De acordo com a abordagem do método da Matriz S, as expressões  $S'_{if}$  devem satisfazer a uma série de postulados: o comportamento assintótico, a simetria de cruzamento, a fatoração e a unitariedade [14, 15], dentre outros que não serão discutidas neste texto.

Com a pura exigência dos postulados do método da Matriz S, foi difícil encontrar uma classificação das partículas detectadas experimentalmente e que interagiam fortemente. Então, houve nessa mesma época um outro método para classificar as partículas que interagem fortemente. Esta outra abordagem estava baseada na teoria de grupos [16, 17], cujo método não será discutido neste texto.

A propriedade que acabou tornando o método da

<sup>1</sup>E-mail: diogo\_amagalhaes@yahoo.com.br.

Matriz S uma ferramenta concreta e de interesse físico foi a hipótese de dualidade, descoberta experimentalmente por Dolen, Horn e Schmid [18,19]. A partir disso os modelos provenientes do método da Matriz S e da hipótese de dualidade ficaram conhecidos como “modelos duais”.

Em maio de 2007, em Florença (Itália) houve uma conferência<sup>2</sup> que levou o nome *The Birth of String Theory*, na qual participaram muitos dos físicos que deram importantes contribuições no desenvolvimento dos modelos duais. Este evento foi uma das motivações deste trabalho; também foi motivação a referência [20], dedicada aos Modelos Duais, a qual consiste em uma recompilação de época de artigos de revisão de físicos que trabalharam com esses modelos. Nesta recompilação encontra-se a contribuição [14], a qual é referida em alguns lugares deste trabalho.

Inicialmente apresentamos algumas motivações que levaram à construção dos modelos duais. Em seguida, discutimos a amplitude proposta por Veneziano [21] juntamente com a hipótese da dualidade [18,19], propriedade imprescindível para o surgimento do modelo de ressonância dual. Mostramos como a amplitude de Veneziano satisfaz ao requisito da dualidade e a alguns dos postulados da abordagem da Matriz S. Por fim, discutimos como o trabalho de Veneziano marca o nascimento da teoria de cordas.

## 2. Modelos Duais

Por definição, um modelo dual é baseado em teoria de espalhamento, a qual deve satisfazer aos postulados da Matriz S, num limite chamado de *narrow resonance approximation* (NRL) [14]. Nesse limite, num processo de espalhamento entre duas partículas é negligenciada a troca de mais de uma partícula ao mesmo tempo, o que, por sua vez, não significa impor qualquer tipo de restrição quanto à quantidade de partículas simples que podem ser trocadas.

Em 1959, Regge [22] observou uma relação linear entre o momento angular total  $J$  e a massa  $M$  de ressonâncias hadrônicas, as quais, num gráfico  $J \times M^2$ , correspondiam a valores inteiros ou semi-inteiros de  $J$ . Tais pontos foram denominados pólos de Regge; as trajetórias de Regge,  $\alpha(s)$ , eram as curvas que ligavam esses pontos, sendo elas trajetórias retilíneas

$$\alpha(s) = \alpha' s + \alpha_0, \quad (1)$$

onde  $\alpha'$  e  $\alpha_0$  são constantes determinadas experimentalmente e  $s$  é uma variável de Mandelstam, definida logo adiante. A comprovação que os pólos de Regge são pólos da Matriz S foi feita em 1961 por Chew e Frautschi [23].

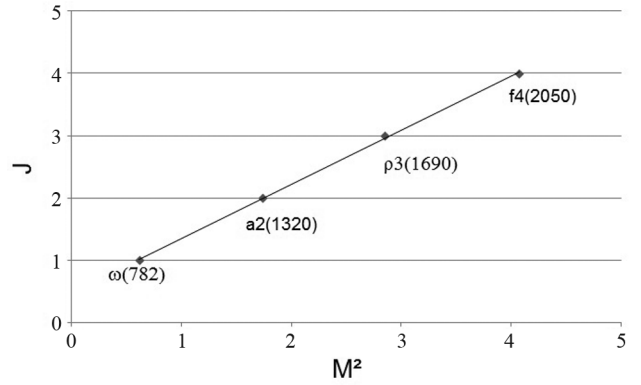


Figura 1 - Trajetória de Regge para a família de mésons leves.

Outro fato que guiou a construção dos modelos duais foi a observação acerca do comportamento assintótico para altas energias (ou comportamento de Regge) que a subamplitude  $S_a(s, t)$  deveria obedecer

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S_a(s, t) = 0. \quad (2)$$

Para compreendermos a Eq. (2), consideremos um processo de espalhamento de duas partículas indo para outras duas,  $1+2 \rightarrow 3+4$ , tal que as variáveis de Mandelstam sejam definidas por  $s \equiv (p_1 + p_2)^2$ ,  $t \equiv (p_1 + p_4)^2$  e  $u \equiv (p_1 + p_3)^2$ , onde  $p_i$  é o momento da  $i$ -ésima partícula e  $s + t + u = \sum_i M_i^2$ , onde  $M_i$  é massa da  $i$ -ésima partícula. Aqui, a variável  $s$  corresponde à energia medida a partir do centro de massa. Tomemos, então,  $s$  suficientemente grande e  $t$  fixo e consideremos a região física para um espalhamento elástico com  $s > 0$  e  $t < 0$ . A forma que a subamplitude dada na Eq. (2) deve se anular quando  $t$  é fixo e  $s \rightarrow \infty$  é dada por

$$S_a(s, t) \sim \Gamma(-\alpha(t))(-\alpha(s))^{\alpha(t)}, \quad (3)$$

onde  $\Gamma(u)$  é a função Gama de Euler, a qual é definida por

$$\Gamma(u) \equiv \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx, \quad (4)$$

com  $Re(u) > 0$ . Precisamos, aqui, da fórmula de Stirling para  $u$  grande

$$\Gamma(u) \sim \sqrt{2\pi} u^{u-1/2} e^{-u}. \quad (5)$$

Assim, para  $s$  grande e  $t$  fixo,  $\alpha(s) \sim \alpha' s$  e, utilizando a Eq. (1), segue que

$$S_a(s, t) \sim s^{\alpha' t + 1}. \quad (6)$$

Então, o limite dado pela Eq. (2) é satisfeito, pois para  $t$  suficientemente negativo tem-se que  $\alpha' t + 1 < 0$ .

Agora, analisemos como a Eq. (2) contém a informação que a teoria deve conter um número infinito de ressonâncias.

<sup>2</sup><http://theory.fi.infn.it/colomo/string-birth>. Foi organizada por A. Cappeli, E. Castellani, F. Colomo e P. Di Vecchia.

Em termos de uma soma sobre todos os  $J$ 's, a contribuição do canal  $t$ , em geral, pode ser escrita como

$$S_a(s, t) = - \sum_J \frac{g_J^2 P_J(s)}{t - \frac{M_J^2}{\alpha'}}, \quad (7)$$

onde,  $P_J$  é um polinômio de grau  $J$  em  $s$  e  $g_J$ 's são constantes de acoplamento. Se a soma do lado direito da Eq. (7) fosse finita, ela seria dominada pelo termo com maior potência em  $J$  e, assim, divergiria; entretanto, a Eq. (2) exclui esta possibilidade. Por outro lado, consideremos a expansão em série de potências da função  $e^{-x}$ , com  $x$  sendo real

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (8)$$

De fato,  $e^{-x} \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . Isto mostra que, mesmo sendo infinito o número de termos do lado direito da expansão, o resultado do lado esquerdo é finito e igual a 0. Dessa forma, um dos requisitos para a teoria é que ela contenha um número infinito de ressonâncias, o que não apresentava problema algum, visto que as ressonâncias hadrônicas eram observadas para spins cada vez maiores.<sup>3</sup> Notemos que esse resultado está de acordo com a definição de modelo dual no NRL; a experiência mostra que considerar ressonâncias cujas trajetórias de Regge são retilíneas ou próximas delas, dadas pela Eq. (1), torna viável tomar o NRL [14].

### 3. Dualidade e Amplitude de Veneziano

Ao se calcular a amplitude de espalhamento em um processo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , utilizando-se como ferramenta a teoria quântica de campos, a amplitude de espalhamento recebe contribuições dos canais  $s$  e  $t$ , conforme representa a Fig. 2.

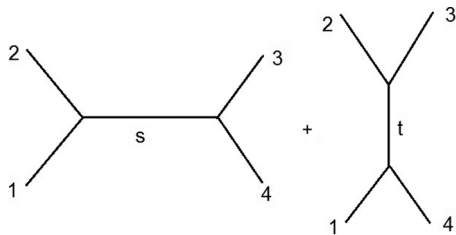


Figura 2 - Em teoria quântica de campos, a amplitude é construída como uma soma dos canais  $s$  e  $t$ .

Já no contexto dos modelos duais, a dualidade, um novo princípio físico descoberto experimentalmente por Dolen, Horn e Schmid [18, 19], diz que não se deve incluir as contribuições dos canais  $s$  e  $t$  simultaneamente na amplitude final, pois isto significaria realizar uma dupla contagem. Em outras palavras, os diagramas dos canais  $s$  e  $t$  fornecem descrições alternativas de um mesmo conteúdo físico, o qual se encontra nas massas das ressonâncias e nas constantes de acoplamento da

<sup>3</sup>Esta argumentação pode ser vista na Ref. [24], por exemplo.

teoria, conforme discutiremos na próxima seção. Graficamente, representamos a dualidade pela Fig. 3.

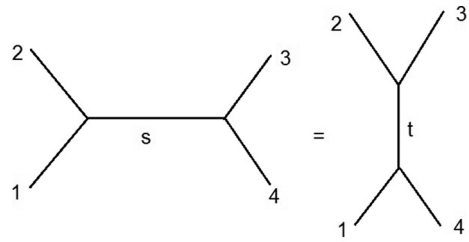


Figura 3 - A dualidade nos diz que a amplitude inclui simultaneamente as contribuições dos canais  $s$  e  $t$ .

Estudando o processo  $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$ , entre píons e ômega, Veneziano buscava por uma amplitude que descrevesse os dados observados até então, além de obedecer aos requisitos da Matriz S e também à dualidade. Veneziano [21] propôs a seguinte fórmula para o espalhamento de quatro partículas escalares:

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}. \quad (9)$$

Portanto, a dualidade nos permite escrever

$$B(s, t) = B(t, s). \quad (10)$$

Para que tenha sentido escrever a igualdade na Eq. (10), precisamos de sua extensão analítica, a fim de estendermos seu domínio de validade para uma região que não está contida na definição dada na Eq. (4); necessita-se, então, da continuação analítica da função Gama, a qual pode ser dada por

$$\Gamma(u) \equiv \int_1^\infty x^{u-1} e^{-x} dx + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n / n!}{u + n}. \quad (11)$$

Ela converge uniformemente em qualquer região cuja fronteira esteja a uma distância positiva do conjunto formado pelos inteiros negativos e a origem, os quais são pólos simples com resíduos  $(-1)^n / n!$ .

A teoria das variáveis complexas possui um teorema que diz que dada uma função com certas singularidades simples, ela é igual a qualquer outra função que possua as mesmas singularidades a menos de uma função inteira [25]. Portanto, utilizando a continuação analítica dada na Eq. (11), pode-se mostrar que, do ponto de vista da variável complexa  $v$ , a função Beta admite a seguinte expansão de Laurent, com  $\lim_{v \rightarrow \infty} B(u, v) = 0$

$$B(u, v) = \sum_{n=1}^\infty \left[ \frac{1}{v+n} \frac{(-1)^n}{n!} (u-1)(u-2) \dots \dots (u-n+1) \right] + \frac{1}{v}. \quad (12)$$

Logo, a amplitude de Veneziano fica reescrita como

$$\begin{aligned}
B(\alpha(t), \alpha(s)) &= \frac{1}{-\alpha(t)} + \frac{1}{-\alpha(t)+1} \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{1}{-\alpha(t)+1} \frac{(-1)^2}{2!} (-\alpha(s)-1) + \dots \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)-n} \frac{(\alpha(s)+1)\alpha(s)+2 \dots \alpha(s)+n}{n!} - \frac{1}{\alpha(t)} \\
&= \frac{P_0(s)}{\alpha(t)} + \frac{P_1(s)}{\alpha(t)-1} + \frac{P_2(s)}{\alpha(t)-2} + \dots
\end{aligned} \tag{13}$$

Os polinômios  $P_J(s)$  possuem grau  $J$  em  $s$ ; a Eq. (13) representa a amplitude de Veneziano em termos dos pólos em  $t$ . Nela, após lembrarmos da Eq. (1), fica evidente que os infinitos pólos de cada um dos canais de cada um dos canais da amplitude são simples; isto é importante, pois as amplitudes de espalhamento a nível de árvore somente apresentam pólos simples. Uma expressão análoga pode ser deduzida para a amplitude segundo os pólos no canal  $s$ , dada por

$$B(\alpha(s), \alpha(t)) = \frac{P_0(t)}{\alpha(s)} + \frac{P_1(t)}{\alpha(s)-1} + \frac{P_2(t)}{\alpha(s)-2} + \dots \tag{14}$$

Comparando as Eqs. (13) e (14) fica evidente que a amplitude de Veneziano expressa simultaneamente os pólos oriundos dos canais  $s$  e  $t$ : isto é a dualidade manifesta. Portanto, a amplitude total para um processo de espalhamento de quatro partículas escalares se restringe a uma soma de três termos

$$B(s, t, u) = B(s, t) + B(t, u) + B(u, s), \tag{15}$$

diferentemente do que seria obtido a partir da teoria quântica de campos, em que  $B(s, t, u)$  seria dada por uma soma de seis termos.

#### 4. Amplitude de Veneziano e Matriz S

Será discutida, a seguir, a relação da amplitude de Veneziano com as propriedades da Matriz S mencionadas: a simetria de cruzamento e a fatoração. A análise acerca do requisito do comportamento assintótico foi feita na segunda seção, tomando-se  $S_a(s, t)$  em lugar de  $B(s, t)$ .

Analisemos a primeira delas. A simetria de cruzamento permite que a amplitude para um processo que ocorre no canal  $s$  cuja região física é dada por  $s > 0$  e  $t, u < 0$ , seja analiticamente continuada para a região  $t > 0$  e  $s, u < 0$ , fornecendo a amplitude para o processo no canal  $t$ , o que nos leva a escrever  $B_{1+2 \rightarrow 3+4}(s, t) = B_{1+\bar{3} \rightarrow \bar{2}+4}(t, s)$ . A requisição de que a amplitude completa dada pela Eq. (15) possua simetria de cruzamento requer que ela descreva as reações  $1+2 \rightarrow 3+4$ ,  $1+\bar{3} \rightarrow \bar{2}+4$ ,  $1+\bar{4} \rightarrow \bar{2}+3$  e  $\bar{3}+\bar{4} \rightarrow \bar{1}+\bar{2}$

em diferentes regiões para as variáveis  $s, t$  e  $u$ . Assim, fazendo qualquer troca entre as variáveis  $s, t$  e  $u$ , nota-se que a amplitude dada em (15) permanece a mesma.

A primeira importância da propriedade de fatoração é a obtenção da informação das massas das partículas que participam nas interações de uma teoria através da análise dos pólos simples da amplitude. A partir das Eqs. (13) e (1), temos que  $M^2 = \frac{n - \alpha_0}{\alpha'}$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Por sua vez, os resíduos nos respectivos pólos dão a informação dos spins das partículas da teoria, apesar desta informação não ser suficiente para determinar completamente seu espectro.

Tem-se até aqui, um cenário otimista na descrição das interações fortes. A amplitude proposta por Veneziano satisfaz a alguns dos requisitos da Matriz S, além de conter naturalmente a dualidade, garantindo a não contagem dupla dos pólos provenientes de  $s$  e  $t$  simultaneamente. Todavia, alguns dos requisitos da Matriz S não eram satisfeitos pela amplitude de Veneziano, tal como a unitariedade. A amplitude de Veneziano não satisfazia à propriedade da unitariedade porque não considerou *loops*, trabalhando-se somente com diagramas a nível de árvore. Todavia, com a intenção de contornar este problema, a amplitude foi calculada posteriormente levando-se em conta os diagramas com *loops* [26], os quais demandaram que a teoria, para ser consistente, precisava ser formulada em uma dimensão do espaço-tempo  $D = 26$  [27].

#### 5. Considerações finais

Os modelos duais nasceram com o objetivo de descrever as interações fortes. Na prática, só se trabalhou com aqueles que consideravam o NRL, cujas trajetórias de Regge eram retilíneas. O modelo dual de Veneziano possuía uma riqueza grande de resultados, apesar do problema com a unitariedade; haviam também outros que não foram discutidos neste trabalho. Entre eles o comportamento da amplitude no chamado regime duro (*hard scattering*), em que a amplitude do modelo possui um comportamento assintótico diferente daquele vistos nas experiências de 1968 de SLAC (Centro do Acelerador Linear de Stanford), bem como as aparições de táquion na teoria. Isso tudo fez com que os modelos

duais fossem abandonados como possíveis candidatos a descrever as interações fortes. Vale ressaltar que a cromodinâmica quântica, a teoria que de fato descreve tais interações, foi proposta já na década de 70 por Gross, Wilczek e Politzer [1–4].

Apesar da desistência, o sucesso do trabalho de Veneziano em extrair as massas das partículas que o compõem, embora não se tivesse a informação completa do espectro da teoria, levou os físicos a buscar uma amplitude generalizada para a Eq. (9) para  $N$  partículas escalares [28] em termos do formalismo de operadores, cuja importância esta na interpretação do espectro completo da teoria quando a amplitude generalizada é fatorada. Nesse cenário, não faltaram motivações para se entender a teoria fundamental subjacente aos modelos duais.

Um resultado muito importante foi obtido no início da década de 70. Nambu [29], Nielsen [30] e Susskind [31], de forma independente, mostraram que o espectro de partículas encontrado nos modelos de ressonância dual e suas amplitudes de espalhamento podiam ser reproduzidas por objetos unidimensionais, as cordas relativísticas, cujas interações reproduziam a fórmula de Veneziano. E isto reflete a importância do trabalho de Veneziano para a teoria de cordas, marcando seu nascimento.

Não muito depois dos trabalhos de Nambu, Nielsen e Susskind, Nambu e Goto [32] propuseram uma fórmula para a ação da corda relativística como sendo a área da folha-mundo varrida por esta, a menos de uma constante. É possível recuperar alguns aspectos dos modelos duais, tal como a relação linear  $J \sim E^2$  para uma corda aberta rígida e girante. Por sua vez, Goddard, Goldstone, Rebbi e Thorn [33] quantizaram a corda livre descrita pela ação de Nambu e Goto. Eles constataram que tanto o espectro da corda quanto os estados físicos descritos são os mesmos daqueles obtidos na amplitude do modelo dual de Veneziano.<sup>4</sup>

Posteriormente, a teoria de cordas, tanto as abertas quanto as fechadas, foi proposta por Scherk e Schwarz [36] como uma teoria candidata a descrever todas as interações da natureza. Contudo, talvez não se tivesse esta perspectiva sem o trabalho de Veneziano.

## Agradecimentos

A Ricardo Medina por esclarecimentos que foram de ajuda para a elaboração deste trabalho. A Vladimir Pershin pela leitura da versão final deste texto.

## Referências

- [1] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [2] H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [3] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. D **8**, 3633 (1973).
- [4] H.D. Politzer, Phys. Rep., **14**, 129 (1974).
- [5] P. Kusch, Phys. Rev. **100**, 1188 (1955).
- [6] W.E. Lamb, Jr., and R.C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [7] W.E. Lamb, Jr., and R.C. Retherford, Phys. Rev. **79**, 549 (1950).
- [8] W.E. Lamb, Jr., and R.C. Retherford, Phys. Rev. **81**, 222 (1951).
- [9] W.E. Lamb, Jr., Phys. Rev. **85**, 259 (1952).
- [10] W.E. Lamb, Jr., and R.C. Retherford, Phys. Rev. **86**, 1014 (1952).
- [11] W. Heisenberg, Z. Physik. **120**, 513 (1943).
- [12] D.J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New Jersey, 2004) 2nd Ed.
- [13] M.E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, Colorado, 1995).
- [14] G. Veneziano, Phys. Reports **4**, 199 (1974).
- [15] G.F. Chew, *The Analytic S Matrix: A Basis for Nuclear Democracy* (W.A. Benjamin, New York, 1966).
- [16] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [17] G. Zweig, CERN-8182/Th.401 (1964) e CERN-8419/Th.412 (1964), ambos não publicados.
- [18] R. Dolen, D. Horn and C. Schmid. Phys. Rev. **166**, 1768 (1968).
- [19] C. Schmid, Phys. Rev. Lett. **20**, 689 (1968).
- [20] M. Jacob, *Dual Theory. Physics Reports Reprint Book Series.* (Elsevier, Amsterdam, 1974).
- [21] G. Veneziano, Nuovo Cimento A **57**, 190 (1968).
- [22] T.E. Regge, Nuovo Cimento **14**, 951 (1959).
- [23] G.F. Chew and S.C. Frautschi, Phys. Rev. Lett. **7**, 394 (1961).
- [24] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory, vol. 1* (Cambridge, New York) 1986.
- [25] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier, California, 2005), 6th ed.
- [26] K. Kikkawa, B. Sakita and M.A. Virasoro, Phys. Rev. **184**, 1701 (1969).
- [27] C. Lovelace, Phys. Lett. A **34**, 500 (1971).
- [28] Z. Koba and H.B. Nielsen. Nuc. Phys. B **12**, 517 (1969).
- [29] Y. Nambu, *Proc. Intern. Conf. on Symmetries and Quark Models*, Wayne State University (1969).
- [30] H.B. Nielsen, in: *Proc. 15th Intern. Conf. on High-Energy Physics*, Kiev (1970).
- [31] L. Susskind, Nuovo Cimento A **69**, 457 (1970).
- [32] T. Goto, Prog. Theor. Phys. B **46**, 1560 (1971).
- [33] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi e C.B. Thorn, Nucl. Phys. B **56**, 109 (1973).
- [34] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory* (Cambridge, New York, 2009) 2nd ed.
- [35] B. Polchinski, *String Theory, vol. 1, An Introduction to the Bosonic String* (Cambridge, New York, 2005).
- [36] J. Scherk and J. Schwarz, Nucl. Phys. B **81**, 118 (1974).

<sup>4</sup>A Ref. [34] apresenta aspectos clássicos e quânticos da corda aberta; já a Ref. [35] apresenta uma abordagem mais direta da quantização da corda aberta.