

# Quantidades médias no movimento de um corpo em trajectória elíptica

(Mean values of physical quantities for the motion of a body in an elliptic trajectory)

M.F. Ferreira da Silva<sup>1</sup>

*Departamento de Física, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal*

Recebido em 6/5/2010; Aceito em 30/6/2011; Publicado em 11/10/2011

Em muitos livros de texto, a terceira lei de Kepler é formulada em termos da distância média entre o Sol e cada um dos planetas, não se especificando de que média se trata. Neste trabalho calculam-se três médias diferentes para esta distância, verificando-se que apenas uma é compatível com a referida lei. Adicionalmente, calculam-se e comparam-se as três médias para todas as quantidades físicas relevantes.

**Palavras-chave:** leis de Kepler, modelo de Bohr-Sommerfeld, integrais elípticas.

Many textbooks formulate the Kepler's third law in terms of a mean distance between the Sun and each of the planets, but nothing is said about what kind of mean is. In this work we calculate three different means for this distance, and verify that only one is compatible with the referred law. We also calculate and compare the three means for all relevant physical quantities.

**Keywords:** Kepler laws, Bohr-Sommerfeld model, elliptic integrals.

## 1. Introdução

O estudo das órbitas planetárias à volta do Sol é um dos assuntos abordados em todos os livros de física elementar, quase sempre inserido na lei da gravitação universal de Newton, e normalmente inclui uma referência explícita às leis empíricas de Kepler.

A terceira destas leis, conhecida como lei harmónica ou lei dos períodos, é enunciada nos textos de mecânica de nível intermédio [1a,2-4] da seguinte forma:

Os quadrados dos períodos do movimento dos diferentes planetas à volta do Sol são directamente proporcionais aos cubos dos correspondentes semieixos maiores das elipses descritas por eles.

Esta formulação corresponde à versão dada por Newton [5] da terceira lei de Kepler. São raros [6-8], no entanto, os textos introdutórios de física que enunciam a lei desta maneira. O mais comum [9-13] é substituir-se a referência ao semieixo maior da elipse pela expressão “distância média do planeta ao Sol” (o que coincide com a formulação original de Kepler [14]), sem qualquer indicação acerca de que tipo de média se trata. Em alguns casos [15,16], é ainda referido que essa média é igual ao semieixo maior da elipse, sem o

justificar. Noutros [17], a distância média é descrita como a média aritmética entre a distância máxima e a distância mínima, o que, apesar de ser correcto, não corresponde àquilo que Kepler tinha em mente.

Este trabalho pretende, em primeiro lugar, tirar a limpo este assunto. É que, tendo em conta que a distância Sol-planeta é uma função contínua da posição deste, e que a média de uma função  $f(x)$  num intervalo  $a \leq x \leq b$  é dada por  $\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ , três médias são imediatamente passíveis de ser calculadas: a média angular, em que é usada como variável independente o ângulo polar que define a posição do planeta quando visto a partir do Sol (ângulo conhecido como anomalia verdadeira); a média espacial, em que é usada como variável independente o comprimento de arco da trajectória descrita pelo planeta; e a média temporal, em que é usada como variável independente o tempo.<sup>2</sup>

A questão que se coloca é, portanto, esta: a qual (ou a quais) destas médias nos referimos quando enunciamos a terceira lei de Kepler em termos das distâncias médias dos planetas ao Sol, como Kepler fez?

Em segundo lugar, pretende-se calcular também as três médias referidas para todas as quantidades físicas relevantes na descrição do problema: velocidades, acelerações, forças, energias, etc. Essas três médias serão

<sup>1</sup>E-mail: mffs@ubi.pt.

<sup>2</sup>Outras variáveis independentes poderiam ainda ser escolhidas, como por exemplo a anomalia excêntrica, mas decidiu-se restringir o estudo às três variáveis mais intuitivas.

depois comparadas e, sempre que possível, serão obtidas relações entre elas. Para o cálculo das médias será desenvolvida uma estratégia comum.<sup>3</sup>

Convém salientar que a utilidade do estudo destas médias não se restringe à sua aplicação à mecânica celeste (movimento de planetas em torno de uma estrela, ou de satélites em torno de um planeta). Órbitas elípticas surgem também no estudo do movimento de um electrão em torno de um núcleo segundo o modelo de Bohr-Sommerfeld; apesar de este modelo ter sido abandonado quando a velha teoria quântica deu lugar à mecânica quântica, do ponto de vista pedagógico ele ainda é muito útil. Em particular, verifica-se que as médias temporais da energia e da distância protão-electrão dadas pelo modelo de Bohr-Sommerfeld quando aplicado ao átomo de hidrogénio coincidem, respectivamente, com a energia e com a distância média protão-electrão dadas pela mecânica quântica para esse sistema; esta coincidência desempenhou, historicamente, um papel importante [18-21].

## 2. Descrição matemática a partir das leis de Kepler

A primeira lei de Kepler afirma que os planetas descrevem trajectórias planas de forma elíptica em torno do Sol, ocupando este um dos focos da elipse. A equação da trajectória elíptica descrita pelo planeta  $P$  em torno do Sol  $S$ , em coordenadas polares planas  $(\rho, \varphi)$  e colocando o Sol na origem de coordenadas, é [22]

$$\rho = \rho(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi}, \quad \text{com } \varphi \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

sendo  $a > 0$  o semieixo maior da elipse, e  $0 \leq e < 1$  a sua excentricidade. O afélio (ponto de afastamento máximo) e o periélio (ponto de aproximação máxima) correspondem, respectivamente, às posições angulares  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$  (ver Fig. 1)

$$\rho_{\text{máx}} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e),$$

e

$$\rho_{\text{mín}} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e). \quad (2)$$

A distância entre o centro  $C$  da elipse e o Sol é portanto  $a - \rho_{\text{mín}} = ae \equiv c$ , e o semieixo menor da elipse é dado por  $\sqrt{a^2 - (ae)^2} = a\sqrt{1 - e^2} \equiv b$ . Refira-se que  $a$  é a média aritmética entre  $\rho_{\text{máx}}$  e  $\rho_{\text{mín}}$ , enquanto que  $b$  é a média geométrica entre  $\rho_{\text{máx}}$  e  $\rho_{\text{mín}}$ .

O vector posição do planeta é

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi} [(\cos \varphi) \hat{x} + (\sin \varphi) \hat{y}] = x \hat{x} + y \hat{y}, \quad (3)$$

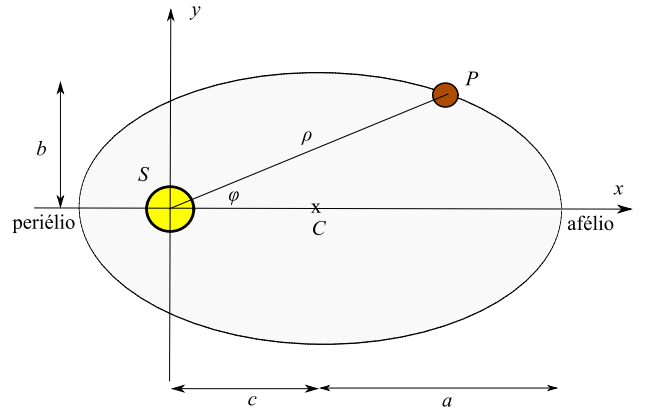


Figura 1 - Trajectória elíptica de um planeta em torno do Sol.

e é fácil verificar que

$$\left(\frac{x - c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (4)$$

equação cartesiana de uma elipse de semieixos  $a$  e  $b$ , centrada no ponto  $(c, 0)$ . O elemento diferencial de comprimento de arco em coordenadas polares planas  $(\rho, \varphi)$  é  $ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$  de modo que, para esta trajectória,

$$\begin{aligned} ds &= a(1 - e^2) \sqrt{\frac{1}{(1 - e \cos \varphi)^2} + \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{(1 - e \cos \varphi)^4}} d\varphi \\ &= a(1 - e^2) \frac{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \varphi}}{(1 - e \cos \varphi)^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Esta relação permite transformar quaisquer integrais no comprimento de arco em integrais angulares. Assim, por exemplo, o comprimento  $L = \int ds$  da trajectória vem dado por (ver integral  $I_{24}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} L &= a(1 - e^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \varphi}}{(1 - e \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= a(1 - e^2) \frac{4E(e)}{1 - e^2} = 4aE(e), \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $E(e)$  é o integral elíptico completo de segundo tipo (ver [www1](#)).

O elemento diferencial de área em coordenadas polares planas  $(\rho, \varphi)$  vem dado por  $dA = \rho d\rho d\varphi$ . Logo, a área total  $A = \int dA$  varrida pelo vector posição do planeta, que é precisamente a área encerrada pela elipse, é (ver integral  $I_{16}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho \right] d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - e \cos \varphi)^2} = \\ &= \frac{a^2(1 - e^2)^2}{2} \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}} = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \pi ab. \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>3</sup>Por questões de economia de espaço, a grande maioria dos integrais envolvidos no cálculo das médias não foram incluídos no texto, mas estão disponíveis no seguinte URL: <http://www.dfisica.ubi.pt/~mffs/integrais.pdf>. Esta página contém três secções que, ao longo do artigo, serão referidas com os símbolos

[www1](#), [www2](#) e [www3](#), respectivamente.

Do ponto de vista cinemático, a segunda lei de Kepler garante que a velocidade areolar é constante. Assim, designando por  $\tau$  o período do movimento e admitindo que este ocorre no sentido anti-horário, temos

$$\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\tau \rho^2} = \frac{2\pi (1-e \cos \varphi)^2}{\tau (1-e^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

que representa a velocidade angular do planeta à volta do Sol; posto de outra forma,

$$dt = \frac{\tau(1-e^2)^{3/2}}{2\pi(1-e \cos \varphi)^2} d\varphi. \quad (9)$$

Esta relação permite transformar quaisquer integrais temporais em integrais angulares.

A terceira lei de Kepler afirma que o quadrado do período do movimento é directamente proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}, \quad (10)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $M$  é a massa do Sol.<sup>4</sup> Combinando as expressões (3), (8) e (10), o vector velocidade do planeta pode ser escrito de duas formas alternativas

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} = \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \hat{y} = \omega \left( \frac{dx}{d\varphi} \hat{x} + \frac{dy}{d\varphi} \hat{y} \right) = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} [(-\sin \varphi) \hat{x} + (\cos \varphi - e) \hat{y}], \quad (11)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \times [(-e \sin \varphi) \hat{\rho} + (1-e \cos \varphi) \hat{\phi}], \quad (12)$$

que permitem identificar as componentes  $v_x$  e  $v_y$ , ou  $v_\rho$  e  $v_\phi$ .

Daqui calcula-se a celeridade  $v$  do planeta em qualquer ponto da sua trajectória

$$v^2 = \left( \frac{1+e^2-2e \cos \varphi}{1-e^2} \right) \frac{GM}{a} = 2GM \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2a} \right). \quad (13)$$

Em particular, no afélio e no periélio temos, respectivamente,

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad \text{e} \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (14)$$

Do ponto de vista dinâmico, a força responsável pelo movimento é a força gravitacional; de acordo com a lei de gravitação universal de Newton, a força que actua sobre o planeta vem dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\rho^2} \hat{\rho} = -\frac{GMm}{a^2(1-e^2)^2} \times (1-e \cos \varphi)^2 [(\cos \varphi) \hat{x} + (\sin \varphi) \hat{y}], \quad (15)$$

onde  $m$  é a massa do planeta.<sup>5</sup>

A energia cinética  $T$  do planeta e a energia potencial gravítica  $U$  do sistema são

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \implies T = GMm \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2a} \right) = \left( \frac{1+e^2-2e \cos \varphi}{1-e^2} \right) \frac{GMm}{2a} \quad (16)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{d\rho} \hat{\rho} \implies U = -\frac{GMm}{\rho} = -\left( \frac{1-e \cos \varphi}{1-e^2} \right) \frac{GMm}{a}. \quad (17)$$

A energia mecânica

$$E = T + U = -\frac{GMm}{2a} \quad (18)$$

é uma das constantes do movimento. A outra é o momento angular do planeta em relação ao Sol,

$$\ell = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\sqrt{GMa(1-e^2)} \hat{z}, \quad (19)$$

como se prova a partir da Eq. (3) e das Eqs. (11) ou (12).

### 3. Médias da distância Sol-planeta

Nesta secção calculamos três médias associadas à distância Sol-planeta. A distância de referência é  $a$ ; o planeta encontra-se a uma distância  $a$  do Sol quando passa pelas posições que estão directamente por cima e directamente

<sup>4</sup>A massa do planeta considera-se desprezável em relação à do Sol. Na expressão rigorosamente exacta da Eq. (10), a massa  $M$  é substituída por  $M+m$ , sendo  $m$  a massa do planeta.

<sup>5</sup>A expressão (15) pode também ser deduzida derivando a Eq. (11) ou a Eq. (12) com respeito ao tempo para obter a aceleração do planeta, e usando depois a segunda lei de Newton para calcular a força.

por baixo do centro da elipse.

1. Média angular. Temos (ver integral  $I_{15}$  em [www3](#))

$$\langle \rho \rangle_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e\cos\varphi} d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{2\pi} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2} = b.$$

As duas posições angulares  $\varphi_1$  (simétricas em relação ao eixo maior da elipse) para as quais o planeta se encontra separado do Sol por esta distância satisfazem

$$\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\varphi_1} = b \implies \cos\varphi_1 = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}} = \frac{a-b}{c} = \frac{c}{a+b} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}. \quad (20)$$

2. Média espacial. Temos (ver integral  $I_{26}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L \rho ds = \frac{1}{4aE(e)} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\varphi} \right] \left[ a(1-e^2) \frac{\sqrt{1+e^2-2e\cos\varphi}}{(1-e\cos\varphi)^2} d\varphi \right] \\ &= \frac{a(1-e^2)^2}{4E(e)} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+e^2-2e\cos\varphi}}{(1-e\cos\varphi)^3} d\varphi = \frac{a(1-e^2)^2}{4E(e)} \frac{4E(e)}{(1-e^2)^2} = a. \end{aligned} \quad (21)$$

As duas posições angulares  $\varphi_2$  (simétricas em relação ao eixo maior da elipse) para as quais o planeta se encontra separado do Sol por esta distância satisfazem

$$\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\varphi_2} = a \implies \cos\varphi_2 = e = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (22)$$

3. Média temporal. Temos (ver integral  $I_{18}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle_t &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \rho dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\varphi} \right] \left[ \frac{\tau(1-e^2)^{3/2}}{2\pi(1-e\cos\varphi)^2} d\varphi \right] = \frac{a(1-e^2)^{5/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-e\cos\varphi)^3} d\varphi = \\ &= \frac{a(1-e^2)^{5/2}}{2\pi} \frac{(2+e^2)\pi}{(1-e^2)^{5/2}} \frac{a(2+e^2)}{2} = a + \frac{c^2}{2a} = \frac{2a^2+c^2}{2a} = \frac{3a^2-b^2}{2a} = \frac{3}{2}a - \frac{b^2}{2a}. \end{aligned} \quad (23)$$

Como foi referido na introdução, esta média é especialmente relevante na descrição do átomo de hidrogénio através do modelo de Bohr-Sommerfeld.

As duas posições angulares  $\varphi_3$  (simétricas em relação ao eixo maior da elipse) para as quais o planeta se encontra separado do Sol por esta distância satisfazem

$$\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\varphi_3} = a \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \implies \cos\varphi_3 = \frac{3e}{2+e^2} = \frac{3ac}{2a^2+c^2} = \frac{3ac}{3a^2-b^2}. \quad (24)$$

Uma conclusão pode ser então retirada: quando, em muitos livros de texto, se enuncia a terceira lei de Kepler tal como o próprio Kepler a formulou originalmente, em termos da distância média planeta-Sol, *a média que está implícita é a média espacial*. Esta era a média que Kepler tinha em mente. Vejamos porquê.

A média espacial está relacionada com a geometria da trajetória, e pode ser obtida de uma forma muito mais simples usando as propriedades da elipse e apelando à simetria. Efectivamente, lembremos que a soma das distâncias de qualquer ponto  $P$  da elipse aos seus dois focos  $F$  e  $F'$  é constante, igual ao eixo maior da elipse (Fig. 2):  $\rho + \rho' = 2a$ . Tomando médias espaciais a esta expressão, resulta  $\langle \rho \rangle_s + \langle \rho' \rangle_s = 2a$ . Mas, por simetria,  $\langle \rho \rangle_s = \langle \rho' \rangle_s$ , de modo que  $\langle \rho \rangle_s = \langle \rho' \rangle_s = a$ .

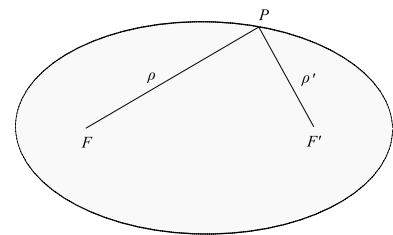


Figura 2 - Determinação geométrica da média espacial da distância Sol-planeta.

As três médias aqui calculadas podem ser postas por ordem crescente

$$\langle \rho \rangle_\varphi \leq \langle \rho \rangle_s \leq \langle \rho \rangle_t \quad (25)$$

e só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ). A Fig. 3 mostra as três médias em função da excentricidade da órbita do planeta.

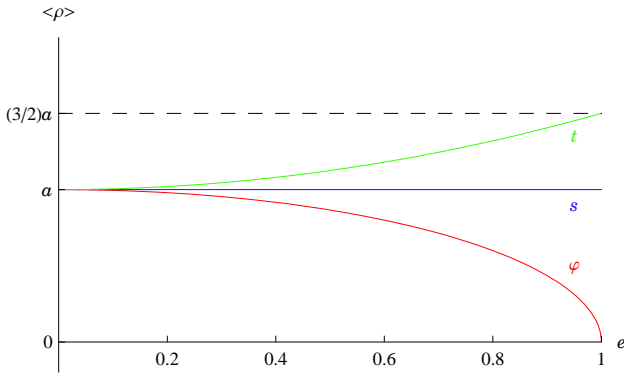


Figura 3 - Distâncias médias.

Que  $\langle \rho \rangle_t \geq \langle \rho \rangle_s$  percebe-se pelo facto de o planeta passar mais tempo no lado direito da elipse (onde está mais afastado do Sol e move-se com menor celeridade) do que no lado esquerdo, onde está mais próximo do Sol e move-se com maior celeridade.

1. Média angular. Temos<sup>6</sup>

$$\langle x \rangle_\varphi = \frac{\langle \rho \rangle_\varphi - a(1 - e^2)}{e} = \frac{b - a \frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{ba - b^2}{c} = \frac{b(a - b)}{c}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \langle y \rangle_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \sin \varphi \, d\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{1 - e \cos \varphi} \, d\varphi \\ &= \frac{a(1 - e^2)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \phi}{1 + e \cos \phi} \, d\phi = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

2. Média espacial. Temos<sup>5</sup>

$$\langle x \rangle_s = \frac{\langle \rho \rangle_s - a(1 - e^2)}{e} = \frac{a - a + ae^2}{e} = ae = c, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \langle y \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L y \, ds = \frac{1}{L} \int_0^L \rho \sin \varphi \, ds = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{4aE(e)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \varphi}}{(1 - e \cos \varphi)^3} \, d\varphi \\ &= -\frac{a(1 - e^2)^2}{4E(e)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \phi \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \phi}}{(1 + e \cos \phi)^3} \, d\phi = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

3. Média temporal. Temos<sup>5</sup>

$$\langle x \rangle_t = \frac{\langle \rho \rangle_t - a(1 - e^2)}{e} = \frac{a \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) - a(1 - e^2)}{e} = \frac{3}{2}ae = \frac{3}{2}c, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \langle y \rangle_t &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau y \, dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \rho \sin \varphi \, dt = \frac{a(1 - e^2)^{5/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{(1 - e \cos \varphi)^3} \, d\varphi \\ &= -\frac{a(1 - e^2)^{5/2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \phi}{(1 + e \cos \phi)^3} \, d\phi = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Que  $\langle \rho \rangle_\varphi \leq \langle \rho \rangle_s$  percebe-se pelo facto de o lado direito da elipse estar associado a um intervalo angular menor do que o lado esquerdo.

#### 4. Médias do vector posição do planeta

Nesta secção calculamos três médias associadas ao vector posição  $\mathbf{r} = (x, y)$  do planeta. Começamos por observar que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi} \iff \rho - e\rho \cos \varphi = \\ a(1 - e^2) &\iff \rho - ex = a(1 - e^2), \end{aligned} \quad (26)$$

de modo que, fazendo (quaisquer) médias,

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle - e\langle x \rangle &= a(1 - e^2) \iff \\ \langle x \rangle &= \frac{\langle \rho \rangle - a(1 - e^2)}{e}. \end{aligned} \quad (27)$$

Assim, os valores de  $\langle x \rangle$  podem ser obtidos a partir dos resultados da secção anterior. Para calcular  $\langle y \rangle$ , procedemos por integração, se bem que os resultados (nulos) são facilmente previsíveis devido à simetria do problema em relação ao eixo maior.

<sup>6</sup>No segundo cálculo, fizemos a substituição  $\varphi = \phi + \pi$  (ver [www2](#)) e observámos que o integrando era uma função ímpar de  $\phi$ .

Note-se que  $\langle x \rangle_i = \langle \rho \rangle_i \cos \varphi_i$  para  $i = 1(\varphi), 2(s), 3(t)$ : a média  $i$  do vector posição pode ser obtida projectando sobre o eixo maior os pontos da elipse definidos pelo ângulo  $\varphi_i$ , pontos em que a distância Sol-planeta é igual à média  $i$  da distância Sol-planeta. Resumindo,

$$\langle \mathbf{r} \rangle_\varphi = \frac{b(a-b)}{c} \hat{x}, \quad \langle \mathbf{r} \rangle_s = c \hat{x}, \quad \langle \mathbf{r} \rangle_t = \frac{3}{2} c \hat{x}. \quad (34)$$

Note-se que  $\langle \mathbf{r} \rangle_s$  localiza o centro da elipse; este resultado era de esperar, por simetria. As três médias da coordenada  $x$  do vector posição satisfazem

$$\langle x \rangle_\varphi \leq \langle x \rangle_s \leq \langle x \rangle_t, \quad (35)$$

e só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ). A Fig. 4 mostra as três médias em função da excentricidade da órbita do planeta.

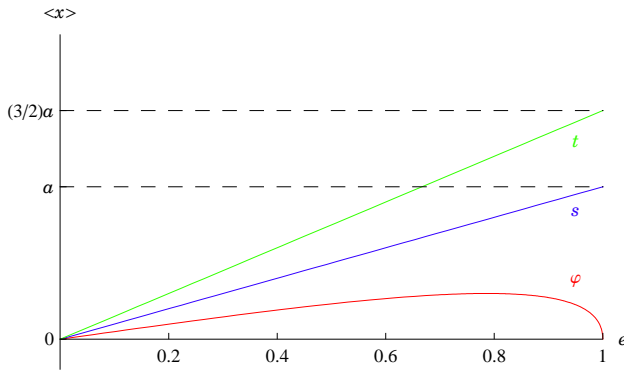


Figura 4 - Médias da coordenada  $x$  do vector posição, a qual determina o vector posição médio.

A Fig. 5 mostra uma construção geométrica simples baseada nos resultados das duas últimas secções. Esta construção permite visualizar as três distâncias médias a partir dos vectores posição médios. A média angular do vector posição é representada pelo vector  $\mathbf{FB}$ , a média espacial pelo vector  $\mathbf{FC}$ , e a média temporal pelo vector  $\mathbf{FD}$ .

Os pontos  $C$  e  $D$  estão claramente definidos na figura; o primeiro é o centro da elipse, o segundo é o ponto médio entre o centro da elipse e o foco  $F'$  onde não está o Sol. Relativamente ao ponto  $B$ , vale a pena observar que

$$\overline{BC} = c - \frac{b(a-b)}{c} = \frac{c^2 - ab + b^2}{c} = \frac{a^2 - ab}{c} = \frac{a(a-b)}{c},$$

de modo que

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{b(a-b)}{c}}{\frac{a(a-b)}{c}} = \frac{b}{a}, \quad (36)$$

ou seja, o ponto  $B$  divide o segmento  $[FC]$  em dois segmentos cujos comprimentos estão na proporção  $b/a$ , a mesma proporção entre os eixos menor e maior da elipse.

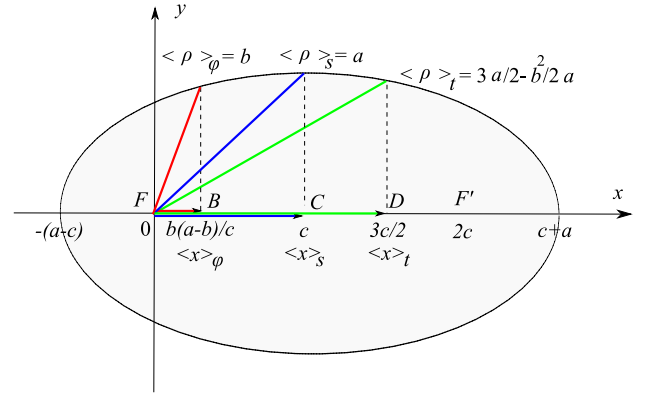


Figura 5 - Distâncias médias e vectores posição médios.

## 5. Médias do inverso da distância Sol-planeta

Nesta secção calculamos três médias associadas ao inverso da distância Sol-planeta. Estas médias serão úteis nas próximas secções. A referência para efeitos do inverso da distância é  $1/a$ .

1. Média angular. Temos (ver integral  $I_{12}$  em [www3](#))

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} d\varphi = \frac{1}{2\pi a(1-e^2)} \times \int_0^{2\pi} (1-e \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{a(1-e^2)} = \frac{a}{b^2}. \quad (37)$$

As duas posições angulares  $\varphi_4$  onde o planeta se encontra separado do Sol pela distância  $a(1-e^2)$  são

$$\frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi_4} = a(1-e^2) \implies \cos \varphi_4 = 0 \implies \varphi_4 = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \varphi_4 = \frac{3\pi}{2}. \quad (38)$$

A distância  $a(1-e^2)$  é muitas vezes designada por *semilactus rectum* e é a média harmónica entre  $\rho_{\max}$  e  $\rho_{\min}$ . Corresponde à coordenada  $y$  do ponto onde a elipse intersecta o eixo  $y$  positivo na Fig. 5.

2. Média espacial. Temos (ver integral  $I_{23}$  em [www3](#))

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_s = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{\rho} ds = \frac{1}{4aE(e)} \times \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}}{1-e \cos \varphi} d\varphi = \frac{4K(e)}{4aE(e)} = \frac{1}{a} \frac{K(e)}{E(e)}, \quad (39)$$

onde  $K(e)$  é o integral elíptico completo de primeiro tipo (ver [www1](#)).

As duas posições angulares  $\varphi_5$  (simétricas em relação ao eixo maior da elipse) onde o planeta se encontra separado do Sol pela distância  $a \frac{E(e)}{K(e)}$  satisfazem

$$\frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi_5} = a \frac{E(e)}{K(e)} \implies \cos \varphi_5 = \frac{1}{e} \left[ 1 - \frac{(1-e^2)K(e)}{E(e)} \right]. \quad (40)$$

3. Média temporal. Temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_t &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{\rho} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2 \tau}{2\pi ab} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi ab} \int_0^{2\pi} \rho d\varphi = \frac{1}{ab} \langle \rho \rangle_\varphi = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (41)$$

As duas posições angulares  $\varphi_6$  (simétricas em relação ao eixo maior da elipse) onde o planeta se encontra separado do Sol pela distância  $a$  satisfazem

$$\frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi_6} = a \implies \cos \varphi_6 = e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \cos \varphi_2. \quad (42)$$

## 6. Médias do quadrado da velocidade do planeta

Nesta secção aproveitamos os resultados da secção anterior para calcular três médias associadas ao quadrado da velocidade do planeta (três velocidades quadráticas médias). A velocidade quadrática de referência é  $GM/a$ ; o planeta tem uma velocidade quadrática igual a este valor quando se encontra directamente por cima (ou directamente por baixo) do centro da elipse na Fig. 1. Partindo da relação (13), temos, qualquer que seja a média,

$$\langle v^2 \rangle = 2GM \left( \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle - \frac{1}{2a} \right). \quad (43)$$

1. Média angular. Temos

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle_\varphi &= 2GM \left( \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_\varphi - \frac{1}{2a} \right) = \\ 2GM \left( \frac{1}{(1-e^2)a} - \frac{1}{2a} \right) &= \left( \frac{1+e^2}{1-e^2} \right) \frac{GM}{a}. \end{aligned} \quad (44)$$

2. Média espacial. Temos

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle_s &= 2GM \left( \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_s - \frac{1}{2a} \right) = \\ 2GM \left( \frac{1}{a} \frac{K(e)}{E(e)} - \frac{1}{2a} \right) &= \left[ 2 \frac{K(e)}{E(e)} - 1 \right] \frac{GM}{a}. \end{aligned} \quad (45)$$

3. Média temporal. Temos

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle_t &= 2GM \left( \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_t - \frac{1}{2a} \right) = \\ 2GM \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} \right) &= \frac{GM}{a}. \end{aligned} \quad (46)$$

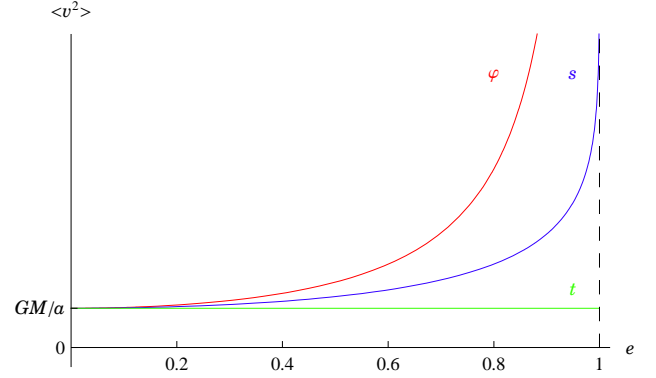


Figura 6 - Velocidades quadráticas médias.

Estas três médias satisfazem

$$\langle v^2 \rangle_t \leq \langle v^2 \rangle_s \leq \langle v^2 \rangle_\varphi \quad (47)$$

e só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ). A Fig. 6 mostra as três médias em função da excentricidade da órbita do planeta.

## 7. Médias da energia cinética do planeta e da energia potencial gravítica do sistema Sol-planeta

Nesta secção usamos os resultados das duas secções anteriores para calcular três médias associadas à energia cinética  $T$  do planeta e à energia potencial gravítica  $U$  do sistema Sol-planeta. Partindo das Eqs. (16) e (17), temos, qualquer que seja a média,

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \quad \text{e} \quad \langle U \rangle = -GMm \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle. \quad (48)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\varphi &= \left( \frac{1+e^2}{1-e^2} \right) \frac{GMm}{2a} \quad \text{e} \\ \langle U \rangle_\varphi &= -\frac{GMm}{(1-e^2)a}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_s &= \left[ 2 \frac{K(e)}{E(e)} - 1 \right] \frac{GMm}{2a} \quad \text{e} \\ \langle U \rangle_s &= -\frac{K(e)}{E(e)} \frac{GMm}{a}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_t &= \frac{GMm}{2a} \quad \text{e} \\ \langle U \rangle_t &= -\frac{GMm}{a}. \end{aligned} \quad (51)$$

Em particular, a relação  $\langle U \rangle_t = -2\langle T \rangle_t$  traduz o conhecido *teorema do virial* [1b]. Sendo a energia mecânica constante [ver Eq. (18)], o seu valor médio é, em todos os casos,  $\langle E \rangle = -\frac{GMm}{2a}$ . Este valor pode ser usado como valor de referência para as energias.

Na Fig. 7 estão representados estes resultados.

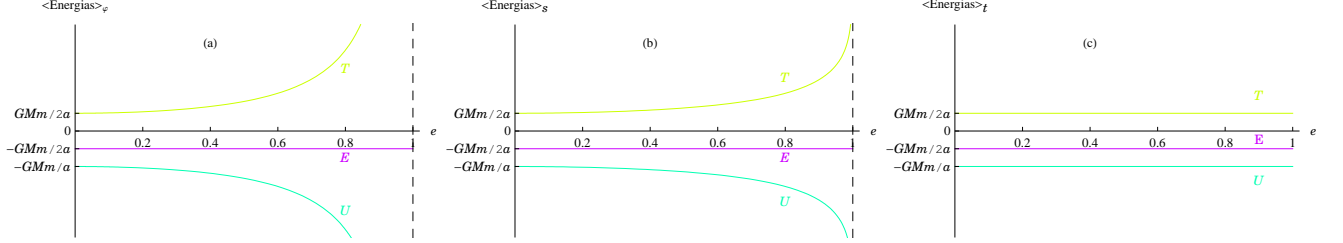


Figura 7 - Energias médias.

1. angular. Temos (ver integral  $I_{21}$  em [www3](#))

$$\langle v \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v d\varphi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+e^2-2e\cos\varphi} d\varphi = \frac{2[2E(e) - (1-e^2)K(e)]}{\pi\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (52)$$

2. Média espacial. Temos (ver integral  $I_{19}$  em [www3](#))

$$\langle v \rangle_s = \frac{1}{L} \int_0^L v ds = \frac{\sqrt{1-e^2}}{4E(e)} \sqrt{\frac{GM}{a}} \int_0^{2\pi} \frac{1+e^2-2e\cos\varphi}{(1-e\cos\varphi)^2} d\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{4E(e)} \sqrt{\frac{GM}{a}} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\pi}{2E(e)} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (53)$$

3. Média temporal. Temos (ver integral  $I_{24}$  em [www3](#))

$$\langle v \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v dt = \frac{1-e^2}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a}} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+e^2-2e\cos\varphi}}{(1-e\cos\varphi)^2} d\varphi = \frac{1-e^2}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a}} \frac{4E(e)}{1-e^2} = \frac{2E(e)}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (54)$$

Vale a pena observar que

$$\tau \langle v \rangle_t = \left[ 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \right] \left[ \frac{2E(e)}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{a}} \right] = 4aE(e) = L, \quad (55)$$

relação que teria permitido obter  $\langle v \rangle_t$  de uma forma mais expedita.

Note-se que a celeridade de referência é precisamente  $\sqrt{\langle v^2 \rangle_t}$ , e que pode ser obtida fazendo a média geométrica entre as celeridades no afélio e no periélio [ver Eq. (14)], ou entre as celeridades médias espacial e temporal

$$\sqrt{v_{\min} v_{\max}} = \sqrt{\langle v \rangle_s \langle v \rangle_t} = \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (56)$$

As três médias nas Eqs. (52)-(54) satisfazem

$$\langle v \rangle_t \leq \langle v \rangle_s \leq \langle v \rangle_\varphi, \quad (57)$$

e só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ). A Fig. 8 mostra estas três médias em função da excentricidade da órbita do planeta.

## 8. Médias da celeridade do planeta

Nesta secção calculamos três médias associadas à celeridade  $v$  do planeta. A celeridade de referência é  $\sqrt{GM/a}$ ; o planeta tem esta celeridade quando se encontra directamente por cima (ou directamente por baixo) do centro da elipse na Fig. 1.

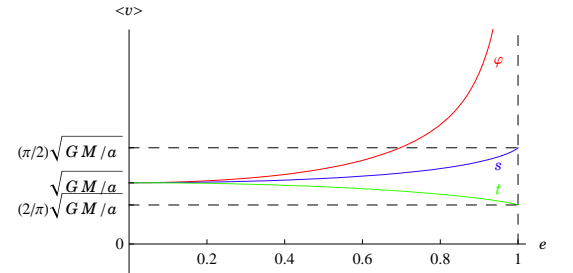


Figura 8 - Celeridades médias.

## 9. Médias do vector velocidade do planeta

Nesta secção calculamos várias médias associadas ao vector velocidade  $\mathbf{v}$  do planeta. Começemos pelas componentes cartesianas. Por simetria, a componente segundo  $x$  do vector velocidade média deve ser nula, restando apenas a componente segundo  $y$ ; verificaremos isso mesmo por integração directa. Para tal, partimos da Eq. (11).



1. Média angular. Temos (ver integral  $I_{11}$  em [www3](#))

$$\langle v_x \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_x d\varphi = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (58)$$

$$\langle v_y \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_y d\varphi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - e) d\varphi = -\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (59)$$

O planeta tem uma velocidade de componente  $v_y = \langle v_y \rangle_\varphi$  quando está directamente por cima ou directamente por baixo do Sol na Fig. 1 ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ou  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ).

2. Média espacial. Temos (ver integral  $I_{25}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle v_x \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L v_x ds = -\frac{1}{4E(e)} \sqrt{\frac{GM(1-e^2)}{a}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi \sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}}{(1-e \cos \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{4E(e)} \sqrt{\frac{GM(1-e^2)}{a}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \phi \sqrt{1+e^2+2e \cos \phi}}{(1+e \cos \phi)^2} d\phi = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \langle v_y \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L v_y ds = \frac{1}{4E(e)} \sqrt{\frac{GM(1-e^2)}{a}} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \varphi - e) \sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}}{(1-e \cos \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{E(e)} \sqrt{\frac{GM(1-e^2)}{a}} \frac{E(e) - K(e)}{e} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[ \frac{K(e)}{E(e)} - 1 \right] \sqrt{\frac{GM}{a}}. \end{aligned} \quad (61)$$

3. Média temporal. Temos (ver integral  $I_{17}$  em [www3](#))

$$\langle v_x \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v_x dt = -\frac{1-e^2}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{(1-e \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{1-e^2}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \phi}{(1+e \cos \phi)^2} d\phi = 0, \quad (62)$$

$$\langle v_y \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v_y dt = \frac{1-e^2}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi - e}{(1-e \cos \varphi)^2} d\varphi = 0. \quad (63)$$

O planeta tem uma velocidade de componente  $v_y = \langle v_y \rangle_t$  quando está directamente por cima ou directamente por baixo do centro da elipse na Fig. 1. Nos cálculos de  $\langle v_x \rangle_s$  e  $\langle v_x \rangle_t$ , fizemos a mudança de variável  $\varphi = \phi + \pi$  (ver [www2](#)) e observámos que os integrandos eram funções ímpares de  $\phi$ . Resumindo,

$$\langle \mathbf{v} \rangle_\varphi = -\frac{e}{1-e^2} \sqrt{\frac{GM}{a}} \hat{y}, \quad \langle \mathbf{v} \rangle_s = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[ \frac{K(e)}{E(e)} - 1 \right] \sqrt{\frac{GM}{a}} \hat{y}, \quad \langle \mathbf{v} \rangle_t = \mathbf{0}. \quad (64)$$

O terceiro resultado era de esperar já que a trajectória do planeta é fechada.

Os valores absolutos das três médias da componente  $y$  do vector velocidade satisfazem

$$\langle |v_y| \rangle_t \leq \langle |v_y| \rangle_s \leq \langle |v_y| \rangle_\varphi, \quad (65)$$

(ver Fig. 9); eles só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ).

Que as médias  $\langle v_y \rangle_\varphi$  e  $\langle v_y \rangle_s$  sejam negativas percebe-se do ponto de vista geométrico: resulta de o movimento do planeta ser anti-horário e de ele se movimentar mais rápido quando está próximo do Sol (lado esquerdo da Fig. 1). Que  $\langle v_y \rangle_t$  seja zero significa que este efeito é anulado pelo facto de o planeta passar menos tempo nessa região.

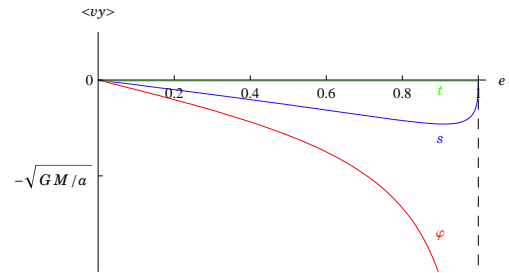


Figura 9 - Médias da componente  $y$  do vector velocidade, a qual determina o vector velocidade média.

Passemos agora às componentes radial  $v_\rho$  e angular  $v_\varphi$  do vector velocidade. Sendo a órbita fechada, espera-se que a média da componente radial seja nula. Observa-se, comparando as Eqs. (1), (11) e (12), que  $v_\rho = ev_x$  e  $v_\varphi = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{\rho}$ .

1. Média angular. Temos

$$\langle v_\rho \rangle_\varphi = e \langle v_x \rangle_\varphi = 0, \quad (66)$$

$$\langle v_\varphi \rangle_\varphi = \sqrt{GMa(1-e^2)} \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_\varphi = \sqrt{GMa(1-e^2)} \frac{1}{a(1-e^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (67)$$

Refira-se que  $\langle v_\varphi \rangle_\varphi$  é a média aritmética entre as celeridades no afélio e no periélio [ver Eq. (14)]:  $\langle v_\varphi \rangle_\varphi = (v_{\min} + v_{\max})/2$ .

2. Média espacial. Temos

$$\langle v_\rho \rangle_s = e \langle v_x \rangle_s = 0, \quad (68)$$

$$\langle v_\varphi \rangle_s = \sqrt{GMa(1-e^2)} \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_s = \sqrt{GMa(1-e^2)} \frac{1}{a} \frac{K(e)}{E(e)} = \sqrt{1-e^2} \frac{K(e)}{E(e)} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (69)$$

3. Média temporal.

$$\langle v_\rho \rangle_t = e \langle v_x \rangle_t = 0, \quad (70)$$

$$\langle v_\varphi \rangle_t = \sqrt{GMa(1-e^2)} \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle_t = \sqrt{GMa(1-e^2)} \frac{1}{a} = \sqrt{1-e^2} \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (71)$$

Refira-se que  $\langle v_\varphi \rangle_t$  é a média harmónica entre as celeridades no afélio e no periélio [ver Eq. (14)]:  $\frac{2}{\langle v_\varphi \rangle_t} = \frac{1}{v_{\min}} + \frac{1}{v_{\max}}$ . Vale a pena também observar que

$$\tau \langle v_\varphi \rangle_t = \left( 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \right) \left( \sqrt{1-e^2} \sqrt{\frac{GM}{a}} \right) = 2\pi a \sqrt{1-e^2} = 2\pi b. \quad (72)$$

Confirma-se assim que as três médias associadas à componente radial do vector velocidade são nulas. Quanto às médias da componente angular, refira-se que a média geométrica entre a média angular e a média temporal dá a celeridade de referência:  $\sqrt{\langle v_\varphi \rangle_\varphi \langle v_\varphi \rangle_t} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$ . Além disso, as três médias da componente angular satisfazem

$$\langle v_\varphi \rangle_t \leq \langle v_\varphi \rangle_s \leq \langle v_\varphi \rangle_\varphi, \quad (73)$$

e só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ). A Fig. 10 mostra estas três médias em função da excentricidade da órbita do planeta.

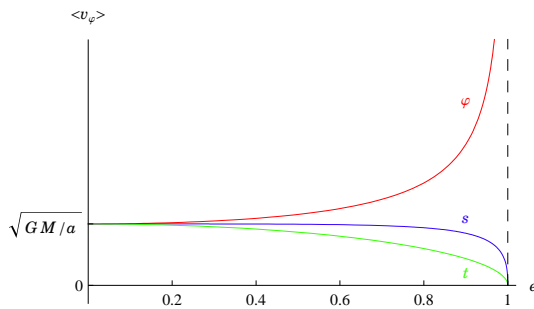


Figura 10 - Médias da componente angular do vector velocidade.

## 10. Médias da velocidade angular do planeta em torno do Sol

Nesta secção calculamos três médias associadas à velocidade angular do planeta.

Da combinação da Eq. (8) com a Eq. (10) resulta

$$\omega = \sqrt{GMa(1-e^2)} \frac{1}{\rho^2} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \frac{(1-e \cos \varphi)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad (74)$$

peço que, para qualquer média,

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \sqrt{GMa(1-e^2)} \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}} \langle (1-e \cos \varphi)^2 \rangle. \end{aligned} \quad (75)$$

Assim, o valor de referência para a velocidade angular é  $\sqrt{GM/a^3}$ . A máxima velocidade angular é atingida no periélio, e a mínima no afélio.

1. Média angular. Temos (ver integral  $I_{13}$  em

[www3](#))

$$\langle \omega \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}} \int_0^{2\pi} (1-e \cos \varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}} (2+e^2)\pi = \frac{2+e^2}{2(1-e^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{GM}{a^3}}. \quad (76)$$

2. Média espacial. Temos (ver integral  $I_{21}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L \omega ds = \frac{1}{4E(e)} \sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{2E(e) - (1-e^2)K(e)}{E(e)\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \sqrt{1-e^2} \left[ \frac{2}{1-e^2} - \frac{K(e)}{E(e)} \right] \sqrt{\frac{GM}{a^3}}. \end{aligned} \quad (77)$$

3. Média temporal. Temos

$$\langle \omega \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \omega dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}. \quad (78)$$

Obviamente,  $\tau \langle \omega \rangle_t = 2\pi$ .

Estas três médias satisfazem

$$\langle \omega \rangle_t \leq \langle \omega \rangle_s \leq \langle \omega \rangle_\varphi \quad (79)$$

e só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ). A Fig. 11 mostra estas três médias em função da excentricidade da órbita do planeta.

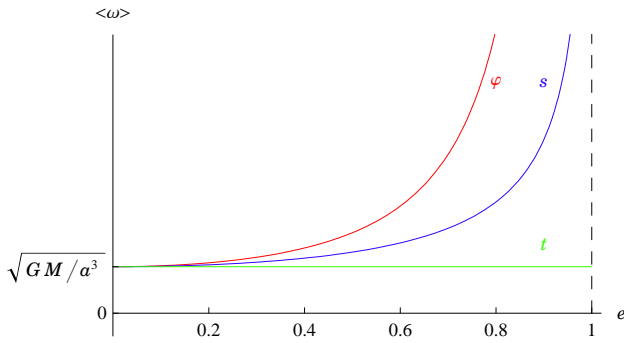


Figura 11 - Médias da velocidade angular do planeta em torno do Sol.

### 11. Médias da magnitude da força que actua sobre o planeta

Nesta secção aproveitamos os resultados da secção anterior para calcular três médias associadas à magnitude da força que actua sobre o planeta. Uma vez que a magnitude dessa força vem dada por  $F = \frac{GMm}{\rho^2}$ , resulta, para qualquer média [ver Eq. (75)]

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= GMm \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle = GMm \frac{1}{\sqrt{GMa(1-e^2)}} \langle \omega \rangle = \\ &= m \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \langle \omega \rangle. \end{aligned} \quad (80)$$

O valor de referência para a magnitude da força é  $GMm/a^2$ ; o planeta fica sujeito a uma força desta magnitude quando se encontra directamente por cima (ou directamente por baixo) do centro da elipse na Fig. 1.

1. Média angular. Temos

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_\varphi &= m \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \left[ \frac{2+e^2}{2(1-e^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \right] = \\ &= \frac{2+e^2}{2(1-e^2)^2} \frac{GMm}{a^2}. \end{aligned} \quad (81)$$

2. Média espacial. Temos

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_s &= m \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \times \\ &\left\{ \sqrt{1-e^2} \left[ \frac{2}{1-e^2} - \frac{K(e)}{E(e)} \right] \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \right\} = \\ &\left[ \frac{2}{1-e^2} - \frac{K(e)}{E(e)} \right] \frac{GMm}{a^2}. \end{aligned} \quad (82)$$

3. Média temporal. Temos

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_t &= m \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \left[ \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{GMm}{a^2} = \frac{GMm}{ab}. \end{aligned} \quad (83)$$

Este valor de força ocorre nos dois pontos da trajectória onde a distância do planeta ao Sol é a média geométrica entre os semieixos maior e menor.

Estas três médias estão representadas na Fig. 12 e satisfazem

$$\langle F \rangle_t \leq \langle F \rangle_\varphi \leq \langle F \rangle_s, \quad (84)$$

só coincidindo no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ).

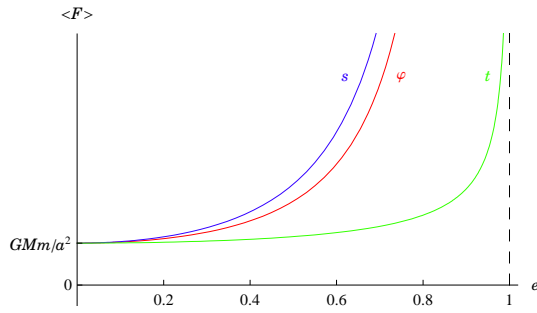


Figura 12 - Forças médias.

## 12. Médias do vector força que actua sobre o planeta

Nesta secção calculamos três médias associadas ao vector força  $\mathbf{F}$  que actua sobre o planeta. Por simetria, a componente segundo  $y$  do vector força média deve ser nula, restando apenas a componente segundo  $x$ ; verificaremos isso mesmo por integração directa. Para tal, partimos da Eq. (15).

1. Média angular. Temos (ver integral  $I_{14}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle F_x \rangle_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_x d\varphi = -\frac{GMm}{2\pi a^2 (1-e^2)^2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi (1-e \cos \varphi)^2 d\varphi \\ &= -\frac{GMm}{2\pi a^2 (1-e^2)^2} (-2\pi e) = \frac{e}{(1-e^2)^2} \frac{GMm}{a^2}, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \langle F_y \rangle_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_y d\varphi = -\frac{GMm}{2\pi a^2 (1-e^2)^2} \int_0^{2\pi} \sin \varphi (1-e \cos \varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{GMm}{2\pi a^2 (1-e^2)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \phi (1+e \cos \phi)^2 d\phi = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

2. Média espacial. Temos (ver integral  $I_{22}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle F_x \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L F_x ds = -\frac{GMm}{4a^2 (1-e^2) E(e)} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi} d\varphi = \\ &= -\frac{GMm}{4a^2 (1-e^2) E(e)} \left\{ \frac{-4[(1+e^2)E(e) - (1-e^2)K(e)]}{3e} \right\} = \frac{1}{3e} \left[ \frac{1+e^2}{1-e^2} - \frac{K(e)}{E(e)} \right] \frac{GMm}{a^2}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \langle F_y \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L F_y ds = -\frac{GMm}{4a^2 (1-e^2) E(e)} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{GMm}{4a^2 (1-e^2) E(e)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \phi \sqrt{1+e^2+2e \cos \phi} d\phi = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

3. Média temporal. Temos

$$\langle F_x \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_x dt = \frac{-GMm}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad (89)$$

$$\langle F_y \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_y dt = \frac{-GMm}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0. \quad (90)$$

Nos cálculos de  $\langle F_y \rangle_\varphi$  e  $\langle F_y \rangle_s$ , fizemos a mudança de variável  $\varphi = \phi + \pi$  (ver [www2](#)) e observámos que os integrandos eram funções ímpares de  $\phi$ .

Resumindo,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \rangle_\varphi &= \frac{e}{(1-e^2)^2} \frac{GMm}{a^2} \hat{x}, \\ \langle \mathbf{F} \rangle_s &= \frac{1}{3e} \left[ \frac{1+e^2}{1-e^2} - \frac{K(e)}{E(e)} \right] \frac{GMm}{a^2} \hat{x} \quad \langle \mathbf{F} \rangle_t = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (91)$$

Tal como no caso de  $\langle \mathbf{v} \rangle_t$ , o terceiro resultado era de esperar já que a trajectória do planeta é fechada (movimento periódico).

As três médias da componente  $x$  do vector força satisfazem

$$\langle F_x \rangle_t \leq \langle F_x \rangle_s \leq \langle F_x \rangle_\varphi \quad (92)$$

e só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ). A Fig. 13 mostra as três médias em

função da excentricidade da órbita do planeta.

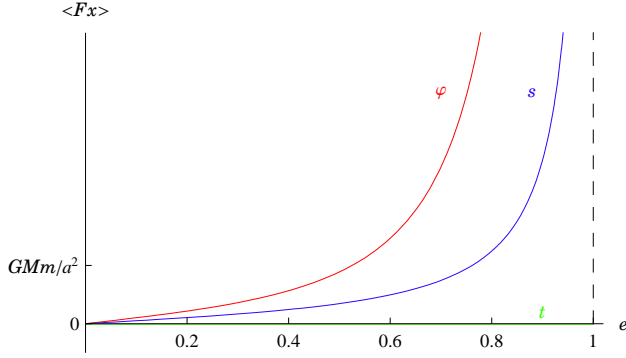


Figura 13 - Médias da componente  $x$  do vector força, a qual determina o vector força média.

Que as médias  $\langle F_x \rangle_\varphi$  e  $\langle F_x \rangle_s$  sejam positivas resulta de a força exercida sobre o planeta ser maior quando este se encontra perto do Sol (lado esquerdo da Fig. 1). Que  $\langle F_x \rangle_t$  seja zero significa que este efeito é exactamente anulado pelo facto de o planeta passar menos

tempo nessa região.

### 13. Médias associadas à aceleração do planeta

A segunda lei de Newton permite obter as médias, tanto para as componentes segundo  $x$  e  $y$  como para a magnitude, do vector aceleração  $\mathbf{a}$  do planeta; basta dividir os resultados das duas últimas secções por  $m$ . Nesta secção calculamos três médias associadas às componentes tangencial e normal deste vector aceleração. Esperase que qualquer média da componente tangencial seja nula, já que o planeta, no final de cada volta, tem a mesma celeridade que tinha no início. Verificaremos isso por integração directa. Naturalmente, o valor de referência para qualquer aceleração é  $\frac{GM}{a^2}$ .

Começamos por deduzir as respectivas expressões. Para a aceleração tangencial temos, por definição e usando as Eqs. (8), (10) e (13),

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \left[ \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \frac{e \sin \varphi}{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}} \right] \left[ \sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}} (1-e \cos \varphi)^2 \right] \\ &= \frac{GMe}{a^2(1-e^2)^2} \frac{\sin \varphi (1-e \cos \varphi)^2}{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}}. \end{aligned} \tag{93}$$

Para calcular a aceleração normal usamos o resultado anterior junto com a Eq. (15)

$$\begin{aligned} a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\left[ \frac{GM(1-e \cos \varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \right]^2 - \left[ \frac{GMe \sin \varphi (1-e \cos \varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2 \sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}} \right]^2} \\ &= \frac{GM(1-e \cos \varphi)^2}{a^2(1-e^2)^2} \sqrt{1 - \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{1+e^2-2e \cos \varphi}} = \frac{GM}{a^2(1-e^2)^2} \frac{(1-e \cos \varphi)^3}{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}}. \end{aligned} \tag{94}$$

Os respectivos vectores são dados por [ver Eqs. (11) e (12)]

$$\mathbf{a}_T = a_T [(-\sin \varphi)\hat{x} + (\cos \varphi - e)\hat{y}] = a_T [(-e \sin \varphi)\hat{\rho} + (1 - e \cos \varphi)\hat{\phi}], \tag{95}$$

$$\mathbf{a}_N = a_N [(e - \cos \varphi)\hat{x} + (-\sin \varphi)\hat{y}] = a_N [(e \cos \varphi - 1)\hat{\rho} + (-e \sin \varphi)\hat{\phi}]. \tag{96}$$

1. Média angular. Temos (ver integral  $I_{30}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle a_T \rangle_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_T d\varphi = \frac{GMe}{2\pi a^2(1-e^2)^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi (1-e \cos \varphi)^2}{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}} d\varphi \\ &= -\frac{GMe}{2\pi a^2(1-e^2)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \phi (1+e \cos \phi)^2}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \phi}} d\phi = 0, \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned} \langle a_N \rangle_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_N d\varphi = \frac{GM}{2\pi a^2(1-e^2)^2} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e \cos \varphi)^3}{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{2 [2(e^4 - e^2 + 16)E(e) - (1-e^2)(17-e^2)K(e)]}{15\pi(1-e^2)^2} \frac{GM}{a^2}. \end{aligned} \tag{98}$$

2. Média espacial. Temos (ver integral  $I_{12}$  em [www3](#))

$$\langle a_T \rangle_s = \frac{1}{L} \int_0^L a_T ds = \frac{GMe}{4a^2(1-e^2)E(e)} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0, \tag{99}$$

$$\langle a_N \rangle_s = \frac{1}{L} \int_0^L a_N ds = \frac{GM}{4a^2(1-e^2)E(e)} \int_0^{2\pi} (1-e \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2(1-e^2)E(e)} \frac{GM}{a^2}. \quad (100)$$

3. Média temporal. Temos (ver integral  $I_{29}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle a_T \rangle_t &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a_T dt = \frac{GM e}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}} d\varphi \\ &= -\frac{GM e}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin \phi}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \phi}} d\phi = 0, \end{aligned} \quad (101)$$

$$\langle a_N \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a_N dt = \frac{GM}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} \frac{1-e \cos \varphi}{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}} d\varphi = \frac{2E(e)}{\pi \sqrt{1-e^2}} \frac{GM}{a^2}. \quad (102)$$

Nos cálculos de  $\langle a_T \rangle_\varphi$  e  $\langle a_T \rangle_t$ , fizemos a mudança de variável  $\varphi = \phi + \pi$  (ver [www2](#)) e observámos que os integrandos eram funções ímpares de  $\phi$ .

Confirma-se assim que as três médias associadas à componente tangencial do vector aceleração são nulas. Quanto às médias da componente normal, elas satisfazem

$$\langle a_T \rangle_t \leq \langle a_T \rangle_s \leq \langle a_T \rangle_\varphi \quad (103)$$

e só coincidem no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ). A Fig. 14 mostra as três médias em função da excentricidade da órbita do planeta.

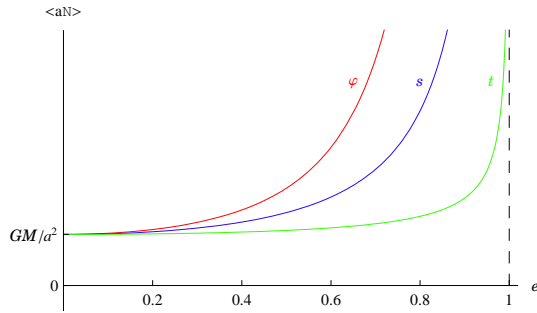


Figura 14 - Médias da componente normal do vector aceleração.

1. Média angular. Temos (ver integral  $I_{27}$  em [www3](#))

$$\langle R \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+e^2-2e \cos \varphi)^{3/2}}{(1-e \cos \varphi)^3} d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{2\pi} \frac{4E(e)}{1-e^2} = \frac{L}{2\pi} = \frac{2E(e)}{\pi} a. \quad (105)$$

2. Média espacial. Temos (ver integral  $I_{20}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle R \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L R ds = \frac{a(1-e^2)^2}{4E(e)} \int_0^{2\pi} \frac{(1+e^2-2e \cos \varphi)^2}{(1-e \cos \varphi)^5} d\varphi \\ &= \frac{a(1-e^2)^2}{4E(e)} \frac{(3e^4-8e^2+8)\pi}{4(1-e^2)^{5/2}} = \frac{(3e^4-8e^2+8)\pi}{16E(e)\sqrt{1-e^2}} a. \end{aligned} \quad (106)$$

Faz-se notar que esta média é uma *propriedade geométrica* da elipse.

3. Média temporal. Temos (ver integral  $I_{28}$  em [www3](#))

$$\begin{aligned} \langle R \rangle_t &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau R dt = \frac{a(1-e^2)^{5/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+e^2-2e \cos \varphi)^{3/2}}{(1-e \cos \varphi)^5} d\varphi \\ &= \frac{a(1-e^2)^{5/2}}{2\pi} \frac{4[2(2-e^2)E(e)-(1-e^2)K(e)]}{3(1-e^2)^3} = \frac{2[2(2-e^2)E(e)-(1-e^2)K(e)]}{3\pi\sqrt{1-e^2}} a. \end{aligned} \quad (107)$$

## 14. Médias do raio de curvatura da trajectória do planeta

Nesta secção calculamos três médias do raio de curvatura  $R$  da elipse descrita pelo planeta. Tendo em conta que  $a_N = \frac{v^2}{R}$ , combinando as Eqs. (13) e (94) obtém-se

$$\begin{aligned} R &= \frac{v^2}{a_N} = \frac{\frac{GM}{a(1-e^2)}(1+e^2-2e \cos \varphi)}{\frac{GM}{a^2(1-e^2)^2} \frac{(1-e \cos \varphi)^3}{\sqrt{1+e^2-2e \cos \varphi}}} = \\ &= a(1-e^2) \frac{(1+e^2-2e \cos \varphi)^{3/2}}{(1-e \cos \varphi)^3}. \end{aligned} \quad (104)$$

O valor de referência para o raio de curvatura é  $a$ . A expressão (104) permite mostrar que o mínimo raio de curvatura, atingido no afélio ( $\varphi = 0$ ) ou no periélio ( $\varphi = \pi$ ), é  $R_{\min} = a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}$  (o *semilactus rectum* referido na secção 5), e que o máximo raio de curvatura, atingido nos pontos da elipse que se encontram directamente por cima ou por baixo do centro da elipse da Fig. 1 (onde  $\cos \varphi = e$ ), é  $R_{\max} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b}$ .

As três médias do raio de curvatura da elipse mostram-se na Fig. 15; elas satisfazem

$$\langle R \rangle_\varphi \leq \langle R \rangle_t \leq \langle R \rangle_s, \quad (108)$$

e, embora só coincidam no caso especial de uma trajectória circular ( $e = 0$ ), são praticamente iguais (e iguais ao semieixo maior da elipse) para  $0 \leq e \leq 0.3$ .

## 15. Médias da aceleração angular do planeta

Nesta secção calculamos três médias associadas à aceleração angular  $\alpha$  do planeta. Partindo da Eq. (8) e usando a Eq. (10) obtemos

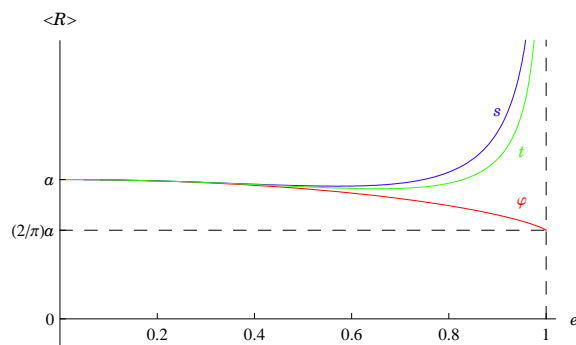


Figura 15 - Médias do raio de curvatura da trajectória do planeta.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{2GM_e}{a^3(1-e^2)^3} \sin \varphi (1 - e \cos \varphi)^3. \quad (109)$$

1. Média angular. Temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha d\varphi = \frac{GM_e}{\pi a^3(1-e^2)^3} \int_0^{2\pi} \sin \varphi (1 - e \cos \varphi)^3 d\varphi = \\ &= -\frac{GM_e}{\pi a^3(1-e^2)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \phi (1 + e \cos \phi)^3 d\phi = 0. \end{aligned} \quad (110)$$

2. Média espacial. Temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle_s &= \frac{1}{L} \int_0^L \alpha ds = \frac{GM_e}{2a^3(1-e^2)^2 E(e)} \int_0^{2\pi} \sin \varphi (1 - e \cos \varphi) \sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \varphi} d\varphi = \\ &= -\frac{GM_e}{2a^3(1-e^2)^2 E(e)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \phi (1 + e \cos \phi) \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \phi} d\phi = 0. \end{aligned} \quad (111)$$

3. Média temporal. Temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle_t &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \alpha dt = \frac{GM_e}{\pi a^3(1-e^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi (1 - e \cos \varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{GM_e}{\pi a^3(1-e^2)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \phi (1 + e \cos \phi) d\phi = 0. \end{aligned} \quad (112)$$

Uma média temporal nula era de esperar devido à periodicidade do movimento.

Nos três cálculos anteriores fizemos a mudança de variável  $\varphi = \phi + \pi$  (ver [www2](#)) e observámos que os integrandos eram funções ímpares de  $\phi$ .

## 16. Síntese de resultados

Na seguinte tabela são condensados os principais resultados obtidos neste trabalho. A primeira coluna contém

a quantidade física  $Q$ , a segunda contém o valor de referência associado  $q$ , e as três últimas contêm os factores multiplicativos  $f$  (funções da excentricidade  $e$ ) associados às médias angular, espacial e temporal, respectivamente.

Omitiram-se da tabela as médias de algumas acelerações e forças ( $a$ ,  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $F_T$  e  $F_N$ ) que podem ser obtidas directamente a partir das correspondentes médias de força e aceleração usando a segunda lei de Newton.

Tabela 1 - Síntese de resultados:  $\langle Q \rangle_\varphi = f_\varphi(e)q$ ,  $\langle Q \rangle_s = f_s(e)q$  e  $\langle Q \rangle_t = f_t(e)q$ .

$Q$	$q$	$f_\varphi(e)$	$f_s(e)$	$f_t(e)$
$\rho$	$a$	$\sqrt{1-e^2}$	1	$1 + \frac{1}{2}e^2$
$x$	$a$	$\frac{\sqrt{1-e^2} - (1-e^2)}{e}$	$e$	$\frac{3}{2}e$
$y$	$a$	0	0	0
$\frac{1}{\rho}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{1-e^2}$	$\frac{K(e)}{E(e)}$	1
$v^2$	$\frac{GM}{a}$	$\frac{1+e^2}{1-e^2}$	$2\frac{K(e)}{E(e)} - 1$	1
$T$	$\frac{GMm}{2a}$	$\frac{1+e^2}{1-e^2}$	$2\frac{K(e)}{E(e)} - 1$	1
$U$	$\frac{GMm}{2a}$	$\frac{-2}{1-e^2}$	$-2\frac{K(e)}{E(e)}$	-2
$E$	$\frac{GMm}{2a}$	-1	-1	-1
$v$	$\sqrt{\frac{GM}{a}}$	$\frac{4E(e) - 2(1-e^2)K(e)}{\pi\sqrt{1-e^2}}$	$\frac{\pi}{2E(e)}$	$\frac{2E(e)}{\pi}$
$v_x$	$\sqrt{\frac{GM}{a}}$	0	0	0
$v_y$	$\sqrt{\frac{GM}{a}}$	$\frac{-e}{\sqrt{1-e^2}}$	$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left[ \frac{K(e)}{E(e)} - 1 \right]$	0
$v_\rho$	$\sqrt{\frac{GM}{a}}$	0	0	0
$v_\varphi$	$\sqrt{\frac{GM}{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$	$\sqrt{1-e^2} \frac{K(e)}{E(e)}$	$\sqrt{1-e^2}$
$\omega$	$\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$	$\frac{2+e^2}{2(1-e^2)^{3/2}}$	$\sqrt{1-e^2} \left[ \frac{2}{1-e^2} - \frac{K(e)}{E(e)} \right]$	1
$F$	$\frac{GMm}{a^2}$	$\frac{2+e^2}{2(1-e^2)^2}$	$\frac{2}{1-e^2} - \frac{K(e)}{E(e)}$	$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$
$F_x$	$\frac{GMm}{a^2}$	$\frac{e}{(1-e^2)^2}$	$\frac{1}{3e} \left[ \frac{1+e^2}{1-e^2} - \frac{K(e)}{E(e)} \right]$	0
$F_y$	$\frac{GMm}{a^2}$	0	0	0
$a_T$	$\frac{GM}{a^2}$	0	0	0
$a_N$	$\frac{GM}{a^2}$	$\frac{4(e^4 - e^2 + 16)E(e) - 2(1-e^2)(17-e^2)K(e)}{15\pi(1-e^2)^2}$	$\frac{\pi}{2(1-e^2)E(e)}$	$\frac{2E(e)}{\pi\sqrt{1-e^2}}$
$R$	$a$	$\frac{2E(e)}{\pi}$	$\frac{(3e^4 - 8e^2 + 8)\pi}{16E(e)\sqrt{1-e^2}}$	$\frac{4(2-e^2)E(e) - 2(1-e^2)K(e)}{3\pi\sqrt{1-e^2}}$
$\alpha$	$\frac{GM}{a^3}$	0	0	0

## 17. Conclusões

Foi feita uma análise exaustiva das médias angular, espacial e temporal associadas a todas as quantidades físicas relevantes no movimento de um planeta em torno do Sol.

Verificou-se que a única distância média planeta-Sol que é igual ao semieixo maior  $a$  da elipse é a média espacial. Esta média espacial pode ser obtida por argumentos geométricos (era isto o que Kepler tinha em mente), e coincide com a média aritmética entre as distâncias máxima e mínima.

Relacionaram-se também as distâncias médias com os vectores posição médios correspondentes através de uma construção geométrica simples. Aplicando esta construção às médias temporais, é possível visualizar claramente a distância média entre um electrão e um protão no átomo de hidrogénio, com base no modelo de Bohr-Sommerfeld. Da análise das celeridades médias concluiu-se que a média geométrica entre as velocidades máxima e mínima coincide com a média geométrica entre as médias espacial e temporal da celeridade, sendo ambas iguais à raiz quadrada da média temporal da velocidade quadrática. Também a média geométrica entre as médias angular e temporal da componente angular da velocidade deu o mesmo valor.

O teorema do virial foi confirmado através do cálculo das médias temporais das energias cinética e potencial gravítica.

Condensando resultados, observamos que quantidades  $Q$  cujas médias são directamente proporcionais a  $a$  satisfazem  $\langle Q \rangle_\varphi \leq \langle Q \rangle_s \leq \langle Q \rangle_t$ , enquanto que quantidades  $Q'$  cujas médias são directamente proporcionais a  $a^{-1/2}$ ,  $a^{-1}$ ,  $a^{-3/2}$  ou  $a^{-2}$  satisfazem  $\langle Q' \rangle_t \leq \langle Q' \rangle_s \leq \langle Q' \rangle_\varphi$ . As únicas excepções são a média do raio de curvatura  $R$  (directamente proporcional a  $a$ ), para a qual  $\langle R \rangle_\varphi \leq \langle R \rangle_t \leq \langle R \rangle_s$ , e a média da magnitude  $F$  da força que actua sobre o planeta (directamente proporcional a  $a^{-2}$ ), para a qual  $\langle F \rangle_t \leq \langle F \rangle_\varphi \leq \langle F \rangle_s$ .

Como pode ver-se na tabela da secção anterior, quase um terço das médias obtidas são nulas, e cerca de outro terço tiveram de ser expressas através dos integrais elípticos completos  $E$  e  $K$ .

Foi desenvolvida uma abordagem sistemática na determinação dos integrais envolvidos no cálculo das médias.

## Referências

- [1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, San Francisco, 2002), 3rd ed., a:



- p. 101; b: Eq. (3.30), p. 86.
- [2] W. Greiner, *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity* (Springer, New York, 2004), p. 247.
- [3] J.L. Meriam and L.G. Kraige, *Engineering Mechanics, v. 2: Dynamics* (Wiley, New York, 2003), 5th ed., p. 227.
- [4] S.T. Thornton and J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Brooks/Cole, Belmont, 2004), 5th ed., p. 303.
- [5] Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (London, 1687), Book I, Section III, Proposition XV - Theorem VII, p. 56. Pode-se ver o original em [http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/book.cgi?call=531\\_N56P\\_1687](http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/book.cgi?call=531_N56P_1687).
- [6] C. Gerthsen, H.O. Kneser e H. Vogel, *Física* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1998), 2<sup>a</sup> ed., p. 46.
- [7] S.M. Lea and J.R. Burke, *Physics - The Nature of Things* (Brooks/Cole, Pacific Grove, 1997), p. 9 e 163.
- [8] R.A. Serway and J.W. Jewett, Jr., *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (Brooks/Cole, Belmont, 2004), p. 396.
- [9] M.M.R.R. Costa e M.J.B.M. de Almeida, *Fundamentos de Física*, 2<sup>a</sup> ed. (Almedina, Coimbra, 2004), p. 129.
- [10] J.D. de Deus, M. Pimenta, A. Noronha, T. Peña e P. Brogueira, *Introdução à Física* (McGraw-Hill, Lisboa, 2000), p. 156.
- [11] F.J. Keller, W.E. Gettys and M.J. Skove, *Physics* (McGraw-Hill, New York, 1993), 2nd ed., p. 156.
- [12] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica, v. 1 - Mecânica* (Edgard Blücher, São Paulo, 1996), 3<sup>a</sup> ed., p. 197.
- [13] R. Resnick, D. Halliday and K.S. Krane, *Physics, v. 1* (Wiley, New York, 2002), 5th ed., p. 312.
- [14] Johannes Kepler, *Harmonices Mundi* (1619), Book V, Chapter III, Proposition VIII, p. 189-190. Pode-se ver o original em [http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/book.cgi?call=520\\_K38PI](http://posner.library.cmu.edu/Posner/books/book.cgi?call=520_K38PI).
- [15] L.S. Lerner, *Physics for Scientists and Engineers* (Jones & Bartlett, Sudbury, Massachusetts, 1996), p. 366.
- [16] P.A. Tipler and G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers* (Freeman, New York, 2004), 5th ed. extended , p. 341.
- [17] A.P. French, *Newtonian Mechanics* (Norton, New York, 1971), p. 589.
- [18] F. Caruso e V. Oguri, *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos* (Elsevier, Rio de Janeiro, 2006), p. 381-407.
- [19] R. Eisberg y R. Resnick, *Física Cuántica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos y Partículas* (Editorial Limusa, México, 1979), p. 129-149.
- [20] A. Messiah, *Mecánica Cuántica, tomo I* (Editorial Tecnos, Madrid, 1973), pp. 31-35.
- [21] L. Pauling and E.B. Wilson, *Introduction to Quantum Mechanics with Applications to Chemistry* (McGraw-Hill, Tokyo, 1935), p. 36-47 e 112-150.
- [22] A.L. Fetter and J.D. Walecka, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua* (McGraw-Hill, New York, 1980), Eq. (3.20b), p. 14.