

A lei de Planck e a hipótese dos quanta de luz*

(Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese)

Satyandranath Bose

Publicado em *Zeitschrift für Physik* **26**, 178 (1924) (Springer Verlag)

Artigo recebido em 2 de julho de 1924

O artigo de Bose, aqui traduzido para o português, constitui-se em “um progresso importante”, usando as palavras do próprio Einstein, no que se refere ao desenvolvimento de uma teoria quântica da luz. Embora não afirme explicitamente, Bose supõe que os quanta de luz são indistinguíveis. Além disso, admite a hipótese, até então não aceita pela maioria da comunidade física, de que os fótons possuem impulso. Seu artigo inspirou Einstein, logo a seguir, a desenvolver sua teoria quântica do gás ideal. A estatística quântica de partículas de spin inteiro ficou, justamente, conhecida como estatística de Bose-Einstein.

Palavras-chave: teoria quântica da luz, quantum, física quântica.

Bose's paper, here translated into Portuguese, is “an important progress”, using Einsteins' words, so far as the development of the quantum theory of light is concerned. Although not explicitly stated, Bose admit that light quanta are indistinguishable. In addition, he admits the hypothesis, not widely accepted by physics community at that time, that photons carry on momentum. His paper inspired Einstein, in the sequel, to develop his quantum theory of ideal gas. The quantum statistics of integer spin particles is known, with justice, as Bose-Einstein statistics.

Keywords: quantum theory of light, quantum, quantum physics.

Divide-se o espaço de fase de um quantum de luz, correspondendo a um volume dado, em “células” de tamanho h^3 . O número de repartições possíveis dos quanta de luz de uma radiação definida macroscopicamente entre todas essas células dá a entropia e, por conseguinte, as propriedades termodinâmicas da radiação.

A fórmula de Planck relativa à repartição de energia para a radiação do corpo negro constitui o ponto de partida da teoria quântica; essa se desenvolveu durante os últimos vinte anos, e se revelou extremamente frutífera em todos os domínios da Física. Depois de sua publicação em 1901¹, numerosas maneiras de demonstrar essa lei foram propostas. Sabe-se que os pressupostos fundamentais da teoria quântica são incompatíveis com as leis da eletrodinâmica clássica. Até hoje, todas as demonstrações utilizam a relação:

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} E,$$

quer dizer, a relação entre o fluxo de uma radiação e a energia média de um oscilador. Essas demonstrações fazem hipóteses sobre o número de graus de liberdade do éter, número que entra na fórmula acima (primeiro fator do membro da direita). Contudo, esse fator deveria sempre ser deduzido da teoria clássica. Esse ponto, comum a todas as demonstrações, não é satisfatório, e não é de se admirar que tenham existido sempre tentativas de demonstrar esta fórmula livrando-se dessa falta de lógica.

Uma demonstração notavelmente elegante foi dada por Einstein². Ele reconheceu a falta de lógica das demonstrações anteriores, e procurou deduzir essa fórmula independentemente da teoria clássica.

*Tradução de Francisco Caruso (CBPF & UERJ) & Vitor Oguri, Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

¹N.T. “Über des Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum”, *Annalen der Physik*. Leipzig **4**, 553. Tradução de Ildeu de Castro Moreira, “Sobre a Lei de Distribuição de Energia no Espectro Normal”, publicada na *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 538 (2000).

²N.T. “Zum Quantum Theorie der Strahlung”, *Zeitschrift für Physik* **18**, 121 (1917). Tradução de C.A. dos Santos e R. Axt, “Sobre a teoria quântica da radiação”, publicada na *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 93 (2005). Veja a propósito D. Kleppner, “Relendo Einstein sobre radiação”, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 87 (2005). Tradução de Nelson Studart.

Partindo de hipóteses muito simples sobre a troca de energia entre as moléculas e o campo de radiação, ele encontrou a relação:

$$\rho_\nu = \frac{\alpha_{mn}}{e^{(\epsilon_m - \epsilon_n)/(kT)} - 1}.$$

No entanto, a fim de relacionar esta fórmula àquela de Planck, é preciso utilizar a lei do deslocamento de Wien, e o princípio de correspondência de Bohr. A lei de Wien é baseada na física clássica, e o princípio de correspondência de Bohr supõe que, em certos limites, a teoria quântica e a teoria clássica coincidem.

Em todo caso, as demonstrações não me parecem suficientemente justificadas do ponto de vista lógico. Por outro lado, parece-me que a hipótese dos quanta de luz, em relação com a Mecânica Estatística (tal qual Planck a adaptou segundo as necessidades da teoria quântica) deve ser suficiente para demonstrar essa lei, independentemente da teoria clássica. Descreverei brevemente o método a seguir.

Suponhamos que a radiação esteja contida em um volume V e que sua energia total seja E . Existem vários tipos de quanta em número N_s e com energia $h\nu_s$

$$E = \sum_s N_s h\nu_s = V \int \rho_\nu d\nu. \quad (1)$$

Para resolver o problema, é preciso determinar N_s , que determinará ρ_ν . Se pudermos expressar a probabilidade de cada distribuição caracterizada por um número N_s arbitrário, então a solução será obtida, admitindo-se o critério de tornar essa probabilidade máxima, levada em conta a condição (1). Procuremos, assim, essa probabilidade.

O quantum tem uma quantidade de movimento igual a $h\nu_s/c$ na sua direção de propagação. O estado instantâneo do quantum é caracterizado por suas coordenadas x, y, z e sua quantidade de movimento p_x, p_y, p_z ; essas seis grandezas podem ser tomadas como as coordenadas de um ponto de um espaço a seis dimensões, onde temos a relação

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{h^2 \nu^2}{c^2}$$

Neste espaço, o ponto representativo está sujeito a se encontrar sobre a superfície de um cilindro determinado pela frequência do quantum. Ao domínio de frequência $d\nu_s$ corresponde, assim, o espaço de fase

$$\int dx dy dz dp_x dp_y dp_z = V \cdot 4\pi \frac{h\nu}{c}^2 \frac{h d\nu}{c} = 4\pi \frac{h^3 \nu^2}{c^3} V d\nu.$$

Se dividirmos este espaço de fase em células de extensão h^3 , existem $(4\pi\nu^2/c^3) d\nu$ células no espaço das frequências $d\nu$.

Não há nada de definitivo que se possa dizer a respeito da maneira de efetuar essa distribuição. Convém, por outro lado, considerar que o número total de células seja equivalente ao número de disposições possíveis de um quantum dentro desse volume. Para levar em conta a polarização, é indicado multiplicar esse número por 2, de forma que se encontra que o número de células correspondendo a $d\nu$ é igual a $(8\pi V \nu^2/c^3) d\nu$.

Agora é fácil calcular a probabilidade termodinâmica (definida macroscopicamente) de um dado estado. Seja N_s o número de quanta pertencentes ao domínio de frequências $d\nu^s$. De quantas maneiras pode-se distribuí-los entre as células pertencentes a $d\nu^s$? Seja p_0^s o número de células vazias, p_1^s o número daquelas contendo um quantum, p_2^s o número daquelas contendo dois *etc.* O número de distribuições possíveis é então:

$$\frac{A^s!}{p_0^s! p_1^s! \dots}, \quad \text{onde } A^s = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu^s,$$

e onde

$$N^s = 0 \cdot p_0^s + 1 \cdot p_1^s + 2 \cdot p_2^s \dots$$

é o número de quanta que pertencem a $d\nu^s$.

A probabilidade do estado definido pelo conjunto dos p_r^s é então:

$$\prod_s \frac{A^s!}{p_0^s! p_1^s! \dots}$$

Considerando que podemos considerar os p_r^s como grandes números, temos:

$$\log W = \sum_s A^s \log A^s - \sum_s \sum_r p_r^s \log p_r^s$$

onde

$$A^s = \sum_r p_r^s$$

Essa expressão deve ser máxima com as condições de vínculo:

$$E = \sum_s N^s h\nu^s; \quad N^s = \sum_r r p_r^s$$

O cálculo das variações dá as condições:

$$\begin{aligned} \sum_s \sum_r \delta p_r^s (1 + \log p_r^s) &= 0, & \sum_s \delta N^s h\nu^s &= 0 \\ \sum_s \delta p_r^s &= 0 & \delta N^s &= \sum_r r \delta p_r^s. \end{aligned}$$

Segue-se que:

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s (1 + \log p_r^s + \lambda^s) + \frac{1}{\beta} \sum_s h\nu^s \sum_r r \delta p_r^s = 0.$$

Dela deduz-se:

$$p_r^s = B^s e^{-r h\nu^s / \beta}.$$

Mas como

$$A^s = \sum_r B^s e^{-r h\nu^s / \beta} = B^s \sum_r e^{-r h\nu^s / \beta} = B^s \frac{1 - e^{-h\nu^s / \beta}}{1 - e^{-h\nu^s / \beta}},$$

tem-se:

$$B^s = A^s \frac{1 - e^{-h\nu^s / \beta}}{1 - e^{-h\nu^s / \beta}}.$$

Além disso, tem-se:

$$N^s = \sum_r r \delta p_r^s = \sum_r r A^s \frac{e^{-hv^s/\beta}}{1 - e^{-hv^s/\beta}} = \frac{A^s e^{-hv^s/\beta}}{1 - e^{-hv^s/\beta}}.$$

Considerando o valor de A^s encontrado acima tem-se:

$$E = \sum_s \frac{8\pi h\nu^{s3} d\nu^s}{c^3} V \frac{e^{-hv^s/\beta}}{1 - e^{-hv^s/\beta}}.$$

Com auxílio dos resultados assim encontrados, calcula-se:

$$S = k \left[\frac{E}{\beta} - \sum_s A^s \log \left(1 - e^{-hv^s/\beta} \right) \right],$$

Se se leva em conta o fato de que $\partial S/\partial E = 1/T$, segue-se que $\beta = kT$. Introduzindo isso na equação acima para E obtém-se:

$$E = \sum_s \frac{8\pi h\nu^{s3}}{c^3} V \frac{1}{e^{hv^s/\beta} - 1} d\nu^s,$$

que é equivalente à fórmula de Planck.

(Universidade de Dacca, Índia)
Traduzido para o alemão por Einstein

Observação do tradutor (Einstein). *A demonstração da fórmula de Planck por Bose constitui, na minha opinião, um progresso importante. O método utilizado aqui pode conduzir à teoria quântica dos gases perfeitos, como vou expor em outro lugar.*³

³N.T. Artigos publicados em Sitzungsberichte der Preussische Akademie der Wissenschaften, **22**, 261 (1924), **23**, 3 e 18 (1925). O segundo artigo, "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases – Zweite Abhandlung", traduzido por Sílvio R. Dahmen como "Teoria quântica do gás ideal monoatômico – segundo tratado", foi publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 113-120 (2005).