Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 45, e20230046 (2023)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0046

Artigos Gerais

Oscilador harmônico simples, série e transformada de Fourier e operador de Sturm-Liouville – uma breve discussão

Simple Harmonic Oscillator, Series, and Fourier Transform and Sturm-Liouville Operator – A Brief Discussion

Lucas dos S. Barros[1,2], Marcos Cavalcante[2], Paulo Soledade[2,3], David A. Sbrissa Neto[2,3], Marcelo Siqueira[*2,3]

[1]Instituto Federal do Amapá, Curso de Licenciatura em Física, Macapá, AP, Brasil.
[2]Universidade Federal do Amapá, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Macapá, AP, Brasil.
[3]Universidade Federal do Amapá, Grupo Amazônico de Materiais e Energias Renováveis, Macapá, AP, Brasil.

Recebido em 28 de fevereiro de 2023. Aceito 12 de abril de 2023.

Neste trabalho destacamos a importância do oscilador harmônico simples como um modelo matemático fundamental para a compreensão de fenômenos oscilatórios em diversas áreas da Física e Engenharia, enfatizando a necessidade de se conhecer os métodos para a sua solução, que servem como ponto de partida para estudar sistemas mais complexos. Embora esse tema seja relevante, muitos estudos se limitam a aplicações práticas ou soluções gerais de equações diferenciais, sem conexão significativa entre conceitos. Neste sentido, propõe-se uma abordagem que explora a conexão entre o oscilador harmônico, série e transformada de Fourier. Através da teoria do operador linear de Sturm-Liouville, introduzimos conceitos como autofunções de um operador hermitiano, ortogonalidade e formação de espaços vetoriais. Enquanto a série surge como uma expansão em uma base infinita de funções dentro de um intervalo finito, a transformada surge como uma projeção de objetos matemáticos como funções e equações no espaço das autofunções do oscilador em um intervalo infinito. Espera-se que essa abordagem estimule discussões e facilite a compreensão de tópicos mais avançados em Física e áreas afins, tornando-os mais acessíveis a estudantes de graduação e pós-graduação.
Palavras-chave: Oscilador harmônico; série e transformada de Fourier; operador de Sturm-Liouville.

In this work we highlight the importance of the simple harmonic oscillator as a fundamental mathematical model for the understanding of oscillatory phenomena in several areas of Physics and Engineering, emphasizing the need to know the methods for its solution, which serve as a starting point for studying systems more complex. Although this topic is relevant, many studies are limited to practical applications or general solutions of differential equations, with no significant connection between concepts. In this sense, an approach is proposed that explores the relationship between the harmonic oscillator, series and Fourier transform. Through the theory of the Sturm-Liouville linear operator, we introduce concepts such as the eigenfunctions of a Hermitian operator, orthogonality, and the formation of vector spaces. While the series appears as an expansion on an infinite basis of functions within a finite interval, the transform arises as a projection of mathematical objects such as functions and equations onto the space of the oscillator's eigenfunctions into an infinite interval. It is hoped that this approach will stimulate discussions and facilitate the understanding of more advanced topics in Physics and related areas, making them more accessible to undergraduate and graduate students.
Keywords: Harmonic oscillator; series and Fourier transform; Sturm-Liouville operator.

1. Introdução

As oscilações fazem parte de todos os aspectos de nossa vida. Seja no estudo da estabilidade de fenômenos mecânicos, descrição do fluxo de calor através de materiais, na emissão de sinais eletromagnéticos ou mesmo na descrição de sistemas quânticos com níveis de energia igualmente espaçados, as oscilações surgem como um aspecto fundamental da física. Todos estes fenômenos têm em comum a sua descrição feita em maior ou menor grau pela equação do oscilador harmônico simples (OHS). Muito mais próximo de um dos ditos *toy models* da física, este sistema é de extrema importância pois suas propriedades servem de ponto de partida para estudos de sistemas mais avançados e as técnicas envolvidas para tratar de tais sistemas podem ser adaptadas para estudos mais complexos. Neste sentido, revisitar o OHS é de extrema importância.

Uma das primeiras aparições do OHS que se tem registro é devida ao físico e matemático Leonard Euler

[*]Endereço de correspondência: marcelo.siqueira@unifap.br

(1707–1783). Em 1739 resolveu a equação do OHS e descobriu o fenômeno da ressonância, ao adicionar um termo de fonte nesta equação. Percebeu-se que quando a frequência natural de oscilação do sistema se aproximava da frequência da fonte, a amplitude da oscilação tendia ao infinito [1–3]. Euler ainda esteve nas discussões sobre como obter as equações de movimento do oscilador harmônico através da lagrangiana. Suas contribuições aliadas aos esforços de Joseph-Luis Lagrange (1736–1813), Pierre Fermat (1601–1665) e Louis Moureau Maupertius (1698–1759), foram direcionadas a desenvolver o princípio da mínima ação, com base na obervação de que a natureza tende a minimizar certas quantidades. Esses esforços levaram à equação de movimento para o OHS via equação de Euler-Lagrange [1–4]. Neste sentido, o OHS é um sistema que tem sido estudado por muitos físicos e matemáticos há muito tempo, e até os dias de hoje ainda é possível observá-lo sob pontos de vista não usuais.

Na física, uma equação é uma lei matemática que descreve o comportamento básico de um fenômeno. Um exemplo clássico é a equação que descreve a trajetória de um pêndulo simples. Através dela se observa que a massa nunca poderá atingir uma altura maior do que a aquela da qual foi abandonada. Isso nos revela uma propriedade básica do universo, a conservação da energia de um sistema mecânico. Mesmo a equação de um pêndulo simples pode ser encaixada no caso geral da oscilação em torno de um ponto, que se converte no problema geral descrito pela equação do OHS [5–7].

Em todos os campos da física aparece o fenômeno da oscilação em torno de um ponto de equilíbrio. Este fenômeno é geralmente associado a uma energia potencial $U(x)$ que se conecta com uma força conservativa $\vec{F}$ através da equação $F = -\frac{dU(x)}{dx}$, em uma dimensão. O potencial do tipo OHS se manifesta em qualquer situação onde haja pequenas oscilações em torno de um mínimo de energia potencial, sendo esta aproximada por uma parábola do tipo $U(x) = \frac{kx^2}{2}$, onde k é a constante de elasticidade que aparece an lei de Hook. No OHS a energia do sistema como um todo se conserva, não havendo dissipação ou perdas. Em sistemas macroscópicos isso é muito difícil de acontecer. Além disso, na solução de problemas de eletromagnetismo, como da equação de Laplace, o método de separação de variáveis frequentemente leva a alguma equação do tipo OHS para uma de suas componentes [5–7].

Devido a importância do OHS para descrição de fenômenos físicos, este sistema sempre deve ser revisitado, sendo imperativo que estudantes de graduação terminem seus cursos conhecendo bem suas características para os casos simples, amortecido e forçado. Surge uma necessidade de organizar e adaptar conceitos, conectando visões diferentes sobre o mesmo problema.

A utilização intuitiva da álgebra linear é uma abordagem altamente relevante tanto para a física clássica quanto para a física moderna e suas aplicações. Especialmente na concepção de fenômenos oscilatórios, ao se dispor de um conjunto de funções (ou vetores) *linearmente independentes*, é possível descrever quantidades por meio do *princípio da superposição*, que consiste na combinação linear desses elementos. Bases de funções ortogonais são desejáveis, pois permitem a obtenção direta dos coeficientes destas combinações lineares, sem a necessidade de resolver sistemas de funções intermediários. Embora o método de Gram-Schmidt possa ser utilizado para *ortonormalizar* um conjunto de funções linearmente independentes, a Teoria do Operador de Sturm-Liouville (SL) demonstra ser mais eficiente, pois as autofunções desse operador ($\mathcal{L}$) são sempre ortogonais e seus autovalores reais, já que ele é *hermitiano* ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$) [5–7]. Operadores do tipo SL são frequentes em diversas aplicações da física, porém uma excelente maneira de introduzir esses conceitos aos estudantes é por meio de exemplos simples, como o oscilador harmônico simples (OHS).

Por este motivo, neste trabalho, propomos a abordagem do oscilador harmônico usando a ideia de espaços vetoriais de funções ortogonais através da teoria do operador de Sturm-Liouville. Conceitos como série e transformada de Fourier podem ser imaginados como expansões e projeções de objetos matemáticos, como funções e equações diferenciais, no espaço de autofunções do operador $\mathcal{L}$ do OHS. A abordagem aqui desenvolvida para o OHS pode ser adaptada para outras classes de funções que se encaixam na teoria do operador de SL [5–9].

2. Oscilador harmônico simples e a conexão com a série de Fourier

O oscilador harmônico simples é um modelo matemático que pode sempre ser invocado quando sistemas físicos oscilam em torno de um ponto de equilíbrio, onde é possível descartar termos associados à dissipação de energia. É dito um modelo teórico no sentido de que quando a frequência das oscilações livres ω_0 de um sistema mecânico se aproxima da frequência de oscilação ω da fonte externa, a amplitude das oscilações tende ao infinito. Como a energia do sistema é proporcional ao quadrado da amplitude das oscilações, este sistema teria energia infinita, o que não é factível [5–8]. Existem exemplos na literatura que mostram a necessidade de termos dissipativos em sistemas mais reais, como no caso da solução do oscilador harmônico forçado usando o método da função de Green, onde o caminho de integração passa pelo polo fazendo com que integrais divirjam, caso o atrito seja desprezado [5]. Mesmo com tais limitações, o OHS é de extrema importância prática e permite abstrair conceitos como ortogonalidade, completeza, superposição e transformadas. Assim, mesmo na ausência de termos dissipativos, é importante analisar etse sistema.

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0046

Em termos práticos, o OHS se caracteriza pela seguinte equação

$$m\ddot{x} + kx = 0 \longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1}$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

A equação (1) é diferencial ordinária de 2ª ordem, de 1° grau, linear, de coeficientes constantes e homogênea. A mensagem que ela transmite é que a solução $x(t)$ deve ser uma função cuja derivada de 2ª ordem seja proporcional a ela mesma [5–9]. Existem duas classes de funções que satisfazem esta condição: exponenciais imaginárias ($e^{\pm i\omega_0 t}$) e senos e cossenos. Estas funções obedecem a condição de independência linear definida através do wronskiano W, dado por:

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x_1} & \dot{x_2} \end{vmatrix} = x_1\dot{x_2} - x_2\dot{x_1} \neq 0. \tag{2}$$

O wronsiano é uma ferramenta que mede a dependência ou independência linear de um sistema de funções. Aqui, no exemplo do OHS, é imediato enxergar pelas propriedades de determinantes que a dependência linear, que faria $W(x_1, x_2) = 0$, implica que as funções x_1 e x_2 seriam proporcionais entre si. Estas funções que satisfazem a equação do oscilador caem no caso em que o wronskiano é diferente de zero, uma vez que são ortogonais (consequentemente linearmente independentes) [5–10].

Para evidenciar os pontos importantes desta discussão, considere uma base de funções seno e cosseno como as duas soluções linearmente independentes da equação (1). Assim, teremos:

$$x_1(t) = \sin(\omega_0 t), \tag{3}$$

$$x_2(t) = \cos(\omega_0 t). \tag{4}$$

É direto verificar que ao substituir estas funções na equação (2) o resultado será $-\omega_0 \neq 0$. Desta forma, uma vez existindo a oscilação estas funções serão ortogonais.

Um teorema geral de equações deste tipo afirma que a solução mais geral possível para a equação (1) é uma combinação linear de soluções linearmente independentes x_1 e x_2 [5–10]. Assim, a solução geral é dada por:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t). \tag{5}$$

É imediato verificar que esta *solução geral* satisfaz a equação (1), dado a linearidade da mesma. Ao lembrar que $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$, podemos converter esta solução geral para a base de exponenciais imaginárias:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \tag{6}$$

onde pode-se escrever as constantes da nova combinação em função das constantes A e B através de $C_1 = (B - Ai)/2$ e $C_2 = (B + Ai)/2$.

As duas bases formam uma solução geral igualmente boa. No entanto, é notório que em sistemas sujeitos a condições de contorno de confinamento, que pedem ondas estacionárias em sua representação, a escolha da base em senos e cossenos se mostra mais prática pelo fato de fornecer *nodos*. Se estamos tratando de ondas planas viajantes, a base de exponenciais imaginárias se mostra mais adequada. As condições de contorno do problema é que definem de fato qual será a base de funções final e que melhor descreve o problema [5–11].

Um parâmetro muito importante nestes sistemas é o período T. Ele pode ser definido como o menor intervalo para que a função $x(t)$ se repita. A frequência angular é definida a partir dele como $\omega_0 = 2\pi/T$. Em muitos casos, quando as *condições de contorno* são *periódicas* ou de *confinamento*, esta solução acaba por ser escrita em termos de um índice. Estas condições limitam os tipos de funções que são aceitáveis a um determinado problema, o que leva inevitavelmente à quantização da frequência, implicando que soluções aceitáveis tenham frequências que são um múltiplo inteiro da frequência ω_0 [5, 6, 9–11]. Assim, de maneira geral, pode-se dizer que *uma* solução para tais sistemas é:

$$x_n(t) = A_n \sin(n\omega_0 t) + B_n \cos(n\omega_0 t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Nesta última equação, o termo $n = 0$ da conta da ausência de oscilação. $n = 1$ é o modo fundamental e os outros valores são os demais modos de vibração. Este problema surge pela primeira vez na vida do estudante em livros de física básica, ao estudar a corda vibrante presa pelas extremidades [12]. Aqui, propomos a conexão entre isso e a série de Fourier da seguinte maneira. Considere a expressão abaixo:

$$\begin{array}{lc} n = 0 & A_0 \\ n = 1 & A_1\cos(\omega_0 t) + B_1\sin(\omega_0 t) \\ n = 2 & A_2\cos(2\omega_0 t) + B_2\sin(2\omega_0 t) \\ n = 3 & A_3\cos(3\omega_0 t) + B_3\sin(3\omega_0 t) \\ n = 4 & A_4\cos(4\omega_0 t) + B_4\sin(4\omega_0 t) \\ \vdots & \vdots \end{array} \tag{8}$$

Cada função descrita na expressão (8) pode ser interpretada como a solução de um OHS de frequência $\omega = n\omega_0$, n $= 0, 1, 2, \ldots$. Pode-se dizer que cada uma das n-soluções representa um oscilador harmônico simples e que todas as oscilações são múltiplos inteiros da oscilação fundamental ω_0.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) usou a ortogonalidade deste sistema de funções para resolver o problema da equação da difusão, quando estudava a propagação do calor. O interessante é que estas funções são ortogonais entre si, para cada valor de n. Desta forma, elas constituem um espaço vetorial de dimensão n infinita, que pode ser usado para representar qualquer função dentro dos limites definidos para o problema que está sendo analisado [5–10]. Uma função qualquer $X(t)$ pode ser descrita, dentro do domínio das funções $x_n(t)$

como a combinação linear

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)\right]. \qquad (9)$$

A equação (9) é a solução mais geral possível do problema oscilatório, e também é a definição de série de Fourier: uma superposição de osciladores harmônicos simples. Também pode-se dizer que foi feita uma expansão da função $X(t)$ na base de osciladores harmônicos simples.

Para a expressão (9) ser uma série convergente, basta que $X(t)$ seja contínua ou seccionalmente contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$, periódica de período $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Isso leva as expressões para os coeficientes

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} X(t)\cos(n\omega_0 t)dt, \\ B_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} X(t)\sin(n\omega_0 t)dt. \end{aligned} \qquad (10)$$

Esta interpretação, em princípio, pode ser estendida não só a osciladores harmônicos simples, mas também a oscilações amortecidas e outras classes de funções especiais, como funções de Legendre, Bessel, Hermite, etc. Apesar deste estudo ser feito em cima das funções que caracterizam o oscilador harmônico, a análise aqui descrita se estende a toda uma classe de funções especiais. A utilização de cada função especial irá depender da simetria do problema físico a ser analisado. Por exemplo, as oscilações simples e gerais são descritas de acordo com as equações do OHS, já as variações angulares com simetria esférica são descritas por funções de Legendre. Para o afastamento (de algo) em relação a uma fonte com simetria cilíndrica é mais adequado o uso de funções de Bessel, e assim por diante [5–10].

A vantagem de usar a simetria adequada é que a solução mais geral do problema, descrita através de uma série, pode ser truncada em uma quantidade cada vez menor de termos. As aplicações computacionais podem ser otimizadas, por exemplo, fazendo o uso da simetria, uma vez que quantos menos termos na série, mas simples inverter expansões e achar os coeficientes.

A base de funções carrega toda a simetria do problema envolvido. Esse raciocínio é análogo ao tentar resolver a equação de Laplace em coordenadas cartesianas para uma esfera no vácuo: a simetria esférica é muito mais econômica em notação e interpretação. Resolver sistemas com uma simetria diferente geralmente obriga a carregar mais parâmetros do que o necessário para a sua descrição [5–10].

A discussão anterior evidencia que a série de Fourier é um conceito que emerge da solução da equação do OHS, quando as condições de contorno levam à quantização das frequências, conectando-se com o conceito de ortogonalidade. Essas conexões conceituais podem ser apresentadas desde os primeiros anos da formação do graduado em física (licenciatura ou bacharelado), exigindo apenas conhecimento sobre o método de solução do OHS e a aplicação de condições de contorno.

3. Oscilador harmônico e teoria do operador de Sturm-Liouville

A Teoria do Operador de Strum-Liouville (SL) associa equações diferenciais auto-adjuntas a operadores diferenciais hermitianos sobre funções. É aplicada a sistemas de equações diferenciais lineares e homogêneos, com condições de contorno de tipo Sturm-Liouville, que garantem a hermiticidade do operador associado ao problema estudado. Descreve propriedades gerais de equações e suas soluções, usando conceitos da álgebra linear para isso, e fornece tratamentos elegantes para soluções de problemas físicos, como a representação espectral da função de Green para a solução de equações não-homogêneas [5, 6, 9, 10]. Essas situações aparecem em muitos contextos, incluindo problemas de física, como osciladores harmônicos, equação de Laplace e de Schrödinger, e problemas de engenharia, como a análise de estruturas lineares e a propagação de sinais eletromagnéticos [14, 15].

A vantagem de se utilizar operadores hermitianos é que suas autofunções são ortogonais e os seus autovalores reais, fornecendo assim uma base de funções adequada para escrever as expressões necessárias à solução de um problema. O conteúdo de derivadas e suas relações é carregado pelo operador, que ao atuar numa função gera a equação diferencial específica daquele problema. O problema físico, por sua vez, é caracterizado pela equação diferencial específica mais as condições de contorno pertinentes [5, 6, 9, 10, 13].

Considere a equação diferencial de segunda ordem e homogênea abaixo:

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + \lambda D(x)y = 0. \qquad (11)$$

As funções $A(x), B(x), C(x)$ e $D(x)$ são coeficientes variáveis, podendo inclusive ser contantes, e λ é um parâmetro dado pelas condições de contorno. Considerando intervalos em que $A(x) \neq 0$ e dividindo toda a expressão por $A(x)$, ela pode ser reescrita como:

$$y'' + b(x)y' + c(x)y + \lambda d(x)y = 0. \qquad (12)$$

Na última expressão, $b(x) = B(x)/A(x)$, $c(x) = C(x)/A(x)$ e $d(x) = D(x)/A(x)$. O fator integrante é definido como

$$p(x) = e^{\int^x b(x')dx'}. \qquad (13)$$

Percebe-se que ao multiplicar a equação 9 pelo fator integrante aparecerá a derivada dele, pois $p'(x) = b(x)e^{\int^x b(x')dx'} = b(x)p(x)$. Assim a última equação toma a forma:

$$p(x)\frac{d^2}{dx^2}y + p'(x)\frac{d}{dx}y + p(x)c(x)y + \lambda p(x)d(x)y = 0. \qquad (14)$$

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0046

Esta última equação pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y\right] + q(x)y + \lambda w(x)y = 0. \tag{15}$$

Na equação acima, $q(x) = p(x)c(x)$ e $w(x) = p(x)d(x)$. Podemos definir o operador de Sturm-Liouville como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{w(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right], \tag{16}$$

sendo possível fatorar a equação (15) e isolar este operador de maneira a obter a equação de autovalores $\mathcal{L}y = \lambda y$.

Para a maioria das equações diferenciais de segunda ordem que aparecem na física, este operador é auto-adjunto (hemitiano), isto é, para duas funções u e v temos que $\langle \mathcal{L}u|v\rangle = \langle u|\mathcal{L}v\rangle$. Além disso, o produto escalar entre duas funções $u(x)$ e $v(x)$ (que podem ser complexas) num intervalo (a, b) fica definido em relação a uma função peso $w(x)$ como

$$\langle u, v\rangle \equiv \langle u|v\rangle = \int_a^b u^*(x)v(x)w(x)dx. \tag{17}$$

Através deste produto, é possível discutir conceitos como ortogonalidade, projeção, hermiticidade e muitas outras propriedades gerais de equações e suas respectivas soluções.

A equação do OHS se encaixa nesta descrição, via operador de SL, com $p(x) = w(x) = 1$ e $q(x) = 0$. De acordo com a equação (16) o operador de SL associado ao OHS é:

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}. \tag{18}$$

Este operador aplicado a uma função, juntamente com as devidas condições de contorno, define um problema físico que envolve o OHS e suas autofunções y_n:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_n}{dx^2} + k_n y_n = 0 \\ a_1 y_n(a) + a_2 y_n'(a) = c_a \\ b_1 y_n(b) + b_2 y_n'(b) = c_b \end{aligned} \tag{19}$$

Ao resolver o problema descrito pela equação (19) com $a = 0$, $b = L$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$ e $c_a = c_b = 0$, obtemos o clássico problema da corda presa pelas extremidades, com condições de contorno de confinamento. A solução geral pode ser escrita como $y_n(x) = A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)$, uma vez que estas função se adéquam facilmente a problemas de confinamento que exigem ondas estacionárias. Após a aplicação das condições de contorno e a imposição de que as $y_n(x)$ sejam normalizadas (já são ortogonais) e rebatizadas para $\phi_n(x)$, isto é $\int_0^L \phi_n^*(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm}$, as autofunções normalizadas são

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{20}$$

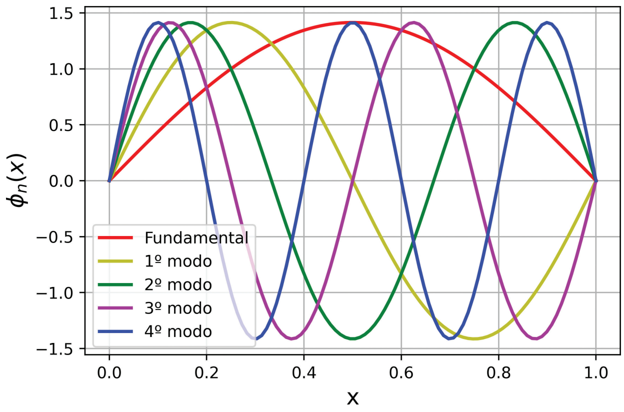

Figura 1: Plot dos 5 primeiros modos de vibração representados na equação (20). Estes modos de guardam uma relação de ortogonalidade entre si e são quadraticamente integráveis em um intervalo finito, formando um espaço vetorial de dimensão infinita.

A Figura (1) mostra os 5 primeiros modos de vibração descritos pela equação (20). Estas funções formam uma base de espaço vetorial de dimensão infinita [5–10, 13].

Uma função terá sua representação desde que seja contínua ou seccionalmente contínua, definida no intervalo $(-\infty, \infty)$, com período $T = 2\pi/\omega$, ou comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ [5–10, 13]. Uma função $f(x)$ que se encaixe nestas condições pode ser representada pela combinação linear destas $\phi_n(x)$, o que é essencialmente uma série de Fourier de senos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{21}$$

Um exemplo descrito pela equação (21) é a clássica onda dente-de-serra, cuja série de Fourier é definida como $f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)$. Sua representação em um intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ é mostrada na Figura (2) para $N = 5$, 10, 20 e 40. Observe que à medida que mais termos são adicionados, aumentando o tamanho da soma e consequentemente da dimensão da representação, a curva tende a ficar melhor representada, se ajustando ao formato correto.

A depender das condições de contorno específicas do problema, a base de autofunções pode ser escrita como as diversas combinações de senos e cossenos, ou de exponenciais imaginárias. Quando o sistema é submetido a condições de contorno de confinamento, a base natural recai facilmente em senos e cossenos, pois estes representam ondas estacionárias, provenientes da interferência construtiva entre ondas incidentes e refletidas nas fronteiras do sistema físico analisado. Quando o sistema é submetido a condições de contorno periódicas, tanto a base de senos e cossenos ou a de exponenciais de argumento imaginário são convenientes. Se o sistema tem alguma de suas fronteiras no infinito matemático, então a combinação de exponenciais imaginárias é a mais adequada. Essa adequação se refere na quantidade de

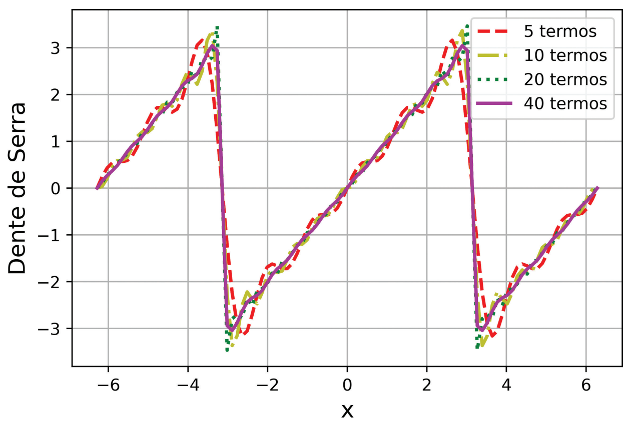

Figura 2: Representação de Fourier da onda dente-de-serra. Somatório truncado em 5, 10, 20 e 40 termos.

passos necessários até a solução final do problema [5–10, 13].

4. Espaços vetoriais, oscilador e a transformada de Fourier

Para formar um espaço vetorial de dimensão infinita, um conjunto infinito de funções ortonormais $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)...$, como mostrado na expressão (20), deve obedecer os axiomas de adição e multiplicação por um escalar. Além disso, estas funções são quadraticamente integráveis no intervalo em questão, o que as encaixa dentro do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Considere agora o operador definido na equação (18) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}(-\infty,\infty)$, com o produto escalar entre as funções quadraticamente integráveis u e v definido como

$$\langle u|v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)^* v(x)dx. \tag{22}$$

Uma função aceitável u (ou v) neste espaço deve obedecer a seguinte condição de contorno:

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{23}$$

Situações como essa aparecem frequentemente em campos da física como a mecânica quântica e eletromagnetismo. Especificamente nesta primeira, a segunda derivada está associada com a energia cinética, significando que quanto maior a curvatura de uma função de onda, maior seu conteúdo de energia, e que as funções de onda aceitáveis devem ter o comportamento referenciado na expressão (23). Em problemas de eletromagnetismo, estas situações surgem no tratamento da propagação de sinais e guias de onda [15].

Nas condições citadas acima, a transformada de Fourier pode ser pensada como uma projeção (via produto escalar) de uma função $f(x)$ no espaço das funções e^{ikx}, que representam as autofunções do OHS, com as condições de contorno descritas em (23). Em outras palavras, têm-se:

$$\langle e^{ikx}|f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = F(k) = \mathcal{F}\left\{f(x)\right\}. \tag{24}$$

Na definição acima, usando a notação de Dirac, é evidente que podemos interpretar a transformada de Fourier como uma projeção da função $f(x)$ num subespaço das e^{ikx}, representado pelo *bracket* de $|f(x)\rangle$ e $|e^{ikx}\rangle$. Além disso, é relativamente simples demonstrar que para uma derivada de ordem n, $f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n}$, temos:

$$\langle e^{ikx}|f^{(n)}(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} e^{-ikx}dx = (ik)^n F(k) = (ik)^n \mathcal{F}\left\{f(x)\right\}. \tag{25}$$

Para chegar a este resultado se usa a técnica da integração por partes, reduzindo a ordem da derivada a cada nova reintegração, e as condições de contorno dadas pela expressão (23). Além disso, a conexão como oscilador harmônico é tão forte que mesmo uma equação diferencial como a do oscilador amortecido e forçado, abaixo, pode ser invertida através da definição acima.

A título de exemplo, seja a equação diferencial $y'' + k_0^2 y = \delta(x-x')$, onde $\delta(x-x')$ é a delta de Dirac, um pulso unitário, centrada em x'. Aplicando a transformada em toda a equação, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{y'' + k_0^2 y\right\} &= \mathcal{F}\left\{\delta(x-x')\right\} \\ -k^2 Y(k) + k_0^2 Y(k) &= e^{ikx'} \\ Y(k) &= \frac{e^{ikx'}}{k_0^2 - k^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

No segundo membro da equação, usamos a definição de transformada de Fourier e a propriedade de filtro da delta de Dirac. Esta última expressão é resultado da projeção da equação diferencial sobre o espaço das e^{ikx}. A análise dimensional mostra que esta expressão está no espaço recíproco de x, o *espaço dos k*. Observe que neste espaço a equação diferencial tem sua representação como equação algébrica.

A transformada inversa é definida de maneira a obter a variável original, que seria a solução da equação não homogênea do oscilador amortecido:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \hat{1}f(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(k)e^{ikx}dk. \tag{27}$$

Assim, em nosso exemplo teremos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{k_0^2 - k^2}dk = \frac{e^{ik_0|x-x'|}}{2ik_0}. \tag{28}$$

Este último resultado é mostrado na Figura (3). Observe que nosso resultado tem parte real e imaginária.

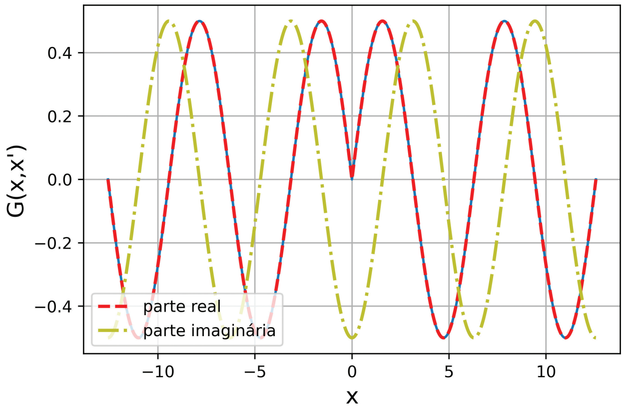

Figura 3: Solução não homogênea para um oscilador harmônico simples, sob a ação de um pulso $\delta(x - x')$ unitário (expressão (28)).

Se a transformada direta é usada para representar as quantidades projetadas em um espaço recíproco, onde objetos diferenciais são descritos algebricamente, a transformada inversa é uma forma de combinação linear infinta, na base das exponenciais imaginárias. O termo $Y(k)$, a transformada de nossa variável original, funciona de maneira similar aos coeficientes da série de Fourier.

Enxerga-se, assim, a relação entre a série e transformada de Fourier com o oscilador harmônico: o conjunto de autofunções associadas ao operador de SL do OHS têm relação direta com equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, lineares e de coeficientes constantes. Quando se faz a transformada de Fourier nestas equações, elas se convertem em formas algébricas no espaço recíproco.

Em equações que não têm todos os coeficientes constantes, pode ocorrer de a transformada de Fourier envolver derivadas, como no caso da equação de Schrödinger independente do tempo, no espaço de posições, para um potencial do tipo oscilador. Considere a equação (29) abaixo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x) = E\psi(x). \tag{29}$$

A sua representação no espaço de momentos, via transformada é

$$\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p) - \frac{k\hbar}{2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}(p)}{\partial p^2} = E\tilde{\psi}(p). \tag{30}$$

Isso acontece por causa da definição de momento $p = \hbar k$ e pela propriedade das transformadas de produtos de funções com potências da variável $\mathcal{F}\left\{x^n y(x)\right\}=(-i)^n Y^{(n)}(k)$. Desta maneira, fica evidente que a representação de variáveis e operadores diferenciais associados a elas guardam uma relação estreita através do conceito de transformada.

Vê-se que existe semelhança entre a série e a transformada, pelo menos no que se refere à representação de funções no espaço de autofunções do oscilador harmônico. Enquanto a série é uma expansão em uma base de modos de vibração de dimensão infinita, porém discreta, a transformada é a projeção de objetos como funções e equações sobre o espaço de exponenciais imaginárias, que são autofunções improprias do operador dado na equação (18).

5. Considerações Finais

O oscilador harmônico é fenômeno físico que descreve oscilações em torno de um ponto de equilíbrio, e pode ser representado matematicamente como uma função senoidal com uma frequência constante.

Enquanto os modos de vibração do oscilador, descritos na expressão (6), formam uma base de funções ortogonais que pode ser usada para *expandir* funções $X(t)$ arbitrárias, porém que se ajustem nas condições de contorno do problema em um intervalo finito, a transformada de Fourier é uma ferramenta que *projeta* funções e equações no espaço das exponenciais imaginárias, que são as autofunções do operador de SL para o oscilador (equação(18)), com as condições de contorno descritas em (23).

A série de Fourier permite expandir qualquer função periódica em uma soma de funções senoidais que compõem uma base de funções com frequências múltiplas de uma frequência fundamental ω_0. Desta forma, a posição da partícula em um oscilador harmônico simples pode ser representada como a soma de diferentes modos de oscilação, cada um descrito por uma função senoidal. Esta representação é útil para analisar e compreender as propriedades dinâmicas do sistema, incluindo a distribuição de energia em diferentes modos de oscilação.

A Transformada de Fourier permite decompor uma função arbitrária em suas componentes de frequência individual, de tal forma que a função original possa ser reconstruída a partir da soma de suas componentes de frequência. Portanto, a Transformada de Fourier pode ser usada para analisar o espectro de frequência de uma função, incluindo o oscilador harmônico.

Neste trabalho procurou-se salientar que todos estes conceitos estão conectados através da Teoria do Operador de Sturm-Liouville, que aplicada ao problema do oscilador harmônico mostra que dependendo das condições de contorno de dos limites do domínio da função, a série ou a transformada se mostra mais adequada à solução de problemas.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – 001, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), e à Universidade Federal do Amapá pelo suporte durante o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

[1] J.M.F. Bassalo e M.S.D. Cattani, *Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos* (Livraria da Física, São Paulo, 2009).

[2] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford University press, Oxford, 1990), v. 2.

[3] C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics* (Springer Science & Business Media, Berlin, 2012).

[4] A.P.B. Silva e R.A. Martins, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 625 (2007).

[5] G.A. e H.H. Weber, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física* (Elsevier, Rio de Janeiro, 2007).

[6] J.M.F. Bassalo e M.S.D. Cattani, *Elementos de física matemática: equações diferenciais ordinárias, transformadas e funções especiais* (Livraria da Física, São Paulo, 2010), v. 1.

[7] D.J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 2005).

[8] H. Nussenzveig, *Curso de física básica: Mecânica* (Blucher, São Paulo, 2013), v. 1.

[9] W.E. Boyce e R.C. DiPrima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1985).

[10] D.G. Dudley, *Mathematical foundations for electromagnetic theory* (IEEE Press, New York, 1994).

[11] P. Atkins, J. de Paula e R. Friedman, *Quanta, matéria e mudança: Uma abordagem moléculas para a físico-química* (LTC, Ro de Janeiro, 2009).

[12] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor* (Blucher, São Paulo, 2018), v. 2.

[13] E. Butkov, *Física matemática* (LTC, Rio de Janeiro 1988), v. 1.

[14] M.N.O. Sadiku, *Elementos de eletromagnetismo* (Bookman, Porto Alegre, 2004) .

[15] C.A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics* (John Wiley & Sons, New York, 2012).

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0046