

Modelización lineal de un sistema masa-resorte real

Linear modelization of a real spring-mass system

Maricel Matar^{1,2}, Miguel A. Parodi¹, Carlos E. Repetto^{1,3}, Analía Roatta^{*1,3}

¹Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Rosario, Argentina

²Pontificia Universidad Católica Argentina, Facultad de Química e Ingeniería del Rosario, Rosario, Argentina

³Instituto de Física Rosario, Rosario, Argentina

Recibida en 31 de Junio, 2017. Aceptado en 23 de Agosto, 2017.

De acuerdo al modelo enseñado en los cursos introductorios universitarios, la frecuencia de las oscilaciones libres de un sistema masa-resorte vertical, en el caso de fuerzas disipativas y masa del resorte despreciables, puede calcularse simplemente como la raíz cuadrada de la relación entre la gravedad del lugar y el estiramiento producido por el cuerpo sujeto al resorte. Sin embargo, cuando se utiliza un resorte real, las frecuencias medidas difieren en forma notable por debajo de las previstas por el modelo. El análisis de la respuesta estática del resorte a la carga revela que no obedece la ley de Hooke e impide definir una única constante elástica k_E en cualquier condición de carga. Haciendo una aproximación lineal de esta respuesta alrededor del punto de trabajo y definiendo una constante dinámica k_D , la resolución de la ecuación diferencial de movimiento predice un valor de la frecuencia mucho más cercano al medido. Una posterior corrección heurística, que toma en cuenta la masa del resorte, hace disminuir aún más la discrepancia relativa. Nuestro análisis concluye que los fenómenos disipativos son insignificantes comparados con la elasticidad y la inercia del sistema estudiado. Este problema y su solución muestran la necesidad de discutir en las aulas la modelización de este fenómeno físico.

Palabras clave: oscilaciones, sistema masa-resorte, ley de Hooke, no-linealidad.

On university introductory courses, while studying the frequency of free oscillations of a vertical spring-mass system in the case of negligible dissipative forces and massless spring, such a frequency can be simply calculated as the square root of the relationship between the local gravity and the spring elongation. However, when an actual spring is used, the measured frequencies differ markedly below those predicted by the model. The analysis of the static response of the spring to the load reveals that it does not obey Hooke's law and prevents defining a single elastic constant k_E in any load condition. By making a linear approximation of this response around the point of work and defining a dynamic constant k_D , the resolution of the differential motion equation predicts a value of the frequency much closer to the measured one. A subsequent heuristic correction, which takes into account the mass of the spring, further decreases the relative discrepancy. Our analysis concludes that dissipative phenomena are insignificant compared to the elasticity and inertia of the system studied. This problem and its solution show the need to discuss in the classroom the modeling of this physical phenomenon.

Keywords: oscillations, spring-mass system, Hooke's law, non-linearity.

1. Introducción

En los libros de texto introductorios de Física de nivel universitario [1-4], la elasticidad de los materiales, en general, es ejemplificada por un resorte helicoidal *lineal*; es decir, la fuerza ejercida sobre éste es proporcional a la longitud de su estiramiento o de su compresión. La ley de la fuerza como función del estiramiento es conocida como *ley de Hooke* [1-4]. De esta manera, un único parámetro representa la respuesta del medio: la constante de proporcionalidad k entre la fuerza y el estiramiento, denominada *constante elástica*. Sin embargo, Aranha et al. [5] se proponen en su trabajo mostrar que los materiales elásticos que se utilizan en la industria, sólo en algunos

casos obedecen la ley de Hooke en su rango de trabajo. Para ello, Aranha et al. realizaron ensayos estáticos de compresión de tres resortes helicoidales y también de un elastómero en tracción. Al representar los resultados de los ensayos, en las gráficas de fuerza vs. elongación, resultó que sólo uno de estos elementos respondía a la ley de Hooke mientras que, para el resto, las gráficas representaban comportamientos no lineales [5].

Nuestro propósito en este trabajo es mostrar la necesidad de discutir el comportamiento supuestamente lineal de un medio elástico, no sólo en su respuesta *estática* frente a esfuerzos, sino además, cuando éste forma parte de un *sistema masa-resorte* que *oscila* libremente.

En los trabajos de Triana y Fajardo [6, 7] se estudian las oscilaciones del sistema masa-resorte vertical, centrándose en el análisis de la influencia de las caracte-

*Endereço de correspondência: roatta@fceia.unr.edu.ar.

terísticas geométricas de los resortes involucrados, tales como su longitud natural y el diámetro de sus espiras. Ellos concluyen que las principales variables físicas que caracterizan la oscilación (constante elástica, frecuencia y amortiguamiento), son fuertemente influenciadas por dichos parámetros geométricos. Los autores emplean un conjunto de resortes cuyo comportamiento fuerza-estiramiento es perfectamente lineal en el rango de trabajo reportado.

En los libros introductorios de Física [1-4] se presenta la solución para el movimiento libre de un sistema *masa-resorte* en presencia de una fuerza disipativa proporcional a la velocidad del sistema y pequeña comparada con la fuerza restitutiva, que consiste en una función armónica con una amplitud modulada por una función temporal exponencial decreciente. Si las oscilaciones libres son débilmente amortiguadas, su frecuencia es prácticamente $\sqrt{k/m}$, donde m es la masa del objeto sujeto al resorte. Dos son las hipótesis explicitadas para llegar a este resultado: la validez perfecta de la ley de Hooke para el resorte y que su masa sea despreciable respecto a m [8]. No obstante, nuestra experiencia en el laboratorio de física de pregrado muestra discrepancias notables entre la frecuencia medida y la prevista por este modelo simple. Es precisamente este hecho lo que ha motivado el presente trabajo.

En consecuencia, se estudia la validez del modelo simple mencionado para el caso de las oscilaciones libres de un sistema masa resorte, dispuesto verticalmente. En este caso, el medio elástico es un resorte helicoidal cilíndrico de acero, cuyas espiras están apretadas y por ende, para poder oscilar, deberá estar previamente estirado. En la búsqueda de disminuir la discrepancia citada más arriba, se analiza la curva de carga del resorte en función de su

elongación. Nuestro estudio muestra que el resorte utilizado no obedece la ley de Hooke en condición de bajas cargas y elongaciones. Con un ajuste lineal en la zona de trabajo del resorte durante las oscilaciones, se obtiene una constante elástica válida sólo en este intervalo y con la cual disminuye, en gran medida, la discrepancia entre la frecuencia prevista y la observada dinámicamente. Se resalta que a bajas cargas la frecuencia de oscilación responde a un sistema más rígido. También se mostrará que la influencia del *amortiguamiento viscoso* es despreciable frente a los efectos causados por la masa del resorte [8-11] y la no linealidad de la curva de carga.

De esta manera, este trabajo pretende hacer un aporte en la comprensión de la elasticidad en medios elásticos no lineales y cómo se relaciona esto con el comportamiento dinámico de sistemas compuestos, donde el medio elástico provee la fuerza restauradora.

El trabajo está organizado del siguiente modo: en la sección 2 se describe el desarrollo experimental y se presentan las mediciones realizadas; la sección 3 contiene el análisis y discusión de los resultados; finalmente se presentan las conclusiones.

2. Desarrollo experimental

En los cursos introductorios de Física se acostumbra utilizar un sistema masa-resorte, para ejemplificar tanto las oscilaciones libres como las forzadas, tomando como base un comportamiento lineal para el resorte, pensando que la ley de Hooke siempre es válida.

En la cátedra de Física II de las carreras de Ingeniería en nuestra Facultad se utiliza la disposición experimental mostrada en la Figura 1. Un parlante de audio, diseñado para producir oscilaciones mecánicas, está sujeto a una

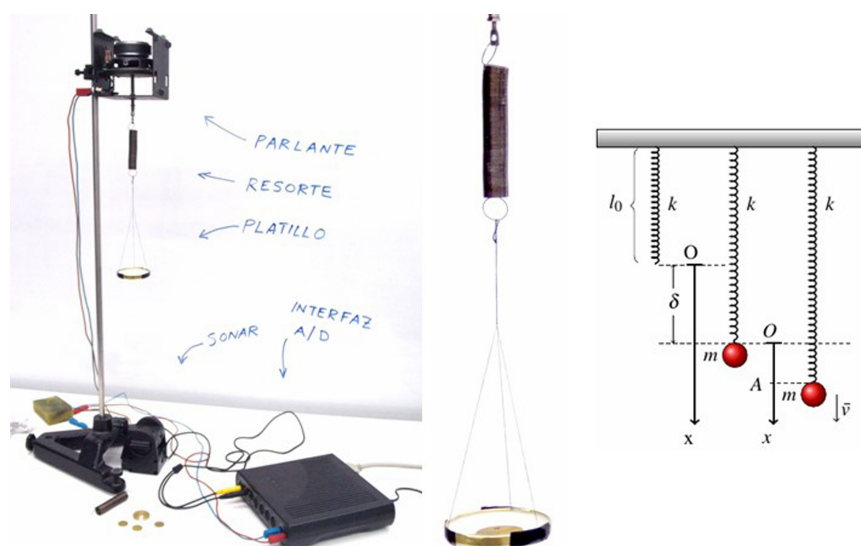


Figura 1: (Izq) Dispositivo experimental utilizado que consta de: parlante para producir oscilaciones con eje acoplado a su membrana, barra vertical con base trípode, resorte metálico, platillo portapesas, sonar, interfaz analógica-digital con salida del generador de señales y canales digitales de entrada. (Centro) Detalle del conjunto resorte-platillo. (Der) Esquema del sistema donde figuran las magnitudes físicas relevantes.

barra vertical con base maciza trípode. El eje del parlante se dispone paralelo a la barra vertical. El centro de la membrana elástica del parlante tiene adherido un vástago metálico que oscilará junto con la membrana cuando la bobina del parlante sea energizada.

El conjunto resorte-platillo portapesas está alineado con el eje de la ventana del sonar que constituye el sensor de movimiento (Pasco CI-6742A) y está conectado a dos canales digitales de la interfaz analógica-digital (ScienceWorkshop@750 Interface). En ésta se encuentra la salida de un generador de señales que alimenta la bobina del parlante. La interfaz está conectada a una PC y permite el registro y procesamiento de los datos adquiridos por el sensor de movimiento.

El sistema masa-resorte está constituido por un resorte metálico unido a una plataforma circular (*platillo portapesas*), con tres tiros de hilos y un conjunto de pesas o pequeñas monedas de masa conocida que se depositan sobre el platillo.

El resorte está hecho con un alambre de acero, enrollado helicoidalmente, tal como puede verse en el centro de la Figura 1. El paso de la hélice es lo suficientemente pequeño como para que el resorte, en estado relajado, se presente como un cilindro de espiras circulares apretadas. El resorte utilizado fue construido por la empresa RICO S.R.L. de la ciudad de Rosario, República Argentina. En el Anexo se encuentran las características de este resorte y también se evalúa la constante del mismo, de acuerdo a la expresión que figura en [9, 12] para un resorte ideal.

Con el dispositivo experimental descrito se registraron las elongaciones del sistema masa-resorte en función del tiempo, en el estado de oscilación libre, para 18 masas suspendidas comprendidas entre 24.5 a 204.5 g (incluye la masa del platillo portapesas). A partir de dichos registros se determina el pseudoperíodo y en base a él, la frecuencia angular. Para obtener un movimiento vertical lo más rectilíneo posible y así mejorar la calidad de las mediciones, se realizó la experiencia partiendo de una oscilación forzada en *condición de resonancia*. Luego, se desenergiza la bobina del parlante y, en el régimen de oscilaciones libres, se hacen cada uno de los registros, para cada valor particular de la masa total acoplada al resorte, tal como fue descrito anteriormente.

En la Figura 2 se muestra, como ejemplo, la elongación en función del tiempo para una masa $m^* = 54.5$ g. La línea llena corresponde al ajuste de las mediciones, siguiendo el algoritmo de Levenberg-Marquardt escalado, con una curva del tipo $x(t) = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega_V t + \phi)$ que representa una oscilación sub-amortiguada por una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad a través del coeficiente viscoso $b, F_V = bv$, donde $\gamma = b/m$ es la constante de amortiguamiento y $\omega_V = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ la frecuencia de oscilación. La frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{k_E/m}$, corresponde a la frecuencia de un movimiento armónico simple (fuerza de restitución lineal con el desplazamiento y sin fricción), donde k_E es la constante elástica de un resorte ideal y m , la masa acoplada [13,14].

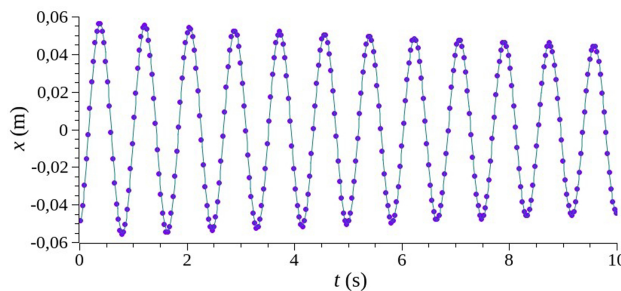


Figura 2: Los puntos son las mediciones experimentales, donde se registra la posición del platillo en función del tiempo. Tomamos como origen de coordenadas la posición de equilibrio estático del platillo cargado. La línea es el ajuste a los puntos experimentales.

Como resultado del ajuste se obtuvieron los valores:

$$\begin{aligned} \gamma &= (0,0460 \pm 0,0002) s^{-1} \\ \omega_V &= (7,51095 \pm 0,00006) s^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

Es importante destacar la precisión obtenida en los parámetros del ajuste, lo cual también puede observarse en el acuerdo de la curva con los datos experimentales. Esto se debe, entre otras cosas, a la cantidad de valores utilizados y al buen comportamiento de la función.

La Figura 3 muestra cómo decrece la frecuencia angular medida, ω_V , en función de la masa acoplada m . El punto resaltado corresponde al ejemplo mostrado en la Figura 2. Como puede verse en el extremo superior derecho de la Figura 3, la dependencia ω_V vs. $\sqrt{1/m}$ no es lineal en todo el dominio de trabajo. En la sección siguiente abordaremos esta problemática.

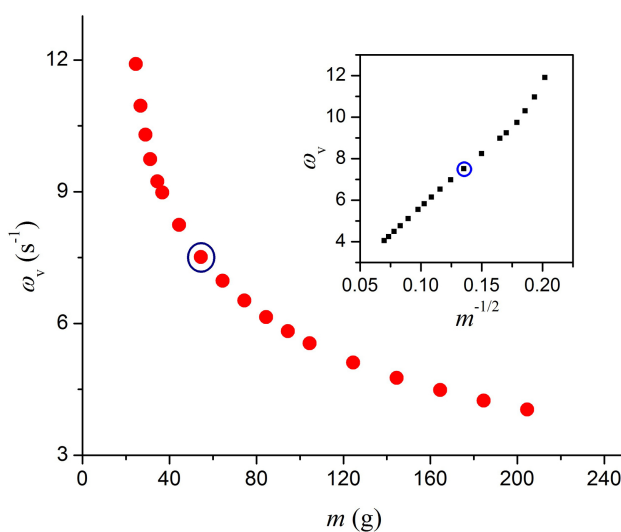


Figura 3: Frecuencia de oscilación en función de la masa suspendida. El punto encerrado en un círculo es tomado como valor de referencia, correspondiendo a la masa $m^* = 54.5$ g.

3. Análisis de resultados

Si se consideran las oscilaciones libres de un resorte *ideal*, cuya masa m_r puede despreciarse en comparación con la masa suspendida de él, ejemplo de movimiento estudiado en todo curso universitario de Física General, dicha masa oscilará alrededor de la posición de equilibrio x_0 dada por

$$x_0 = \frac{F_0}{k_E} = \frac{mg}{k_E}, \quad (2)$$

donde se elige el sistema de coordenadas en dirección de la vertical del lugar, con su origen ubicado en el extremo del resorte sin elongar (ver Figura 1, a la derecha) y donde g es la aceleración de la gravedad local.

Si l es la longitud del resorte estirado en equilibrio, entonces su estiramiento estático $\delta = l - l_0$ coincide con la posición de equilibrio x_0 .

Este modelo predice que la frecuencia de las oscilaciones libres de un sistema masa-resorte sin fricción es

$$\omega_0 = \sqrt{k_E/m} = \sqrt{g/x_0} = \sqrt{g/\delta}, \quad (3)$$

y será llamada *frecuencia estática*, debido a que, para su medición, no se hace oscilar al sistema. En la Figura 4 se grafican los valores medidos de ω_0 vs. ω_V para cada una de las masas utilizadas. A partir de ahora, ω_V , la frecuencia medida, será llamada *frecuencia dinámica*. Las incertezas de medición se indican con segmentos verticales (los segmentos horizontales resultan despreciables frente a los verticales).

Este modelo simple sobrestima la frecuencia angular ω_V y presenta un apartamiento monótono creciente con respecto a la recta $\omega_0 = \omega_V$ (línea llena), a medida que el valor de la masa acoplada decrece. Los puntos pertenecientes a esta recta pueden interpretarse como los correspondientes a los estados de oscilación libre sin fricción de

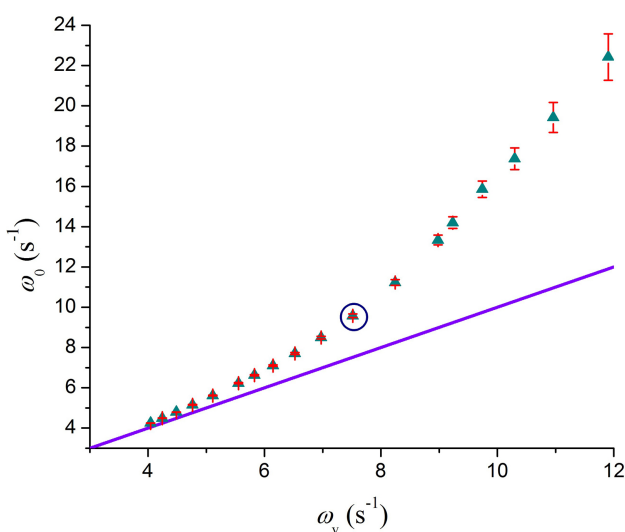


Figura 4: Frecuencia estática vs. frecuencia dinámica, para distintos valores de masas suspendidas. Al igual que en Figura 3, el punto resaltado corresponde a la masa $m^* = 54.5$ g

un sistema masa-resorte “ideal”; esto es, constituido por un resorte sin masa y con un valor de rigidez k constante para todo valor de la masa m del cuerpo a él sujeto. Puede verse que la discrepancia relativa $|\omega_0 - \omega_V|/\omega_V$ entre los valores de frecuencia supera el 10 % para masas menores de 120 g llegando a un 88 % para la menor masa empleada de 24.5 g.

El análisis de las posibles causas de esta desviación lleva a estudiar en qué grado se cumplen las hipótesis del modelo empleado: presencia de viscosidad, contribución de la masa del resorte a la inercia del sistema y no linealidad de la respuesta elástica del resorte (curva de carga). Las secciones siguientes tratarán por separado cada una de estas posibles causas.

3.1. Presencia de viscosidad

Del ejemplo dado en la sección anterior para la masa $m^* = 54.5$ g, se obtuvo un valor de $\gamma = 0,046 \text{ s}^{-1}$, por lo cual resulta $\gamma \ll \omega_0$. Claramente, la inclusión en el modelo de un término viscoso no explica la desviación observada del orden del 30 % para esta masa. Resultados análogos se obtienen para el resto de masas empleadas.

3.2. Contribución de la masa del resorte a la inercia del sistema

El efecto de la masa del resorte m_r , en la frecuencia de oscilación de un sistema masa-resorte, ha sido estudiado por varios autores [8-11], quienes consideran una masa efectiva $m_{ef} = m + \alpha m_r$, donde α varía entre los valores $1/3$ si $m_r \ll m$ y $4/\pi^2 \approx 0,41$ si $m_r \gg m$. Dado que, en nuestro ejemplo $m_r = 13,5 \text{ g} \approx m^*/4$, resulta $\alpha = 0,34 \approx 1/3$:

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k_E}{m_{ef}}} = \sqrt{\frac{k_E}{m^* + m^*/12}} = \sqrt{\frac{12 k_E}{13 m^*}} \approx 0,96\omega_0. \quad (4)$$

Es decir, la masa del resorte afecta poco a la frecuencia de oscilación del sistema cuando oscila con esta masa m^* y tampoco explica la desviación observada. Puesto que variamos las masas entre 6.74 g y 204.5 g, los correspondientes valores de frecuencias ω'_0 estarán comprendidos entre $0,75\omega_0$ y $0,99\omega_0$, respectivamente. Es decir, sólo en el caso de masas pequeñas la corrección puede ser importante (aunque de todas maneras, no llega a explicar la discrepancia relativa del 88 % que se detecta, en la Figura 4, para la masa menor).

3.3. No linealidad de la curva de carga

Para analizar si el resorte se está comportando como “ideal”, se emplea la disposición experimental mostrada en la Figura 1 y, con la bobina desenergizada, se procede a cargar el platillo con monedas y luego con pesas de valor conocido, aumentando paulatinamente la masa total y midiendo, para cada posición de equilibrio estático del sistema, la elongación x del resorte (ver lado derecho

de Figura 1) a partir de las distancias registradas por el sonar. La Figura 5 muestra los puntos definidos por los pares elongación x – fuerza F , donde esta última es el peso total de las pesas y del platillo. Para los valores más pequeños de carga se utilizaron monedas prácticamente idénticas y, para los valores a partir de 20 g, pesas de bronce hasta un valor máximo de 200 g.

Se denominará “curva de carga del resorte” a la gráfica de una función $F = F(x)$ determinada estadísticamente y que aproxima a cada uno de los puntos experimentales. Puede verse claramente que el comportamiento del resorte dista de ser el ideal para todo el rango de elongaciones. En la región de bajas cargas muestra un codo mientras que, para masas $m \geq 30$ g, se observa una dependencia lineal con ordenada al origen no nula.

3.3.1. Análisis de la curva de carga

La gráfica de la fuerza F versus la elongación x (Figura 5) permite suponer que la función $F = F(x)$ es infinitamente derivable en el intervalo de valores de elongación medidos. A consecuencia de esto, la función $F(x)$ admite un desarrollo de potencias en cada punto x . Entonces, si x_0 es un punto de este intervalo, la función $F(x)$ puede escribirse como [14-16]

$$F(x) = F(x_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2} + \left. \frac{d^3 F}{dx^3} \right|_{x_0} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots \quad (5)$$

En tanto que, en un entorno de cada valor de elongación x_0 , se puede aproximar la fuerza F por

$$F(x) \cong F(x_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) . \quad (6)$$

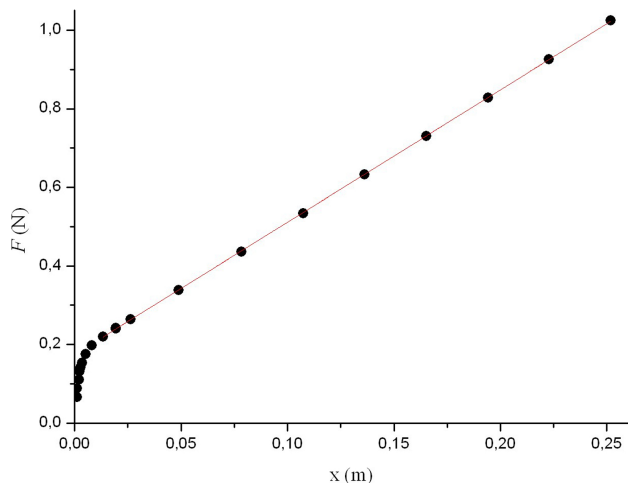


Figura 5: Curva de carga del resorte, variando la masa suspendida desde 6.74 g hasta 104.54 g.

Definiendo la rigidez “dinámica” del sistema masa-resorte como

$$k_D = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} , \quad (7)$$

resulta que, de la ec. (6), la fuerza F , para pequeños estiramientos, puede aproximarse por

$$F(x) \cong F(x_0) + k_D x - k_D x_0 = k_D x + H , \quad (8)$$

donde $H = F(x_0) - k_D x_0$.

La Figura 6 muestra la gráfica de la función $F(x)$, función “carga” y dos aproximaciones a la misma. Una de ellas, la primera, está definida a partir de la ec. (8):

$$F_D(x) = k_D x + H . \quad (9)$$

La ec. (9) se considera una *aproximación dinámica*.

La segunda aproximación se define a partir de la rigidez estática, k_E , que es la relación entre la fuerza aplicada F_0 y la elongación resultante x_0 ,

$$k_E = \frac{F_0}{x_0} = \frac{F(x_0)}{x_0} . \quad (10)$$

Así se tiene que

$$F_E(x) = k_E x . \quad (11)$$

La ec. (11) se denominará *aproximación estática*. En la Figura 6 se observa que tanto la aproximación estática (línea de trazos) como la dinámica (línea llena) dependen del valor de la elongación x_0 alrededor del cual $F_E(x)$ y $F_D(x)$ aproximan a $F(x)$.

La aproximación estática $F_E(x)$ es la habitualmente empleada para representar una función “carga” lineal $F(x) = F_E(x)$, donde k_E es constante en todo el intervalo de carga. Así, se define resorte “ideal” de constante k_E a un muelle sin masa, de longitud l_0 , para el cual su función “carga” es $F_E(x)$ para todo valor de x . En el trabajo de Triana y Fajardo de 2012 [6], puede verse que las constantes estática y dinámica de los resortes

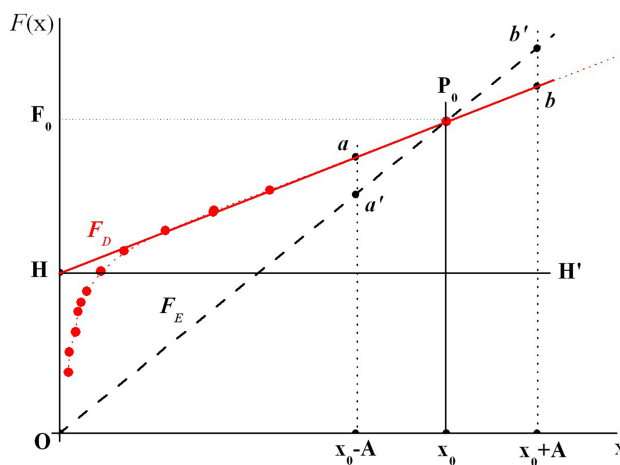


Figura 6: Aproximaciones lineales a la curva de carga del resorte en el punto x_0 .

son iguales, mientras que, en las gráficas informadas por los mismos autores en 2013 [7], se observa que dichas constantes no coinciden.

La Figura 6 muestra que la aproximación dinámica $F_D(x)$ representa mejor que $F_E(x)$ a la curva de carga real $F(x)$, en un entorno de amplitud $2A$ alrededor de una elongación x_0 donde se producirán las oscilaciones del sistema. Además, cuanto menor sea A , mejor será esta aproximación.

Para el rango de estiramientos estáticos que presenta comportamiento lineal (masas entre 30 y 200 g), el ajuste de una recta por el método de mínimos cuadrados (línea llena en Figura 5), arroja los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} H &= (0,1744 \pm 0,0006) \text{ N} \\ k_D &= (3,368 \pm 0,005) \text{ N/m} \\ R^2 &= 0,99998 \end{aligned} \tag{12}$$

donde el coeficiente de correlación R^2 indica la bondad del ajuste.

3.3.2. Aproximación dinámica en el movimiento del sistema masa-resorte

Aplicando la Segunda Ley de Newton a m , en el sistema de referencia x de la Figura 1, resulta:

$$-F(x) - bx + mg = m\ddot{x} \tag{13}$$

Con la aproximación $F(x) = F_D(x)$ y puesto que $x_0 = \delta$, resulta:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{1}{m}(k_D x + H) - g = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{k_D}{m}(x - \delta) = 0.$$

Haciendo el cambio de coordenadas $x = x - \delta$, tenemos:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_D^2 x = 0, \tag{14}$$

donde $\omega_D = \sqrt{k_D/m} = f_c \omega_0$ y $f_c = \sqrt{1 - H/mg}$ es un factor de corrección.

Para la masa testigo $m^* = 54.5$ g se tiene $f_c = (0,821 \pm 0,002) \Rightarrow \omega_D = (7,86 \pm 0,09) \text{ s}^{-1}$.

Con esta consideración, resulta que la discrepancia porcentual entre ω_D y ω_V sólo es del 5%, la cual puede aún disminuirse teniendo en consideración la masa del resorte, tal como se describió en la sección 3.2. Entonces, se propone

$$\omega'_D = \sqrt{k_D/m_{ef}} = f'_c \omega_0, \tag{15}$$

donde $f'_c = \sqrt{\frac{m-H/g}{m+m_r/3}}$ es nuevo factor de corrección que toma en cuenta la ec. (4). De esta manera, resulta una discrepancia de sólo 0.6%, ya que se obtiene el valor $\omega'_D = (7,6 \pm 0,1) \text{ s}^{-1}$, intervalo que contiene al valor experimental $\omega_V = 7,51095 \text{ s}^{-1}$.

3.4. Discusión

La Figura 7 muestra los resultados obtenidos considerando la influencia de las tres causas de discrepancia detalladas en esta sección, para el conjunto de masas usadas.

El análisis del acercamiento de las frecuencias predichas a las experimentales, como se mostró en las secciones anteriores, explica los resultados obtenidos para masas entre 30 y 200 g.

Observando la misma figura se puede decir que, para la masa $m^* = 54.5$ g, la frecuencia medida ω_V es sobrestimada en un 27% por la frecuencia prevista por el modelo que supone un resorte ideal, $\omega_0 = \sqrt{k_E/m} = \sqrt{g/\delta} > \omega_V$. En esta discrepancia, la influencia de la viscosidad es insignificante, tal como se indica en el apartado 3.1. del presente trabajo. Si se cambia la masa m por la masa efectiva m_{ef} , en la expresión de ω_0 , no mejora sustancialmente la discrepancia relativa $|\omega'_0 - \omega_V|/\omega_V$, que resulta, aproximadamente, de 23%. En cambio, si se sustituye la constante estática $k_E = mg/\delta$ por la constante dinámica k_D , obtenida por ajuste de mínimos cuadrados en la zona lineal de la curva de carga $F(x)$, resulta que $\omega_D = \sqrt{k_D/m}$ se acerca notablemente a ω_V arrojando una discrepancia relativa del 5%. Dicha discrepancia puede disminuirse aún más, hasta un 0.6%, si se considera la masa efectiva del sistema. Es interesante notar que el factor de corrección f'_c , que debería aplicarse a la predicción estática, depende de m , de m_r y de la ordenada al origen del ajuste lineal de la curva de carga.

Para $m < 30$ g, se observa un apartamiento respecto de la recta (ver Figura 7). Las curvas que corresponden a ω_D y ω'_D cambian su tendencia puesto que la derivada segunda de ambas curvas de ajuste se anula, cambiando su concavidad, acercándose a la recta de 45°, cruzándola y finalmente, tomando valores en la región del diagrama debajo de esta recta. La existencia del punto de inflexión

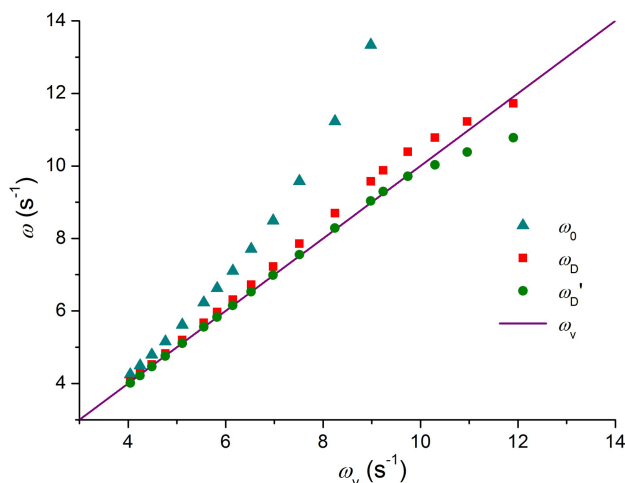


Figura 7: Se representan las frecuencias angulares de acuerdo a cada modelo utilizado en función de la frecuencia angular medida experimentalmente.

se explica porque, a medida que $m \rightarrow m_r$, es evidente que la constante dinámica calculada en la zona lineal de la curva de carga resulta menor que los valores de $k_D = dF(x_0)/dx$ correspondientes a los puntos de trabajo, que se aproximan ahora al “codo” de la curva de carga. En dicha región, para las oscilaciones libres del sistema, el punto de trabajo se mueve en la recta de carga ingresando posiblemente a la región del codo (aún con bajas amplitudes de oscilación, del orden del cm). De esta manera, el resorte se vuelve más rígido y el valor de k_D aumenta por encima del valor tomado en la zona lineal por ajuste y por lo tanto, el sistema oscila a una frecuencia mayor que la estimada con dicho ajuste.

Las fotografías incluidas en la [Figura 8](#) muestran el comportamiento del sistema a bajas cargas; de izquierda a derecha con valores de carga decreciente: 34.5 g, 29 g, 21.2 g y resorte descargado. Se observa que el número *efectivo* de espiras (espiras que se deforman) es menor cuanto más pequeña es la carga, correspondiendo a un resorte cada vez más rígido [[9](#), [10](#), [12](#), [17](#)].

4. Conclusiones

La medición de la frecuencia de oscilación de un sistema masa-resorte y su comparación con la frecuencia que se obtiene a partir del estiramiento estático y la aceleración de la gravedad local, llevó a estudiar la validez de las hipótesis de trabajo usualmente empleadas en la enseñanza de las oscilaciones libres a nivel de pregrado. Este análisis mostró la importancia de estudiar la respuesta elástica del resorte y su influencia en el movimiento del sistema oscilante. Se observó que a bajas cargas la frecuencia de oscilación responde a un sistema más rígido debido a la no linealidad de la curva de carga del resorte.

También se analizó el efecto que ejerce la masa propia del resorte y el rozamiento viscoso. Mientras que este último es despreciable en las mediciones de este trabajo, la inercia aportada por la masa del resorte es una fracción cada vez más importante de la inercia total cuando se

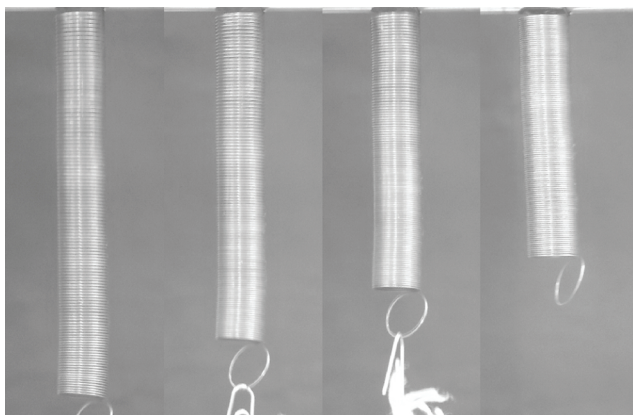


Figura 8: Fotos del resorte cargado con distintas masas. De izq. a der.: cargado con 34.5 g, 29 g, 21.2 g y resorte descargado respectivamente.

suspenden masas más pequeñas y debe ser tenida en cuenta para la inercia neta del sistema en este modelo.

Se comprobó que, para masas superiores a 30 g, el modelo dinámico predice valores de la frecuencia de oscilación, con una discrepancia relativa máxima del 0,6 % respecto a los datos experimentales. Esto permite concluir que es posible representar el comportamiento de un sistema masa-resorte real, en oscilaciones libres con condiciones de fricción despreciable, mediante un modelo lineal simple desarrollado a partir del concepto de constante elástica dinámica, k_D . Esto se hizo mediante un ajuste estadístico de la curva de carga del resorte y además, teniendo en cuenta en forma heurística la distribución continua de masa del sistema.

Material suplementario

El siguiente material suplementario está disponible en línea:

Anexo

Referencias

- [1] F.W. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young y R.A. Freedman, *Física Universitaria* (Addison-Wesley Longman, México, 2001).
- [2] R. Serway, *Física* (Mc Graw Hill, México, 1997).
- [3] P. Tipler, *Física* (Ed. Reverté, Barcelona, 1994).
- [4] D. Giancoli, *Física para Ciencias e Ingeniería* (Ed. Pearson, México, 2008).
- [5] N. Aranha, J. Martins de Oliveira Jr, L.O. Bellio e W. Bonventi Jr., *Revista Brasileira de Ensino de Física* **38**, e4305 (2016).
- [6] C.A. Triana and F. Fajardo, *Eur. J. Phys.* **33**, 219 (2012).
- [7] C.A. Triana e F. Fajardo, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **35**, 4305 (2013).
- [8] E.E. Galloni and M. Kohen, *American Journal of Physics* **47**, 1076 (1979).
- [9] B.L. Worsnop and H.T. Flint, *Advanced Practical Physics for Student* (Methuen & Co., London, 1957).
- [10] J.S. Fernández y E.E. Galloni, *Trabajos Prácticos de Física* (Centro de Estudiantes de Ingeniería de Buenos Aires, Buenos Aires, 1947).
- [11] M. Leclerc, *American Journal of Physics* **55**, 178 (1987).
- [12] A.H. Cottrel, *The Mechanical Properties of Matter* (Wiley, New York, 1964).
- [13] R. Welti, *Introducción a la Física de las Ondas* (UNR Editora, Rosario, 1999), 2da. ed.
- [14] J.C. Slater and N.H. Frank, *Introduction to Theoretical Physics* (Mc Graw-Hill, London, 1933).
- [15] Z. Wilchinsky, *The American Physics Teacher* **7**, 134 (1939).
- [16] J. Stewart, *Cálculo de Una Variable. Trascendentes Tempranas* (CENGAGE Learning, México, 2008), 6ta. ed.
- [17] E.E. Rodríguez and G.A. Gesnoux, *The Physics Teacher* **45**, 100 (2007).