

# Campo elétrico na superfície de um condutor esférico e o recalcitrante fator 1/2

Electric field at the surface of a spherical conductor and the recalcitrant factor 1/2

Gustavo Elia Assad<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil.

Recebido em 9 de setembro de 2019. Revisado em 21 de janeiro de 2020. Aceito em 22 de janeiro de 2020.

O presente artigo trata, mais uma vez, do comportamento do campo elétrico de um condutor esférico carregado com ênfase para o valor do campo na superfície do mesmo. Este valor do campo elétrico na superfície de um condutor esférico tem sido discutido em alguns artigos recentemente publicados em revistas científicas e colocado em conflito alguns resultados clássicos, como o fato do campo elétrico ser descontínuo na superfície de um condutor esférico uniformemente carregado quando se admite uma distribuição superficial de cargas. Este artigo retoma a discussão, utilizando os mesmos modelos citados, mostrando uma análise sobre a busca e interpretação do insistente fator  $\frac{1}{2}$ . O valor do campo na superfície de um condutor esférico com carga uniformemente distribuída em sua superfície não é arbitrariamente dado por ele. O comportamento matemático do campo depende do modelo adotado.

**Palavras-chave:** campo elétrico, esfera carregada, descontinuidade.

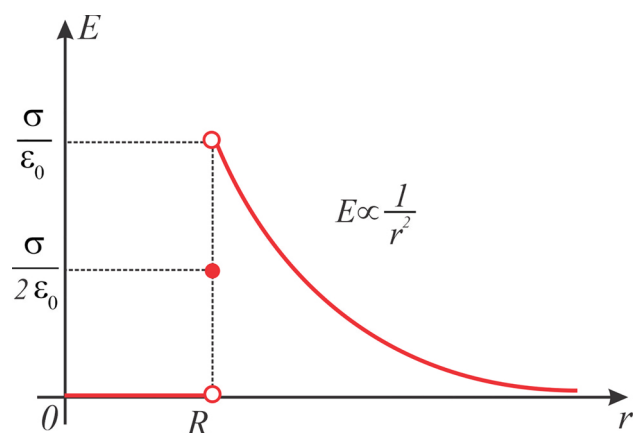
The present article deals, once again, with the electric field behavior of a charged spherical conductor with emphasis on the value of the field on its surface. This value of the electric field on the surface of a spherical conductor has been discussed in some articles recently published in scientific journals and has conflicted some classic results, such as the fact that the electric field is discontinuous on the surface of a uniformly charged spherical conductor when admitting a superficial charge distribution. This article resumes the discussion, using the same models mentioned, showing an analysis of the search and interpretation of the insistent factor  $\frac{1}{2}$ . The value of the field on the surface of a spherical conductor with uniformly distributed charge on its surface is not arbitrarily given by it. The mathematical behavior of the field depends on the model adopted.

**Keywords:** electric field, charged sphere, discontinuity.

## 1. Introdução

O valor do campo elétrico na superfície de um condutor esférico tem sido discutido em alguns artigos recentemente publicados em revistas científicas e colocado em conflito alguns resultados clássicos, como o fato do campo elétrico ser descontínuo na superfície de um condutor esférico uniformemente carregado quando se admite uma distribuição superficial de cargas. Para ser mais direto, alguns artigos utilizam modelos matemáticos interessantes que propõem o valor  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  para o valor do campo elétrico em um ponto exatamente sobre a superfície de um condutor esférico com distribuição superficial uniforme de cargas, como Slodkowski *et al*, Lima e Al-Jaber & Saadeddin [1-3]. O presente artigo retoma a discussão, utilizando os mesmos modelos citados, para mostrar que o resultado com o fator  $\frac{1}{2}$ , que aparece no valor do campo na superfície das referências indicadas acima, é arbitrário e não representa qualificadamente o campo desta distribuição superficial de cargas, ou ainda, que o comportamento do

campo não pode ser descrito como na Figura 1, conforme ratificado por [4].



**Figura 1:** Campo devido a uma esfera condutora de raio  $R$ , como função da distância  $r$  com relação ao seu centro, desprezando-se a espessura da região onde se concentra o excesso de cargas [1].

\*Endereço de correspondência: [gustavo.elia.assad@gmail.com](mailto:gustavo.elia.assad@gmail.com).

## 2. Modelo 1: casca esférica com distribuição “regular” de cargas

Neste modelo, supomos o campo elétrico gerado por uma esfera carregada uniformemente, considerando que a carga líquida, em escala atômica, distribui-se em uma nuvem eletrônica com densidade volumétrica de cargas variável (ou não) e que ocupa, aproximadamente, o volume de uma casca esférica de espessura  $2\delta$ , representando uma ou duas camadas eletrônicas ( $\delta \sim 1\text{Å}$ ) [5-7]. Esta nuvem ocupa o espaço em torno do raio  $R$  da esfera propriamente dita, conforme apresentado por Slodkowski *et al* [1]. Para resolver o problema vamos propor as seguintes hipóteses simplificadoras:

- os raios interno e externo da casca (nuvem eletrônica) são, respectivamente,  $R_1$  e  $R_2$ , de modo que,  $R_2 = R_1 + 2\delta$ ;
- será considerada uma carga total positiva na casca ( $Q > 0$ ) e, quando não nulo, o campo é radial apontando para fora da mesma, já se admitindo a situação de equilíbrio eletrostático;
- a densidade de cargas é função do raio e dada por  $\rho(r) = Cr^n$  para  $R_1 \leq r \leq R_2$  e  $\rho(r) = 0$  para qualquer outro valor de  $r$ , sendo  $C$  uma constante arbitrária e  $n$  um expoente qualquer, desde que  $n \neq -3$ , determinado pelo modelo escolhido;

Para determinar o campo no interior da casca ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ), já que os campos externo e interno a ela são resultados bem consolidados e livres de divergências, vamos invocar a lei de Gauss, considerando uma superfície gaussiana esférica de raio  $r$  e concêntrica à casca:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}(r) \cdot d\vec{A} = q_{Env}(r) \tag{1}$$

Assim,

$$E(r) = \frac{q_{Env}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{2}$$

onde  $q_{Env}(r)$  é a carga envolvida pela superfície gaussiana. Esta carga é dada por

$$q_{Env}(r) = \iiint \rho(r') dV = 4\pi \int_{R_1}^r \rho(r') r'^2 dr'. \tag{3}$$

Como  $\rho(r) = Cr^n$ , através da equação (3) expressa-se a carga envolvida pela superfície gaussiana em termos da carga total líquida da esfera por:

$$q_{Env}(r) = Q \frac{(r^{n+3} - R_1^{n+3})}{(R_2^{n+3} - R_1^{n+3})} \tag{4}$$

Substituindo a equação (4) na equação (2) e tomando os resultados para os campos interno e externo à casca, o

sistema mostrado no conjunto da equação (5) completa a descrição analítica do campo.

$$\begin{cases} E(r) = 0, & 0 \leq r < R_1 & (5a) \\ E(r) = \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \right) \frac{r^{n+1}}{R_2^{n+1}} \frac{\left(1 - \frac{R_1^{n+3}}{r^{n+3}}\right)}{\left(1 - \frac{R_1^{n+3}}{R_2^{n+3}}\right)}, & R_1 \leq r \leq R_2 & (5b) \\ E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R_2 & (5c) \end{cases}$$

Para fins de comparação e validação da formulação matemática, os resultados mostrados na equação (5) concordam, exatamente, com o mostrado em [1], quando se faz  $n=0$ , ou seja, quando a densidade de cargas é constante na casca esférica (ou nuvem eletrônica). Observa-se ainda que, com o uso da equação (5b), o campo transita de  $E(R_1) = 0$  para  $E(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}$  ao longo da casca sem descontinuidade alguma.

A Figura 2 mostra o comportamento do campo elétrico para alguns valores de  $n$ , indicando, qualitativamente, a transição entre valores internos e externos, considerando-se uma casca de espessura não desprezível em relação aos raios da casca.

Numa escala mais realista, quando  $R_1$  e  $R_2$  se aproximam, de modo que a espessura da nuvem seja de  $R_2 - R_1 = 2\delta = 2.10^{-10}\text{m}$ , conforme sugerem as referências [5-7], a transição entre  $0 < \frac{E(r)}{E(R_2)} < 1$  apresenta um comportamento linear<sup>1</sup>, o que será mostrado mais adiante. A equação (5b), com  $R_2 = R_1 + 2\delta$ , pode ser reajustada para:

$$\frac{E(r)}{E(R_2)} = \left( \frac{R_1}{r} \right)^2 \frac{\left(2\frac{\delta}{R_1} + 1\right)^2 \left(\frac{r^{3+n}}{R_1^{3+n}} - 1\right)}{\left[\left(2\frac{\delta}{R_1} + 1\right)^{3+n} - 1\right]} \tag{6}$$

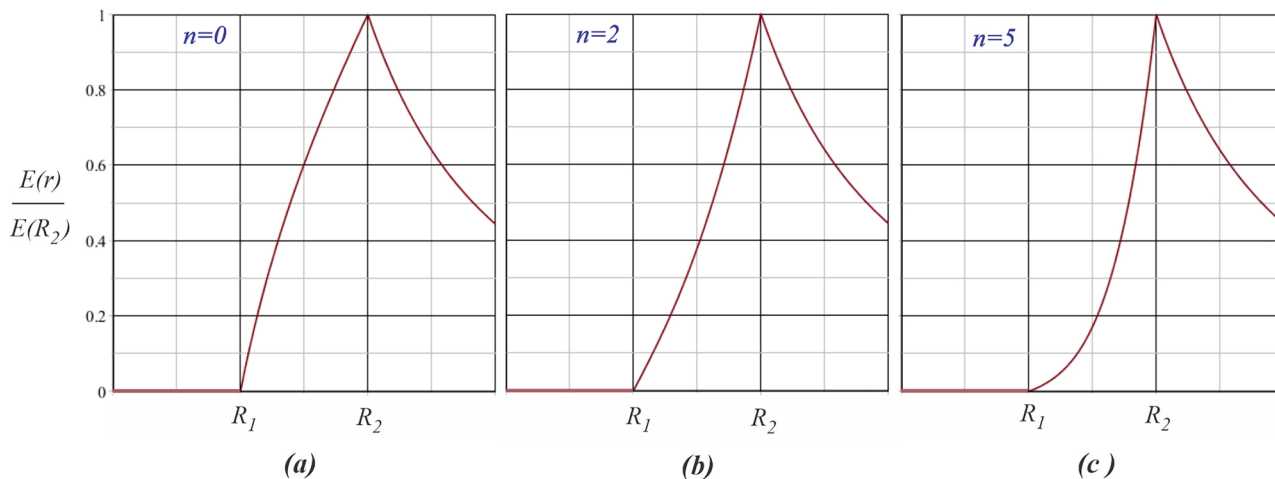
Considerando as seguintes grandezas adimensionais,  $\frac{E(r)}{E(R_2)} = \tilde{E}(\tilde{r})$ ,  $\frac{\delta}{R_1} = \tilde{\delta}$  e  $\frac{r}{R_1} = \tilde{r}$ , a equação (6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tilde{E}(\tilde{r}) = \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{(2\tilde{\delta} + 1)^2 (\tilde{r}^{3+n} - 1)}{[(2\tilde{\delta} + 1)^{3+n} - 1]} \tag{7}$$

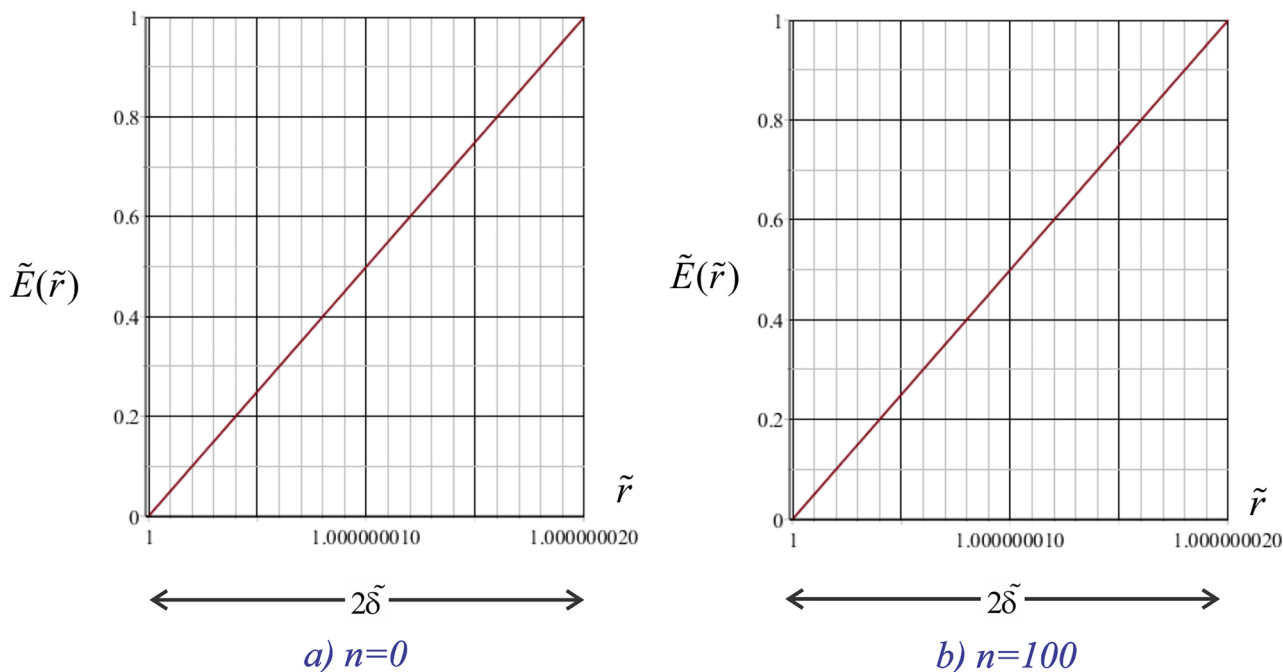
Para valores típicos em que o raio interno da esfera é da ordem de centímetros, considere-se  $\tilde{\delta} \sim 10^{-8}$  e observe na Figura 3 os gráficos que mostram a transição para  $n=0$  e  $n=100$ .

Estes gráficos mostram que, em escala microscópica, o valor do campo passa, em excelente aproximação, linear e continuamente por infinitos valores ( $0 \leq \tilde{E} \leq 1$ ) do interior na nuvem ao exterior da mesma, inclusive

<sup>1</sup> Qualquer função bem comportada pode ser aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto. A possibilidade de expansão em série de Taylor evidencia esse fato!



**Figura 2:** Comportamento do campo elétrico para uma casca esférica com diferentes densidades de carga ao longo de sua espessura ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ): (a)  $\rho = \text{cte}$ ;  $n = 0$ , (b)  $\rho \propto r^2$ ;  $n = 2$  e (c)  $\rho \propto r^5$ ;  $n = 5$ .



**Figura 3:** Transição do campo elétrico no interior da nuvem de espessura  $2\tilde{\delta}$  quando seu raio interno é  $R_1 \sim 1\text{cm}$  em duas distribuições de cargas distintas: a)  $\rho = \text{cte}$ ;  $n=0$ , b)  $\rho \propto r^{100}$ ;  $n=100$ .

passando pelo valor  $\tilde{E} = \frac{1}{2}$  no ponto médio da nuvem, independentemente da distribuição de cargas.

A transição mostrada nas figuras acima pode ser mais realisticamente ratificada por um dos mais famosos compêndios de eletrodinâmica clássica [5]<sup>2</sup>. Segundo esta referência:

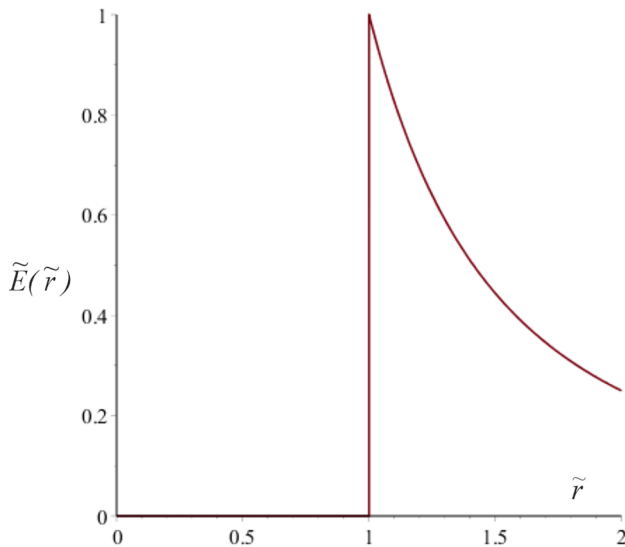
Num nível microscópico, a carga não está exatamente na superfície, e o campo não se

altera descontinuamente. [...]. O excesso de carga eletrônica parece estar confinado a uma região de  $\pm 2 \text{ \AA}$  em torno da “superfície” da distribuição iônica. O campo elétrico cresce suavemente nesta região até seu valor  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  no “exterior” do condutor.

Desta forma, observando a Figura 4, vê-se o comportamento macroscópico do campo  $\tilde{E}(\tilde{r})$ , desde o centro da esfera a pontos externos, mostrando que há uma transição súbita dos valores do campo através da nuvem, desde zero até 1 e, depois, caindo com  $\frac{1}{\tilde{r}^2}$ .

Agora, para descrever o comportamento do campo de uma distribuição singular de cargas, utiliza-se o modelo

<sup>2</sup> A figura 1.5 da referência [5] (p.21) mostra a evolução do campo elétrico para um modelo de distribuição de cargas pautado na teoria de superfícies metálicas com ênfase na forma da distribuição da densidade de elétrons e na energia da superfície. Tal modelo pode ser encontrado em [6].



**Figura 4:** Campo de uma nuvem eletrônica de espessura muito fina.

anterior, usando-se a formulação no limite em que a espessura da casca tende a zero, querendo assim se chegar ao modelo de distribuição superficial de cargas. Pois bem, em [1] propõe-se que a superfície física da esfera de raio  $R$  fique exatamente no meio da nuvem, tal que,  $R_1 = R - \delta$  e  $R_2 = R + \delta$ , uma escolha *ad hoc* e arbitrária. De fato, o resultado com o fator  $\frac{1}{2}$  será encontrado, entretanto, qualquer outra posição da nuvem eletrônica (casca) levará a outro resultado conveniente para o campo na superfície do condutor, indicando que qualquer outro valor seria tão correto quanto o suposto verídico  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Toma-se, então, a equação (5b), escreve-se  $R_1$  e  $R_2$  em função de  $\delta$  (definindo a posição da superfície da esfera em relação a nuvem eletrônica) e avalia-se o campo em  $r=R$ , onde  $R$  é o raio da esfera carregada. Após isto, faz-se o limite de

$E(R)$  quando  $\delta \rightarrow 0$  e utiliza-se a densidade superficial de cargas da esfera como sendo  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ .

A Tabela 1 a seguir mostra três possíveis valores para o campo na superfície do condutor, para uma densidade de cargas,  $\rho(r)$ , proporcional a  $r^n$ .

O modelo adotado na tentativa de encontrar que o valor do campo na superfície do condutor esférico seja  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  não se sustenta, pois infinitos outros valores de  $E(R)$  podem ser encontrados, a depender da posição da nuvem eletrônica em relação à esfera.

Um modo analítico alternativo e interessante de se verificar os resultados acima, que levam em conta a posição da nuvem em relação à superfície da esfera é se considerar os limites de distribuição de carga da nuvem dados por

$$\begin{cases} R_1 = R - f\delta \\ R_2 = R + (2 - f)\delta \end{cases}$$

com  $0 \leq f \leq 2$  de modo a manter  $R_2 - R_1 = 2\delta$ . Substituindo esses limites em  $E(r)$ , equação (5b), e, nessa, fazendo  $r = R$ , obtém-se:

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^{1+n}}{[R + (2 - f)\delta]^{3+n}} \times \frac{\left[1 - \frac{(R-f\delta)^{3+n}}{R^{3+n}}\right]}{\left\{1 - \frac{(R-f\delta)^{3+n}}{[R+(2-f)\delta]^{3+n}}\right\}} \quad (8)$$

Quando  $\delta \ll R$ , usando expansões até primeira ordem em  $\delta$  na expressão acima, é possível mostrar que

$$E(R) \cong f \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (9)$$

quando, na expressão final, toma-se o limite de  $\delta \rightarrow 0$ . Esse resultado depende de  $f$  e varia continuamente, desde 0 até  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , passando por  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  quando  $f = 1$ . Ou seja, é arbitrário, como se deseja demonstrar.

**Tabela 1:** Alguns resultados possíveis para o campo na superfície de uma esfera condutora, com distribuição de cargas dada em uma nuvem eletrônica de espessura infinitesimal e de densidade de cargas,  $\rho(r) \propto r^n$ .

$\begin{aligned} R_1 &= R - \delta \\ R_2 &= R + \delta \end{aligned}$	$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^{1+n}}{(R+\delta)^{3+n}} \frac{\left[1 - \frac{(R-\delta)^{3+n}}{R^{3+n}}\right]}{\left[1 - \frac{(R-\delta)^{3+n}}{(R+\delta)^{3+n}}\right]}$	$\lim_{\delta \rightarrow 0} E(R) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \equiv \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
$\begin{aligned} R_1 &= R - \frac{2\delta}{3} \\ R_2 &= R + \frac{4\delta}{3} \end{aligned}$	$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^{1+n}}{\left(R + \frac{4\delta}{3}\right)^{3+n}} \frac{\left[1 - \frac{\left(R - \frac{2\delta}{3}\right)^{3+n}}{R^{3+n}}\right]}{\left[1 - \frac{\left(R - \frac{2\delta}{3}\right)^{3+n}}{\left(R + \frac{4\delta}{3}\right)^{3+n}}\right]}$	$\lim_{\delta \rightarrow 0} E(R) = \frac{Q}{12\pi\epsilon_0 R^2} \equiv \frac{\sigma}{3\epsilon_0}$
$\begin{aligned} R_1 &= R - \frac{4\delta}{3} \\ R_2 &= R + \frac{2\delta}{3} \end{aligned}$	$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^{1+n}}{\left(R + \frac{2\delta}{3}\right)^{3+n}} \frac{\left[1 - \frac{\left(R - \frac{4\delta}{3}\right)^{3+n}}{R^{3+n}}\right]}{\left[1 - \frac{\left(R - \frac{4\delta}{3}\right)^{3+n}}{\left(R + \frac{2\delta}{3}\right)^{3+n}}\right]}$	$\lim_{\delta \rightarrow 0} E(R) = \frac{Q}{6\pi\epsilon_0 R^2} \equiv \frac{2\sigma}{3\epsilon_0}$

### 3. Modelo 2: superposição de campos de anéis

Neste modelo utilizado para a discussão do campo elétrico em um ponto exatamente sobre a superfície de um condutor, vamos fazer uma integração de campos de anéis, dispostos sobre a esfera para calcular o campo em um ponto qualquer de um eixo que passa pelo centro da esfera e, também, pelos centros dos anéis.

Observe a Figura 5 que mostra uma esfera condutora com densidade superficial de cargas ( $\sigma$ ) constante. Tomando a equação do campo elétrico de um anel de carga  $dq$  e raio  $r$ , em um ponto sobre o eixo de simetria do anel e a uma distância  $z$  de seu centro, tem-se:

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dqz}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Para o anel da Fig. 5,  $dq = \sigma A_{Anel} = 2\pi\sigma R^2 \text{sen}\theta d\theta$ ,  $z = R\cos\theta + x$  e  $r = R\text{sen}\theta$ . Assim, após simplificações, o campo deste anel em um ponto do eixo de simetria é:

$$dE(x, \theta) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\text{sen}\theta \left(\cos\theta + \frac{x}{R}\right)}{\left[\left(\cos\theta + \frac{x}{R}\right)^2 + (\text{sen}\theta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\theta \quad (11)$$

Tomando as seguintes grandezas adimensionais,  $\frac{E(x, \theta)}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}} = \tilde{E}(\tilde{x}, \theta)$  e  $\frac{x}{R} = \tilde{x}$ , reescreve-se:

$$\begin{aligned} d\tilde{E}(\tilde{x}, \theta) &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}\theta (\cos\theta + \tilde{x})}{\left[(\cos\theta + \tilde{x})^2 + (\text{sen}\theta)^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}\theta (\cos\theta + \tilde{x})}{(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\cos\theta + 1)^{\frac{3}{2}}} d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

Para determinar o campo ao longo do eixo  $x$ , dado por todos os anéis que constituem a esfera, procede-se com a integração:

$$\tilde{E}(\tilde{x}) = \int_0^\pi \frac{1}{2} \frac{\text{sen}\theta (\cos\theta + \tilde{x})}{(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\cos\theta + 1)^{\frac{3}{2}}} d\theta \quad (13)$$

Assim,

$$\tilde{E}(\tilde{x}) = \frac{1}{2\tilde{x}^2} \left[ \frac{-1 + \tilde{x}}{\sqrt{(-1 + \tilde{x})^2 + 1}} + 1 \right] \quad \tilde{x} \geq 0 \text{ e } \tilde{x} \neq 1 \quad (14)$$

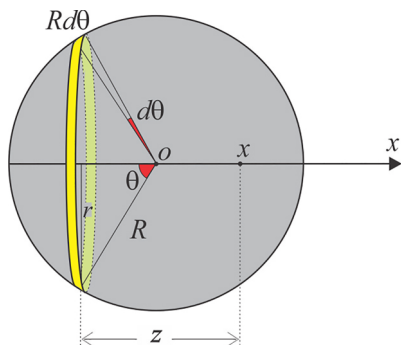


Figura 5: Esquema de um anel da esfera carregada.

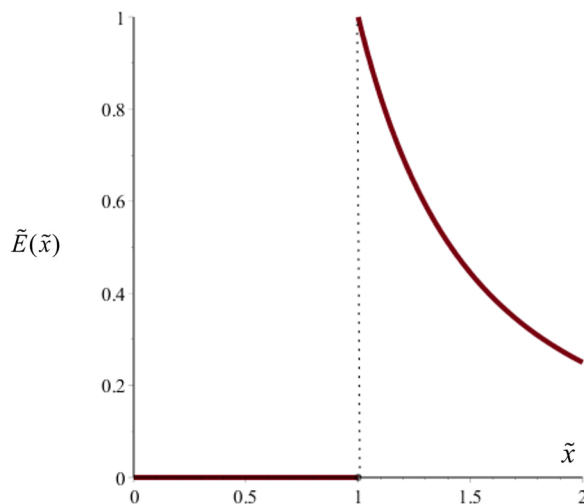


Figura 6: Descontinuidade do campo elétrico na superfície do condutor.

A descontinuidade no valor do campo pode ser rigorosamente obtida quando se faz o limite de  $\tilde{E}(\tilde{x})$  com  $\tilde{x}$  tendendo a 1 pela direita e pela esquerda, além de que,  $\tilde{E}(1)$  é indefinido em um ponto pertencente à superfície carregada da esfera: vide Figura 6.

$$\begin{cases} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^-} \tilde{E}(\tilde{x}) = 0 & (15a) \\ \lim_{\tilde{x} \rightarrow 1^+} \tilde{E}(\tilde{x}) = 1 & (15b) \end{cases}$$

Neste ponto, dando atenção à descrição do campo na superfície de um condutor esférico apresentada por [1-2] que fazem uma integração de anéis, semelhante a anterior, para determinar o valor do campo na superfície da esfera com distribuição superficial de cargas, encontrando o valor  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Como o campo elétrico tem uma singularidade não integrável no ponto da superfície onde se deseja calcular o campo, [1] e [2] fazem a regularização da integral divergente alterando o limite superior da integração dos anéis, equivalendo a retirar da soma um elemento infinitesimal de carga da posição onde se deseja calcular o campo, deixa-se um pequeno “buraco” na superfície. Artificio este que NÃO é utilizado no resultado dado pela equação (14) deste artigo e cuja descontinuidade do campo, para este modelo, é evidenciada nas equações. (15), onde toda a superfície da esfera foi levada em consideração, a carga da esfera foi considerada na íntegra e nenhum “buraco” foi feito na superfície para a obtenção destes resultados.

De antemão, não é surpreendente que se encontre o resultado com o fator supramencionado. É fácil encontrar a ampla literatura este resultado, à guisa de informação, vide [7-13]<sup>3</sup>. A questão está no fato de que o valor  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

<sup>3</sup> Não se deve confundir a força sobre um elemento de carga na superfície  $F=dq\sigma/2\epsilon_0$  com o campo gerado por toda a distribuição de cargas da esfera. Na seção 1.14 da referência [12], por exemplo, a discussão se dá sobre “The force on a layer of charge”. Neste artigo,

é: i) o campo de todas as cargas da superfície da esfera, excetuando-se um elemento de carga  $dq$ , com direção radial e apontando para fora da esfera; ii) é o campo do elemento de carga  $dq$ , exatamente como o campo nas proximidades das faces de um disco infinitesimal carregado, de um lado, para fora da esfera (fazendo com que o campo externo total seja  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ) e, de outro, para dentro (fazendo com que o campo interno total seja nulo). Veja a Figura 7 que clarifica o texto acima com explicação que pode ser encontrada em [4] e [8].

Pois bem, se retirarmos o disco carregado (sem que isto afete a distribuição das cargas remanescentes), o campo neste “buraco” da superfície será  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , mas não representará o campo de toda a carga da esfera e os campos, externos e internos, imediatamente próximos deste “buraco”, também não serão, respectivamente  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  e 0, tenderão a ser, igualmente,  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

Para observarmos este fato vamos modificar o limite superior de integração da equação (13) procedendo, analogamente, ao feito por [1] e [2]. Veja a seguir:

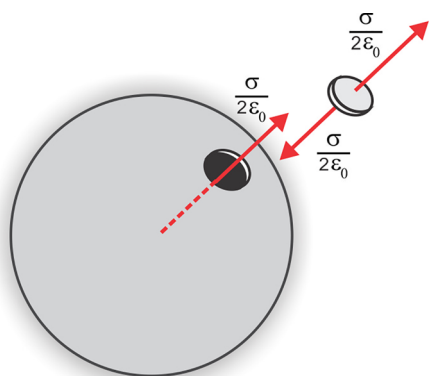
$$\tilde{E}(\tilde{x}) = \int_0^{\pi-\xi} \frac{1}{2} \frac{\text{sen}\theta (\cos\theta + \tilde{x})}{(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\cos\theta + 1)^{\frac{3}{2}}} d\theta \quad (16)$$

Assim,

$$\tilde{E}(\tilde{x}, \xi) = \frac{1}{2\tilde{x}^2} \left( 1 + \frac{-1 + \tilde{x}\cos(\xi)}{\sqrt{1 + \tilde{x}^2 - 2\tilde{x}\cos(\xi)}} \right) \quad (17)$$

Desta forma [1] e [2] mostram que  $\tilde{E}(1, \xi) = \frac{1}{2}$ . Para mostrar que os campos interno e externo também tendem a este valor, façamos os limites laterais de  $\tilde{E}(\tilde{x}, \xi)$ , quando  $\tilde{x} \rightarrow 1^+$  e quando  $\tilde{x} \rightarrow 1^-$ , depois vejamos o resultado quando  $\xi \rightarrow 0$ . Assim,

$$\tilde{E}(\tilde{x}, \xi) = \tilde{E}(\tilde{x}, \xi) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{-1 + \cos(\xi)}{\sqrt{2 - 2\cos(\xi)}} \right) \quad (18)$$



**Figura 7:** Esquema que mostra o campo nas proximidades do disco e o campo do restante das cargas da esfera. O campo do condutor esférico é, então, dado pela superposição desses dois.

não entraremos nesta discussão pois este fato já foi diretamente discutido em [4]

Então,

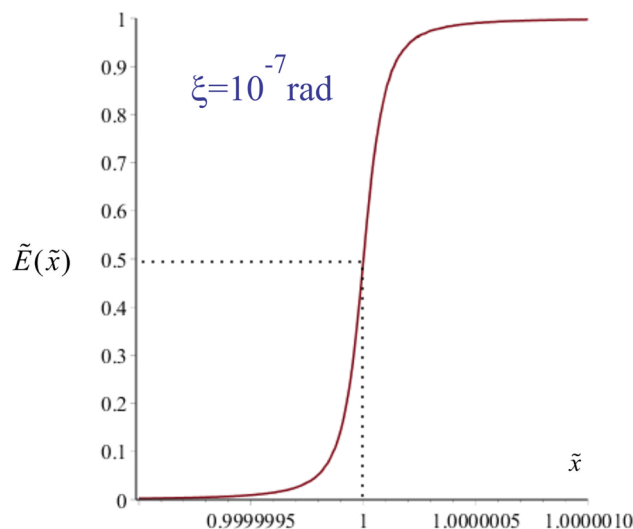
$$\tilde{E}(\tilde{x} \rightarrow 1^{+,-}, \xi) = \frac{1}{2} \quad (19)$$

Estes resultados, mostram que, quando o elemento de carga  $dq$  é retirado da superfície (em  $\tilde{x} = 1$ ), o campo ao longo do eixo  $\tilde{x}$  não é descontínuo na superfície ( $\tilde{E}(\tilde{x}, \xi) = \tilde{E}(\tilde{x}, \xi), \forall 0 < \xi \leq \pi$ ), o campo não é nulo no interior da esfera e não é  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  no exterior (em pontos muito próximos à superfície). Para reiterar ainda mais os resultados acima, observe a Figura 8 que mostra o gráfico da equação (17), para  $\xi = 10^{-7}$  rad, mostrando a transição do campo para pontos do domínio próximos à superfície da esfera.

Desta forma, é possível mostrar neste artigo e nas referências [1] e [2] que, por integração direta da Lei de Coulomb de campos de anéis, temos  $\tilde{E}(1) = \frac{1}{2}$ , porém, quando o anel de carga  $dq$ , retirado nessa abordagem limite é acrescentado à esfera, fechando-a, não podemos definir nenhum valor para  $\tilde{E}(1)$ . Resultado este confirmado na seção anterior.

### 4. Modelo 3: série de Fourier

Ainda, para completar a análise dos artigos mais recentes e que citam [4] e que fazem alusão ao escopo deste texto, se faz mister citar o belo artigo de Al-Jaber & Saadeddin [3] que utiliza uma modelagem estritamente matemática, com uma série de Fourier associada a uma função descontínua para justificar o fator  $\frac{1}{2}$ . Tomando as palavras dos próprios autores, “[...] no ponto da descontinuidade ( $x=0$ ) a série [...] converge para  $\frac{1}{2}$ , que é o valor médio entre os dois limites de  $f(x)$ , antes e depois do salto”. Os autores utilizam uma função descontínua em  $x=0$ , exatamente como uma onda quadrada periódica, muito conhecida na ampla literatura e, para que o campo se adapte a esta função, consideram o período ( $2\lambda$ ) muito pequeno. Para mostrar que a descontinuidade de Fourier



**Figura 8:** Gráfico da equação (17), que usa  $\xi = 10^{-7}$  rad e mostra a transição do campo para posições próximas à superfície.

se aplica a qualquer domínio assimétrico (ou não) em relação à origem do sistema de coordenadas e ratificar o resultado encontrado por [3], vamos escolher uma função cujo ponto de descontinuidade pode variar ao longo do período  $2\lambda$ . Vide a seguir:

$$f(x) = \frac{E(x)}{\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)} = \begin{cases} 0, & -\lambda \leq x < k\lambda \\ 1, & k\lambda < x \leq \lambda \end{cases} ; \text{ com } -1 < k < 1. \tag{20}$$

A Figura 9 mostra o comportamento gráfico da equação (20). Como uma expansão em séries de Fourier para uma função  $f(x)$  de período  $2\lambda$ , seccionalmente contínua, pode ser convenientemente escrita da seguinte forma:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) \right] \sim f(x) \tag{21}$$

Tomando critérios de ortogonalidade das funções trigonométricas, seus coeficientes são dados por:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) dx & (22a) \\ a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) dx & (22b) \\ b_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) dx & (22c) \end{cases}$$

Assim, a série de Fourier associada a função descontínua dada pela equação (20), após cálculos de seus coeficientes, é:

$$F(x) = \frac{(1-k)}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \text{sen}(n\pi k) \cos\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) + [(-1)^n - \cos(n\pi k)] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\lambda}\right) \right\}. \tag{23}$$

De fato, no ponto de descontinuidade ( $x=k\lambda$ ),

$$F(k\lambda) = \frac{(1-k)}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{sen}(n\pi k)}{n} = \frac{1}{2}, \text{ com } -1 < k < 1 \tag{24}$$

Para o caso mostrado em [3], basta fazer  $k=0$  e  $F(0) = \frac{1}{2}$ . A Figura 10 mostra o comportamento da série de Fourier associada à função, explicitamente descontínua, dada na equação (20) e para alguns valores de termos da expansão. Nota-se, ainda, que a  $n$ -ésima soma parcial da série de Fourier oscila bastante perto da descontinuidade, o que faz aumentar o valor máximo da soma parcial acima do valor da própria função original, caracterizando o fenômeno de Gibbs (Vide [14]).

<sup>4</sup> Um caso interessante se dá quando  $k=1/2$ , nesta situação, o segundo termo do lado direito da equação (23) resulta em  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$ , que é o negativo da fórmula de Leibniz para o número  $\pi$  e resulta em  $-\frac{\pi}{4}$ , fazendo com que  $F(\lambda/2)$  também resulte no recalcitrante  $1/2$ .

Enfim, o modelo apresentado pela série de Fourier, leva uma função descontínua (a equação do campo mostrada na equação (20)) a ser representada por uma expansão em senos e cossenos, que transita pelo fator  $\frac{1}{2}$  no ponto de descontinuidade da função original, como visto nos modelos anteriores. Ainda, evidencie-se que nenhum gráfico da Figura 10 se assemelha ao da Figura 1.

### 5. Considerações finais

Começando pelo primeiro modelo, onde se considera uma nuvem eletrônica de espessura da ordem de  $2\text{Å}$  (muito menor que o raio da esfera), que se assemelha ao de uma casca esférica fina com distribuição regular de cargas, o campo varia de modo aproximadamente linear (modelo microscópico), desde 0 a  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , radialmente ao longo da nuvem mas não é, necessariamente,  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  na superfície da esfera. Quando se faz o limite em que a espessura da casca tende à zero, não há garantia que o campo elétrico seja  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  na superfície do condutor, sendo que a Tabela 1 e a equação (9) mostram que outros valores podem ser encontrados, a depender da posição da nuvem eletrônica em relação à esfera, ademais, adotar o fator  $\frac{1}{2}$  é como admitir que metade da carga está dentro da esfera e a outra está fora, *ipsis verbis* justificado por [4] com relação ao modelo adotado por Ganci [15].

Já no segundo modelo, para uma distribuição superficial de cargas, o campo foi determinado através de uma integração de campos de anéis. A equação (14) e os limites indicados nas equações (15) mostram, com precisão, a descontinuidade do campo em um ponto sobre a superfície. A ideia de se modificar o limite superior de integração feito por [1] e [2], leva ao fator  $\frac{1}{2}$ , porém, quando o elemento de carga, retirado devido a esta modificação, é reintegrado ao cálculo, fechando a esfera, não se pode definir nenhum valor para o campo “na superfície”. Não obstante, deve-se deixar claro que modelos não traduzem,

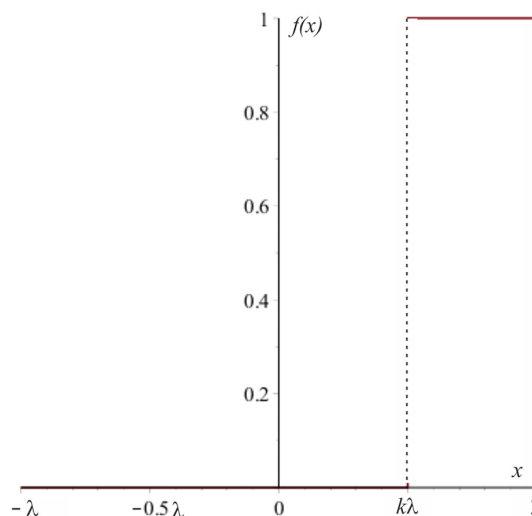
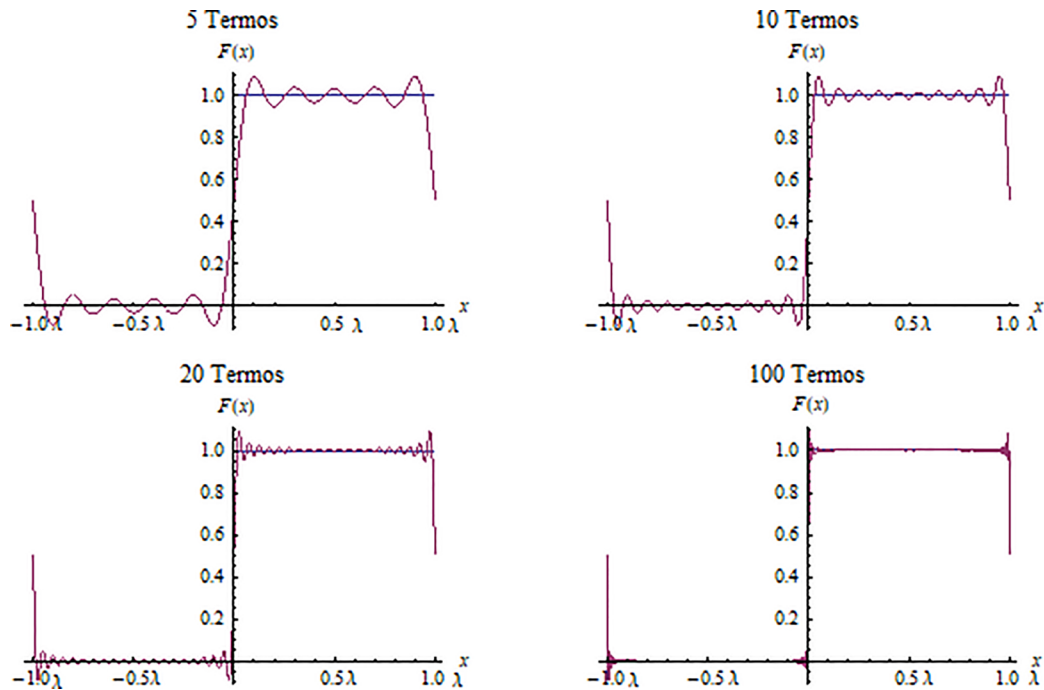


Figura 9: Gráfico ilustrativo da equação (20).



**Figura 10:** Gráficos da expansão em série de Fourier para a função descontínua da equação (20) para  $n=5$ ,  $n=10$ ,  $n=20$  e  $n=100$ . Observa-se ainda o fenômeno de Gibbs nas proximidades do ponto de descontinuidade.

com absoluta perfeição, a realidade física, existem bons e maus modelos, o que os qualificam é um comparativo com o experimento para fins de *benchmarking*.

No terceiro modelo, utiliza-se uma expansão em série de Fourier para representar uma função originalmente descontínua, como o valor campo elétrico de uma esfera com distribuição superficial uniforme de cargas que apresenta descontinuidade na superfície. A série converge para o fator  $\frac{1}{2}$  no ponto de descontinuidade mas, ainda assim, não é igual à função (campo elétrico) original.

Para finalizar, os modelos aqui apresentados encontram sim, em algum ponto e de alguma forma, o fator  $\frac{1}{2}$ , entretanto, de modo algum, podem ser representados pelo gráfico da Figura 1, pulverizada em tantos livros do ensino médio, conforme citados por [1], [2] e [4]. Assim, como este tema começa a ser abordado neste segmento, além de acreditarmos que existem outros temas mais importantes a se discutir com esta classe de alunos que ora precisam se deslumbrar com o maravilhoso mundo da Física, é uma excelente oportunidade para se discutir o conceito de descontinuidade e, então, pode-se uniformizar o discurso definindo: “o campo é nulo no interior do condutor, vale  $k\frac{|Q|}{R^2}$  em pontos muito próximos da superfície e apresenta uma descontinuidade em pontos da superfície”. Em querendo se aprofundar no mundo microscópico da escala atômica, pode-se dizer que: “há uma transição, aproximadamente linear de zero a  $k\frac{|Q|}{R^2}$ , passando por infinitos valores ao longo da nuvem eletrônica, inclusive pelo fator  $\frac{1}{2}$ ”.

## Agradecimentos

Meus, nunca descontinuos, agradecimentos ao Prof. Carlos Romero Filho pela disponibilidade, leitura e crítica incentivadora, ao Prof. Mário Assad (*in memoriam*) pelas lições ao longo de minha história, ao Prof. Pedro Júnior pelo auxílio para formatação do trabalho e aos revisores pela cautelosa leitura e valiosas retificações sugeridas.

## Referências

- [1] K. Slodkowski, M.C. Pinheiro e T.C. Luchese, *Rev Bras Ens Fís* **40**, e2311 (2018).
- [2] F.M.S. Lima, *Resonance* **23**, 1215 (2018).
- [3] S.M. Al-Jaber e I. Saadeddin, *Applied Mathematics* **10**, 226 (2019).
- [4] G.E. Assad, *Rev Bras Ens Fís* **34**, 4701 (2012).
- [5] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1998), 3<sup>a</sup>ed, p. 20.
- [6] N.D. Lang e W. Kohn, *Phys Rev B* **3**, 1215 (1971).
- [7] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica – Eletromagnetismo* (Edgard Blücher, São Paulo, 1997), v. 3, p. 31.
- [8] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, in: *Lições de Física de Feynman* (Bookman, Porto Alegre, 2008), v. II.
- [9] P.A. Tipler e G. Mosca, *Física para cientistas e engenheiros: eletricidade e magnetismo, ótica* (LTC, Rio de Janeiro, 2006), v. 2, p. 56.
- [10] D. Halliday, R. Resnick e K.S. Krane, *Física 3* (LTC, Rio de Janeiro, 2004), v. 3, p. 61.
- [11] E.M. Purcell, *Eletricidade e Magnetismo, Curso de Física de Berkeley* (Edgard Blücher, São Paulo, 1970), 1<sup>a</sup>ed., v. 2, p. 48.



- [12] E.M. Purcell e D.J. Morin, *Electricity and Magnetism* (Cambridge University Press, New York, 2013), 3ªed., v. 2, p. 30.
- [13] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999), p. 71.
- [14] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics* (Wiley, New York, 1998), 9ªed., p. 510.
- [15] S. Ganci, *Rev Bras Ens Fís* **30**, 1701 (2008).