Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 3, 3306 (2015)
www.sbfisica.org.br
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173731851

A função delta revisitada: De Heaviside a Dirac

(The delta function revisited: from Heaviside to Dirac)

D.A.V. Tonidandel[1], A.E.A. Araújo[2]

[1] *Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil*
[2] *Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil*
Recebido em 9/3/2015; Aceito em 25/3/2015; Publicado em 30/9/2015

A função delta (δ), nomeada após o trabalho pioneiro do físico inglês Paul Adrien Maurice Dirac ($\star$1902, †1984) em 1927, tornou-se ferramenta primordial para a ciência e engenharia atuais, com aplicações que vão da teoria quântica até o controle de processos industriais. Ela tem a capacidade facilitar a obtenção de inúmeros resultados que, de outra forma, necessitariam de complicados argumentos. Não obstante, suas definições na literatura são, frequentemente, apresentadas com pouco significado, mesmo que tenham sido corretamente aplicadas na solução de problemas. Este artigo tentará mostrar o engenhoso e inventivo caminho de desenvolvimento desta extraordinária ferramenta, que, além de Dirac, teve a contribuição de outros nomes, como o matemático francês Laurent Moise Schwartz ($\star$1915, † 2002), com a teoria das distribuições, e do excêntrico físico-matemático e autodidata inglês chamado Oliver Heaviside ($\star$1850, † 1925).
Palavras-chave: função impulso, delta de Dirac, história da engenharia elétrica, teoria das distribuições.

The delta (δ) function, named after the English physicist Paul Adrien Maurice Dirac ($\star$1902, †1984) in a 1927 pioneer work, became a fundamental tool to modern science and engineering, with applications covering areas from quantum theory to industrial process control. It facilitates the obtention of countless results that, in other ways, would require complicated arguments. Nonetheless, its definitions in literature are, frequently, presented with few or no meaning, even though they had been correctly applied in the solution of several problems. This paper intends to show the ingenious and inventive way of development of this extraordinary tool that, besides Dirac, had the contribution of others, such as the french mathematician Laurent Moise Schwartz ($\star$1915, †2002), with the theory of distributions, as well as the eccentric and self-taught English mathematical physicist called Oliver Heaviside ($\star$1850, †1925).
Keywords: impulse function, Dirac's delta, history of physics, history of electrical engineering, theory of distributions.

1. Introdução

Em 2003, o matemático americano Alex Kasman escreveu um belo conto de "ficção matemática" [1], em que uma pesquisadora acaba, acidentalmente, descobrindo a resposta para a questão de como uma nova teoria encontra, em algum momento, uma utilidade prática na ciência, i.e., como resultados em matemática abstrata, construídos sem quaisquer alicerces no "mundo real", acabam se tornando tão úteis, mesmo em áreas diversas. Naturalmente após Hilbert, Riemann e Einstein, a personagem Amanda Birnbaum refletia, ninguém mais acha estranho duas retas paralelas que se encontram no infinito, como afirma a geometria não-Euclidiana. Os números imaginários então, continuava, quando entraram em cena [2], tampouco eram considerados matemática "de verdade"! Atualmente, as funções de onda de uma partícula subatômica são consideradas entidades complexas em sua natureza... mas antes!

De fato, diversas ferramentas hoje "encaradas" com despudor, tomaram corpo e consistência em momentos em que o próprio ato de observar consistia sério entrave, como no surgimento da teoria quântica [3, p. 20]. Em verdade, ao longo da historiografia da ciência, pode-se observar que a matemática acabou sobrepondo-se a esta incapacidade de "ver" um sem número de vezes, e os instrumentos criados para "iluminar" os objetos de interesse eram puramente abstratos.[2] Esse era o contexto

[1] E-mail: tonidandel@decat.em.ufop.br.

[2] Esta analogia é baseada num experimento proposto pelo físico Alemão Werner karl Heisenberg ($\star$1901, †1976) para determinar a posição e o momento de um elétron, que não podem ser observados diretamente, pois têm dimensão menor que os comprimentos de onda da luz visível. São ideias que originaram o famoso "princípio da incerteza de Heisenberg".

que propiciou o surgimento de uma notável ferramenta, conhecida atualmente como *impulso unitário* ou *delta* de Dirac.

Mundialmente conhecida após o trabalho de Paul A.M. Dirac [4] (quando contava apenas 25 anos), pode-se fazer uma ideia do conceito de impulso a partir do antigo exemplo da mecânica em que uma força concentrada em curto intervalo de tempo acontece "de uma só vez", como no instante em que um jogador de futebol chuta uma bola, representando uma "força impulsiva" aplicada, para provocar uma alteração finita do momento linear (da bola), em um tempo infinitesimal. E embora um impulso possa diferir de uma força impulsiva apenas em magnitude, a importância deste princípio para a ciência e engenharia atuais é bem mais ampla do que simplesmente um conceito de força, propriamente dita, e sim o efeito causado por algum agente, que difere intrinsecamente da natureza de "força".

Dirac, se dialogasse com a "Dra. Birnbaum" do conto de Kasman, poderia argumentar que dificilmente poderia ser possível formar uma "tela mental" da natureza sem introduzir "irrelevâncias", que poderiam ser usadas como representações de "certas classes de infinito" [5], como a dizer que, já que o universo [quântico] estaria muito além de sua compreensão, uma nova ideia aplicada seria melhor que nada, a exemplo de um homem que vê pregos em toda parte, por possuir como ferramenta apenas um martelo [7] (ou uma função delta!). Ou então, poderia dizer que, já que este universo aparenta ter algumas regras intrínsecas de funcionamento, certamente a matemática poderia ser usada para dizer algo sobre ele, de alguma forma.

Em verdade, uma parte dos esforços do jovem engenheiro britânico se concentrou em elaborar um esquema para lidar com estas possíveis regras, em especial aquelas que relacionavam os *estados* dos sistemas dinâmicos em questão, os sistemas quânticos, e foi que, em dado momento, provavelmente, as funções impulsivas "saltaram" aos seus olhos.[3] No entanto, o conceito de impulso nasce em um contexto anterior e, de certa forma, ainda mais "bizarro" do que o que aparenta ser o mundo subatômico. Antes disso, porém, é interessante investigar o "mecanismo" da função delta.

A tradição científica clássica, talvez influenciada pelos físicos britânicos da era Vitoriana, como Lord Kelvin[a], Stokes[b] e até o próprio Maxwell[c], tem sido a de considerar os fenômenos físicos como essencialmente mecânicos. No eletromagnetismo, por exemplo, tanto Maxwell quanto seus seguidores mais eminentes, como Heaviside, Lodge[d] e FitzGerald[e], "enxergavam" os fenômenos eletromagnéticos como uma espécie de mecanismo de turbilhonamento no éter, acreditando que matéria e movimento eram os únicos alicerces para qualquer teoria física. Questões sobre a natureza intríseca dos "imponderáveis" (luz, eletricidade, calor) eram evitadas, e os esforços eram concentrados em encontrar os "mecanismos" de tais fenômenos, formando o que o prof. Hunt [6] chamou de "programa mecanicista", em que a procura por "leis" e "mecanismos" era uma constante. O universo, acreditavam, era apenas matéria e movimento. E mesmo quando os modelos mecânicos começaram a sair de cena, já no fim do século, a preferência dos físicos britânicos por representações "palpáveis" da realidade continuou evidente na gradual substituição dos "modelos mecânicos" pela "maquinaria matemática" [8, p. 114], ainda ao gosto da engenharia contemporânea. Aliás, eles tinham fortes "evidências" de que tais modelos poderiam ser mais que meras ilustrações: a teoria cinética dos gases, por exemplo, havia atingido um enorme sucesso, e quase todo físico ingês, já pelos idos de 1870, acreditava que ela representava a verdadeira natureza dos gases.

Ironicamente, esse paradigma começou a ser alterado com o surgimento da teoria quântica, já no início do século XX: mesmo que se montasse um esquema de equações que eram, de certa forma, análogas às equações clássicas, as variáveis dinâmicas da mecânica quântica não obedeciam às leis comutativas da multiplicação, mas satisfaziam as condições quânticas, de implicações inimagináveis até então. Daí seguia-se que uma variável quântica não podia ser representada por um número "comum" [9], mas sim um tipo especial, que Dirac chamava de *q-número*. Em geral, os *q-números* podiam ser representados por matrizes nas quais seus elementos eram números comuns, *c-números*. Mas a "coisa" não parava por aí: era preciso criar um novo programa, para lidar com a igualmente "nova realidade".

[a]Sir William Thomson (⋆1804, †1907).
[b]George Gabriel Stokes (⋆1849, †1903).
[c]James Clerk Maxwell (⋆1831, †1879).
[d]Sir Oliver Lodge (⋆1851, †1940).
[e]George Francis FitzGerald (⋆1851, †1901).

2. Construíndo o delta

Um exemplo de sinal impulsivo é ilustrado pela Fig. 1, em que $x(t)$ representa um pulso retangular de duração h e altura $1/h$, centrado em $t = 0$, com valor zero para todo $|t| > \frac{h}{2}$. Para qualquer $h > 0$, é claro que $x(t)$ tem área unitária. Este sinal pode ser obtido pela soma de dois sinais degrau, como ilustra a Fig. 2.

Suponha que em seguida o sinal $x(t)$ seja multiplicado por uma função contínua arbitrária $\beta(t)$, que

[3]Talvez por lidar a todo o instante com funcões descontínuas.

é uma suposição razoável, se se considerar $\beta(t)$ uma função "do mundo real", bem comportada. Integrado-a ao longo do tempo, tem-se:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\beta(t)dt = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{h}\beta(t)dt = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \beta(t)dt\,. \tag{1}$$

Imagine que em seguida o pulso retangular comece a "encolher", ou seja, a duração do pulso comece a concentrar-se em um intervalo de tempo cada vez menor e, consequentemente, sua altura fique cada vez maior [$h \to 0$ e $1/h \to \infty$]. Como $\beta(t)$ é uma função "do mundo real", isto significa que ela será (pelo menos) contínua e, por isso, pode-se assumir que $\beta(t)$ não possa alterar-se muito neste curto intervalo de tempo e assim, pode-se tratá-la como uma função constante, podendo ser retirada do sinal de integração. Com o encolhimento do intervalo, $\beta(t)$ aproxima-se naturalmente de $\beta(0)$ ao longo de todo intervalo de integração, que tem comprimento h. Assim,

$$\lim_{h\to 0} I = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \beta(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\beta(0)\int_{-h/2}^{h/2} dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\beta(0)h = \beta(0)\,, \tag{2}$$

considerando que $\beta(t)$ é "bem comportada" [diferenciável e com $\lim_{t\to\pm\infty}\beta(t) = 0$]. Então, o limite de $x(t)$ à medida que $h \to 0$ parece mostrar que o pulso terá uma altura infinita e estará concentrado em um intervalo de tempo de duração zero. Em outras palavras, **não é uma função!** E desde que não é possível traçar um pico de altura infinita "à mão", *Dirac* o indicou por uma seta em $t = 0$, como uma tentaviva de mostrar como um pulso perfeitamente comum pode "tornar-se" infinitamente alto e com duração zero, mantendo sua área unitária (Fig. 3). Certamente uma ferramenta quase mágica![4]

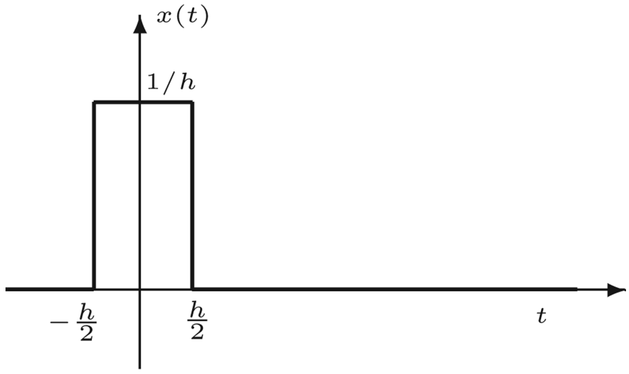

Figura 1 - Função pulso retangular.

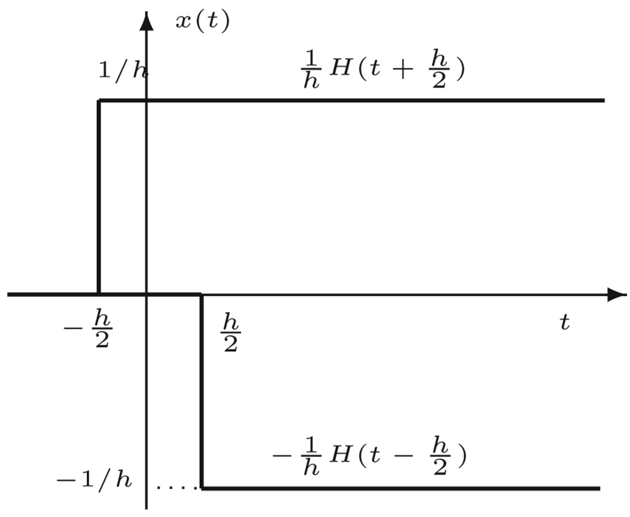

Figura 2 - Função $x(t)$ decomposta em dois sinais do tipo degrau.

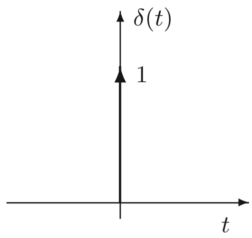

Figura 3 - Função impulso unitário ou delta de Dirac.

Em verdade, tal análise, feita sem muito rigor, é mais próxima da que seria feita por um engenheiro, como Dirac, que poderia fazer um matemático "puro" literalmente "torcer o nariz": quando no cálculo da integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\beta(t)dt$, o termo $1/h$ é retirado do sinal de integração, ele é tratado como uma constante e, após isso, é tomado o limite quando $h \to 0$, considerando h uma variável. Na prática, como a operação de integração é definida como um limite, o que está sendo feito é, na verdade, uma inversão da ordem de tomada dos limites. Mas seria isto válido, matematicamente? Na prática, não se sabe [e frequentemente não é!]. A necessidade de definição de funções impulsivas aparecia com frequência em problemas da mecânica quântica, quando trabalhava-se com transições entre níveis discretos de energia. A energia, agora "quantizada", era definida, aliás, por $E = \frac{\hbar c}{\lambda}$, em que $\hbar$ é a constante de Planck,[a] c, a velocidade da luz e λ, o comprimento de onda da "entidade" considerada.

[a]Max Karl Ernst Ludwig Planck (⋆1858, †1947).

[4]Será esta uma das "classes de infinito" que Dirac se referia?

Mais formalmente, escreve-se o limite de $x(t)$ como

$$\lim_{h\to 0} x(t) = \delta(t)\,, \tag{3}$$

que denota um impulso que ocorre em $t = 0$. E apesar da natural dificuldade para visualizar uma "função" com um pico de altura infinita e uma base com dimensão zero, pode-se visualizar perfeitamente como $\delta(t)$ se comporta dentro de um sinal de integração

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\beta(t)dt = \beta(0)\,. \tag{4}$$

Para uma função contínua $\beta(t)$ qualquer, $\delta(t)$ será também chamada de "função teste". E como não há "privilégio" algum com relação ao instante inicial, pode-se localizar o impulso em qualquer instante de tempo, e.g., $t = t_0$, escrevendo simplesmente $\delta(t - t_0)$. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\beta(t)dt = \beta(t_0)\,, \tag{5}$$

que é uma propriedade importantíssima do impulso, chamada propriedade da amostragem. Fisicamente, esta propriedade indica que a avaliação - dentro do sinal de integração - de um impulso multiplicado por uma função contínua é igual ao valor da função naquele ponto!

Durante os empolgantes anos de 1925-1926, a então recente teoria dos *quanta* de energia já havia proposto com precisão os níveis atômicos de energia. Por se tratar de uma teoria que lidava com o "muito pequeno", ainda não era condizente com a já aclamada Relatividade Especial de Einstein, que tratava do universo "muito grande", de objetos massivos e dimensões estelares. Em 1925, um jovem engenheiro eletricista de 23 anos, graduado em 1921 e estudante de doutorado, tem um encontro memorável com o físico alemão Werner Heisenberg [que 8 anos depois ganharia o prêmio Nobel por avanços que levariam à descoberta da estrutura íntima do hidrogênio] e prontamente começa a trabalhar na nova teoria. Por já ter certa inclinação para matemática, o jovem Paul Dirac direciona suas atenções para os aspectos teóricos da mecânica quântica. Após receber o *PhD* em 1926, Dirac submete uma série de artigos à *Royal Society* de Londres, nos quais desenvolve uma série de equações e ferramentas para lidar com o problema quântico. Uma delas consistia em sua famosa equação de onda, que incorporava a Relatividade Especial à também famigerada equação de onda de Shrödinger. Uma das soluções da equação foi interpretada por Dirac como correspondendo à existência de uma partícula similar ao elétron, mas com carga positiva, batizada por ele de "pósitron", que foi mais tarde confirmada experimentalmente. Tais descobertas levaram-no a dividir com Erwin Schrödinger o prêmio Nobel de Física em 1933 [10].

Não obstante, definir a função impulso a partir da propriedade da amostragem (Eq. (5)), ou como o limite da Eq. (3) - nas quais $\beta(t)$ e $x(t)$ são funções arbitrárias, "do mundo real" - não tem, realmente, significado (matemático). Estas ou quaisquer outras definições não terão significado se insistirmos em enxergar $\delta(t)$ com uma função. Mas se o impulso unitário não é função, o que é?

3. Afinal, o que é uma função?

O matemático francês Jean Le Rond D'Alembert ($\star$1717, †1783) acreditava que o conceito de função deveria ser condicionado aos métodos comuns da álgebra e do cálculo. Já o grande matemático suíço Leonhard Euler ($\star$1707, †1783) tinha, por sua vez, uma visão aparentemente mais simples, acreditando que uma função poderia ser definida simplesmente se fosse possível traçar a curva de $f(t) \times t$, da mesma forma como seria feito com uma caneta ao deslizá-la sobre um pedaço de papel.

Mas a visão de Euler não é tão simplória como possa parecer em um primeiro momento: desenhar uma curva sobre um pedaço de papel significa que, em razão dos próprios movimentos da caneta, a curva resultante possui uma tangente em quase todos os pontos (e por isso, existe a derivada).[5] Porém, Euler estava ligeiramente enganado neste ponto: em 1872, o matemático alemão Karl Weirstrass ($\star$1815, †1897) apresentou uma função que é contínua mas que não possui derivada em ponto algum, ou seja, não é possível tracá-la à mão! A soma de Weirstrass é a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos\left(a^n \pi x\right)\,, \tag{6}$$

em que $0 < b < 1$ e a é um número ímpar, tal que $ab > 1 + (3/2)\pi$.

Na realidade, hoje em dia já se sabe que a resposta para a questão "o que é uma função?" é bem mais simples. Uma função $f(t)$ pode ser entendida simplesmente como uma regra que associa a cada valor de t um valor de f; ou seja, é um mapeamento de t em f simbolizado por $f(t) : t \to f(t)$. Logo, afirmar que o delta de Dirac não seja uma função simplesmente pelo fato de não ser possível tracá-la à mão não é suficiente.

Em verdade, pode-se dizer que o delta de Dirac pertence a uma classe mais geral de funções, chamadas *funcionais* ou, simplesmente, *distribuições*. Um funcional $\alpha(t)$ pode ser entendido como o processo de associar, a

[5] Além disso, se uma curva possui um número finito de pontos onde a derivada não existe, ainda é possível traçá-la; por exemplo, uma função do tipo $f(t) = |t|$.

uma função arbitrária $\beta(t)$, um número $N_\alpha[\beta(t)]$:[6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)\beta(t)dt = N_\alpha[\beta(t)]\,. \tag{7}$$

Isto significa que as integrais das Eqs. (4) e (5) são, por exemplo, definidas pelas quantidades $\beta(0)$ e $\beta(t_0)$. Assim, o funcional $\delta(t)$ e os números $\beta(0)$ e $\beta(t_0)$ não fazem sentido algum de maneira independente, isolada, e, diferentemente do conceito de função, apenas possuem significado (inclusive físico!) dentro do sinal de integração. Um exemplo de funcional dependente de um parâmetro é a função

$$e^{-j\omega t},$$

que é, nada mais nada menos, que o *Kernel* (núcleo) da transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}v(t)dt = V(\omega)\,. \tag{8}$$

Isto é, o número associado a uma determinada função $v(t)$ por intermédio do funcional $e^{-j\omega t}$ - que faz o papel de núcleo - é a transformada de Fourier de $v(t)$, dada por $V(\omega)$!

O conceito das distribuições ganhou corpo de teoria após o artigo de 1945 do matemático francês Laurent Moise Schwartz[7] ($\star$1915, †2002) intitulado *Généralisation de la notion de fonction de dérivation, de transformation de fourier, et applications mathematiques et physiques* [12] [mais tarde publicado no livro *Théorie des Distributions*, de 1966 [13]], promovendo desenvolvimentos que o levaram a ganhar a medalha Fields, uma espécie de prêmio Nobel para a matemática, em 1950.[8]

No entanto, esta não foi a forma original pela qual a famosa "função" foi obtida. Em verdade, ela foi estabelecida de maneira ainda mais "desleixada", sem tanta formalidade. Talvez, uma das inspirações tenha sido o treinamento inicial que Dirac obteve em engenharia elétrica, o que ele comentava com orgulho, ou em última instância, a leitura dos agora antigos e relativamente esquecidos trabalhos de um obscuro autodidata inglês, operador de telégrafos e pioneiro da engenharia elétrica, chamado Oliver Heaviside.

4. O cálculo operacional de Heaviside

> Se considerarmos, por um momento, a Lei de Ohm[9] de um ponto de vista puramente matemático, em que R, que expressa a resistência da equação $V = RI$ [que à época era representada por $V = RC$, em que o símbolo C era até então utilizado para designar a corrente elétrica], quando a corrente está em regime permanente, *a resistência é o operador* [grifo nosso] que transforma a corrente I em tensão V.

Estas são as palavras de Oliver Heaviside, na abertura de seu artigo apresentado à *Philosophical Magazine*, em 1887 [15] - posteriormente compilados nos seus *Electrical Papers* [16] de 1892 - quando estabeleceu o que hoje conhecemos como "operadores impedância", para os três dispositivos elétricos passivos (discretos), resistores (R), capacitores [C, que à época era designado pela letra K] e indutores (L), expressos em suas "leis relacionais": $V = RI$, $V = \frac{1}{C}\int Idt$ ou $I = C\frac{dV}{dt}$ e $V = L\frac{dI}{dt}$, escrevendo-os na forma operacional,

$$V = RI\,, \tag{9}$$

$$V = \frac{1}{Cp}I\,, \tag{10}$$

$$V = LpI\,. \tag{11}$$

Em suma, Heaviside reduziu, no tratamento de circuitos elétricos, equações diferenciais a meras equações algébricas, representando a diferenciação no tempo por um operador p [e, consequentemente, a integração por $1/p$], tratando-os [em um processo chamado por ele de *"algebrizing", que poderia ser traduzido como "algebrizar" uma equação* diferencial] como entidades algébricas quaisquer, i.e., números. Definindo após este passo a razão V/I como a *Impedância Operacional* Z, tem-se

$$Z_R(p) = R\,, \tag{12}$$

$$Z_C(p) = \frac{1}{Cp}\,, \tag{13}$$

$$Z_L(p) = Lp\,. \tag{14}$$

Com isso, Heaviside dá o pontapé inicial para dois monumentais desenvolvimentos: a transformada de Lalplace[10] [17] e possibilita um tratamento próximo à análise fasorial,[11] em que componentes resistivos e reativos são tratados como meras resistências. E embora

[6] Este número poderia ser o valor de $\alpha(t)$ ou suas derivadas para algum $t = t_0$, a área abaixo da curva de $\alpha(t)$ em um intervalo qualquer, ou qualquer outra quantidade dependente de $\alpha(t)$.

[7] Schwartz foi um grande professor, educador, militante político e confessamente apaixonado pela entomologia! Certamente um homem notável, de muitos amores, tendo a matemática como sua maior eleita, como chegou a afirmar em sua autobiografia, intitulada "Un Mathématicien aux prises avec le siècle" [Um matemático lutando com o século] [11].

[8] Prêmio este que, aliás, teve em 2014 um brasileiro como recipiente, o matemático do instituto nacional de matemática pura e aplicada (IMPA), Artur Ávila, por suas contribuições na área de sistemas dinâmicos.

[9] George Simon Ohm ($\star$1789 †1854) [14].

[10] Como é possível perceber, o operador "p" é o precursor da variável "s" da transformada de Laplace.

[11] Para mais detalhes sobre a história e desenvolvimento do conceito de fasor, consultar a Ref. [18]

tivesse consciência - profética talvez - de que os seus operadores impedância seriam “muito empregados no futuro” [19], não tinha grandes preocupações com os rigores matemáticos. Por exemplo, Heaviside não hesitou um segundo sequer quando os operadores fracionários [como $p^{1/2}$, que implica em $(d/dt)^{1/2}$] surgiram em sua frente. Este tipo de atitude atrasou em muito a aceitação de suas ideias, por mais que os operadores diferenciais fracionários já fossem velhos conhecidos dos matemáticos.[12] E isto acontecia frequentemente em circuitos contínuos, de parâmetros distribuídos, por exemplo, em uma linha de transmissão de sinais telegráficos.

No artigo de 1887, [15] ele aborda o problema com uma técnica certamente incomum para a maioria dos engenheiros de então. Ele primeiramente considera uma linha de transmissão infinita, com uma impedância operacional $Z(p)$. E como uma linha “infinita” significa, na verdade, uma linha “muito, muito longa”, Heaviside adiciona a ela um “pedaço” muito pequeno de comprimento l, à impedância total. Ele supõe ainda que tal pedacinho de linha pudesse ser modelado por meio de um circuito RL longitudinal e por um RC *shunt*, como ilustra a Fig. 4.

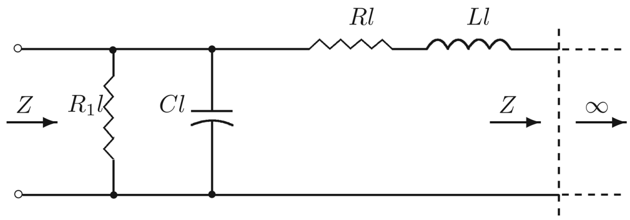

Figura 4 - Linha de transmissão infinita.

E como o resistor $R1$ [de condutância K] está em paralelo com com o capacitor C, e estes encontram-se em paralelo com os elementos resistivo e indutivo (que estão em série com “resto” da linha, de impedância total Z), Heaviside soma, por conveniência, as condutâncias (recíproco das impedâncias), resultando em algo do tipo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= Kl + Cpl + \frac{1}{Rl + Llp + Z} \\
\frac{Rl + Llp + Z}{Z} &= (Kl + Cpl)(Rl + Llp + Z) + 1 \\
(R + Lp)l + Z &= Z(K + Cp)l(Rl + Llp + Z) + Z \\
\frac{R + Lp}{K + Cp} &= Z(Rl + Llp + Z)\,. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Calculando o limite quando $l \to 0$, que significa remover o “pedaço” muito pequeno de linha, tem-se

$$Z(p) = \sqrt{\frac{R + Lp}{K + Cp}}\,. \qquad (16)$$

Considerando $L/R = C/K$ [que era, aliás a condição de Heaviside para uma transmissão sem distorções], chega-se facilmente a $Z(p) = \sqrt{\frac{R}{K}}$, que denota uma impedância operacional independente de p. Mas e quando isto não era possível?

5. O significado do operador $p^{1/2}$ e o degrau unitário

Em [21] Heaviside considera alguns casos especiais do problema da linha de transmissão, considerando, por exemplo, $R = C = 0$ na Eq. (16). Escrevendo a corrente na forma operacional $I(p)$, sabendo que $V(p) = Z(p)I(p)$, tem-se

$$I = \sqrt{\frac{K}{Lp}}V = \left(\frac{K}{Lp}\right)^{\frac{1}{2}} V. \qquad (17)$$

O que significa, afinal, o termo $p^{1/2}$ [que implica em $(d/dt)^{1/2}$]? Uma impedância independente de p poderia fazer frente à qualquer sinal senoidal, independentemente da frequência. No entanto, com esse operador “mutilado” a coisa mudava de figura. O próprio Heaviside chegou a admitir que tal informação simbólica era completamente ininteligível. Como proceder?

Heaviside utiliza uma técnica experimental com a qual ele comparava uma equação operacional a uma solução de algum problema conhecido [geralmente obtida em problemas de condução de calor, por meio das séries de Fourier [22]], em que o operador $p^{1/2}$ aparecia na solução quando resolvido pelo método operacional. No entanto, na Ref. [23] ele apresenta uma solução mais formal, utilizando a função pertencente a uma classe chamada de “funções especiais”, denominada *função*

[12] Heaviside utilizava seu operador “p” para reduzir equações diferenciais a equações algébricas, obtendo o mesmo efeito que as transformadas de Laplace e Fourier têm atualmente. Ele encarava a matemática como uma ciência experimental, de laboratório, e fez uso quase “abusivo” dos operadores impedância. Para mais detalhes, consulte a Ref. [20].

[13] Esta função foi estabelecida pelo matemático alemão Leonhard Euler (1707-1783), e é uma espécie de generalização do conceito de fatorial de um número m.

Gama (Γ)[13]

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-v} v^{m-1} dv \,. \tag{18}$$

Esta integral tem uma propriedade interessante, que mostra uma relação entre a função Γ e o fatorial de um número inteiro m

$$\begin{aligned} \Gamma(m) &= (m-1)\Gamma(m-1) \,, & (19) \\ \Gamma(m) &= (m-1)! & (20) \end{aligned}$$

em que $0! = 1$ e $m = 1, 2, 3...$

A função Gama pode ser avaliada para mostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, por exemplo. Mas o que isto tem a ver com $p^{1/2}$? Considere primeiramente a relação que mostra a derivada n-ésima da função t^m, para n e m inteiros

$$\frac{d^n}{dt^n} t^m = \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n} \,. \tag{21}$$

Mas e se n for considerado um número não-inteiro? Desconsiderando se isto pode ser feito ou não, digamos que $n = 1/2$, e, utilizando a notação do operador p, tem-se

$$p^{1/2} t^m = \frac{m!}{(m-\frac{1}{2})!} t^{m-1/2} \,. \tag{22}$$

Era o que Heaviside fazia, como não era de se estranhar. Ainda, assumindo $m = 0$, tem-se $t^m = 1$, o que resulta em de suas invenções favoritas, hoje conhecida como função degrau unitário[14]

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0, \\ 1 & \text{se} \quad t > 0, \end{cases} \tag{23}$$

ilustrada pela Fig. 5.

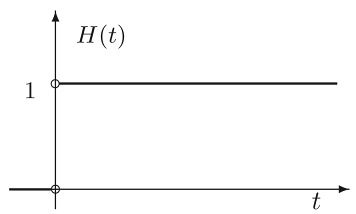

Figura 5 - Função degrau unitário ou função de Heaviside.

Assim, pode-se substituir o valor 1 por $H(t)$, considerando $t > 0$ [Heaviside usava a notação ***"1"***, o que causava muita confusão], para obter

$$p^{1/2} H(t) = \frac{0!}{(-\frac{1}{2})!} t^{-1/2} \,. \tag{24}$$

Assumindo um valor não inteiro de m para a função Gama[15] como, por exemplo, $m = 1/2$, na relação de recursividade 20, obtém-se o curioso resultado $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$. Assim,

$$p^{1/2} \cdot H(t) = \frac{0!}{(\pi)^{1/2}} t^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \,. \tag{25}$$

Um resultado realmente impressionante, que possibilita encontrar-se o valor da corrente no problema operacional da seção 5. (Eq. (15)), no "domínio do tempo", desde que seja feito n = -1/2 e $m = 0$ na Eq. (21), assumindo a tensão $v(t)$ como um degrau $H(t)$. E mais além, a compreensão do que significa $p^{1/2}$ nos levará diretamente ao delta de Dirac.

6. O delta de Dirac revisitado

Heaviside considerou o efeito de potências inteiras do operador p relativo à derivação em sua função degrau $H(t)$ [que ele escrevia como ***"1"***]. E isto acontecia frequentemente quando aplicado em problemas discretos, de parâmetros concentrados [resistência, capacitância e indutância], como em um cabo de tamanho finito, no problema da seção 4..

No segundo volume do *Eletromagnetic Theory*, na seção *Theory of an impulsive current produced by a continued impressed force* [25], Heaviside afirma que

> "$p \cdot 1$ significa uma função de t *totalmente concentrada* [grifo nosso] no instante $t = 0$, com um total [referindo-se à integral] de 1. É uma função impulsiva, por assim dizer. A ideia de impulso é bem conhecida na mecânica e é essencialmente a mesma aqui."

Mais além comenta:

> "Diferentemente da função $p^{1/2} \cdot 1$, a função $p \cdot 1$ não involve questões experimentais ou de diferenciação generalizada, mas apenas as ideias ordinárias de diferenciação e integração levadas ao seu limite."

E ele estava, mais uma vez, correto em sua explicação. Correto de um modo que só depois foi elucidado formalmente do ponto de vista matemático, o que era característico de suas ideias aparentemente "heréticas"! Efetivamente, retornando ao conceito de distribuição desenvolvido nas seções 2. e 3. e expresso pela Eq. (7), tem-se

$$\int_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(t)\beta(t) dt = N_\alpha[\beta(t)]$$

.

A derivada da distribuição $\alpha(t)$ pode ser definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(t)}{dt} \beta(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) \frac{d\beta(t)}{dt} dt \,, \tag{26}$$

[14]Um estudo que busca demonstrar a função degrau unitário como forma de entender as relações entre as transformadas de Laplace e Fourier pode ser vista na Ref. [24].

[15]Realmente, não se sabe se estas operações [fatorial de números fracionários ou negativos] são válidas, mas Heaviside as utilizava peremptoriamente para chegar em seus resultados, que quase sempre estavam corretos.

que é consistente com a integração por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha(t)}{dt}\beta(t)dt = \beta(t)\alpha(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)\frac{d\beta(t)}{dt}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)\frac{d\beta(t)}{dt}dt\,, \tag{27}$$

supondo a função $\beta(t)$ "bem comportada" [diferenciável e com $\lim_{t\to\infty} \beta(t) = 0$].[16] Esta relação fornece uma ligação íntima entre o delta de Dirac $\delta(t)$ e a função degrau $H(t)$, desde que sejam encaradas como distribuições

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\beta(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} H(t)\frac{d\beta(t)}{dt}dt\,, \tag{28}$$

o que implica em

$$\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t)\,. \tag{29}$$

De fato, aplicando a definição de derivada generalizada de um funcional para a função degrau, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH(t)}{dt}\beta(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} H(t)\frac{d\beta(t)}{dt}dt\,, \tag{30}$$

ou, na notação de Heaviside ($p \triangleq d/dt$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\cdot H(t)\beta(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} H(t)\frac{d\beta(t)}{dt}dt = -\int_{0}^{\infty} \frac{d\beta(t)}{dt}dt = \beta(0) - \beta(\infty) = \beta(0)\,,$$

já que $\beta(t)$ é contínua e bem comportada e $H(t) = 1$ para $t > 0$. Observe que este resultado é consistente com a propriedade da amostragem (Eq. (4))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\beta(t)dt = \beta(0)\,,$$

que indica um impulso localizado na origem e que a derivada generalizada[17] de uma função descontínua - no caso, a função degrau - contém um impulso que representa o "salto" de descontinuidade.

Quando uma grandeza física V é representada por uma função $v(t)$, ignora-se a possível dependência de $v(t)$ com outras variáveis, e ninguém duvida que $v(t)$ "não exista", mesmo que não se possua um instrumento capaz de medí-la com fidelidade. Por exemplo, se V é uma fonte de tensão, é admissível que $v(t)$ a represente, mesmo sabendo-se da imperfeição intrínseca de um voltímetro. Este ponto de vista exige a representação de V como uma função "ordinária" [26]. No entanto, essa é uma forma ligeiramente ingênua de representar uma quantidade física V "real", caso não seja considerada como uma distribuição. Uma grandeza física não será nada além do que a totalidade dos efeitos que ela produz, como por exemplo, a deflexão D de uma agulha em um voltímetro. E desde que tais efeitos são números que V associa à uma função $A(t)$, que representa o sistema físico entre V e D, é mais que natural descrever V como uma distribuição. No caso de uma fonte de tensão (linear), aceitando a representação de V por uma função regular $v(t)$, pode-se então representar a deflexão D da agulha (resposta do sistema), em um dado instante t como

$$\int_{0}^{t} v(\tau)A(t-\tau)d\tau = D(t). \tag{31}$$

Esta equação é chamada integral de Duhamel, nomeada após o matemático Jean-Marie Constant Duhamel [Para mais detalhes, consultar as Refs. [27, 28]]. ($\star$1797, †1872), sendo uma ferramenta bastante utilizada em sistemas dinâmicos - especialmente em estudos de vibrações e acústica - para calcular a resposta de um sistema linear a um sinal de entrada arbitrário, que possibilita manter uma estreita conexão com o fenômenos físicos em questão. As integrais de Duhamel eram algumas das poucas ferramentas de análise de sistemas dinâmicos disponíveis à época de Dirac (1927). Esta definição tem uma relação direta com um outro conceito, o de "transformadas", representadas como equações integrais - que foram estabelecidas formalmente em torno de 1926, cerca de um ano antes [Para mais detalhes, consultar as Refs. [27, 28]]. Rigorosamente, caso a fonte V do exemplo seja representada como uma distribuição, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)A(t-\tau)dt = D(t) = D[A(t-\tau)]\,, \tag{32}$$

em que $A(t-\tau)$ é a transformada inversa [de Fourier, de Laplace ou outra] da função de resposta do sistema - que corresponde à definição de "função de transferência", uma função que relaciona as variáveis de saída e entrada de um sistema físico. No caso do exemplo, a saída seria deflexão D da agulha após uma excitação da fonte de tensão V, que representa a entrada.

[16] Isto mostra, aliás, que a derivada da transformada de Fourier $\mathcal{F}$ de uma função $v(t)$ é o negativo da transformada da derivada de $v(t)$, *i.e.*, $\frac{d}{dt}[\mathcal{F}\{v(t)\}] = -\mathcal{F}\{dv(t)/dt\}$.

[17] O mesmo raciocínio pode ser aplicado para mostrar que a n-ésima derivada de um impulso será: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}\beta(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\frac{d^n\beta(t)}{dt^n}dt$. Para $n = 1$, por exemplo, $\delta(t)'\beta(t) = -\delta(t)\beta'(t)$.

7. Considerações finais

Seria correto argumentar-se que a pesquisa científica, em qualquer ramo, justifica-se apenas por sua utilidade prática? A formação de um conceito é, por vezes, diferente de suas formulações posteriores, que acabam por lançar um véu que obscurece os passos seguidos pelos pioneiros. Tanto Heaviside quanto Dirac, se entabulassem um diálogo com a personagem do conto de Kasman, talvez chegassem a pensar que apenas a utilidade de uma ferramenta seria, por si mesma, suficiente para promover inovações em diversos ramos, como quando Dirac lançou-se na busca por esquemas mais adequados ao universo quântico. No entanto, a exemplo da Dra. Birbaum, nenhum dos dois poderia imaginar as implicações futuras de seus desenvolvimentos, demonstrando que a eficácia da matemática é, de fato, "sem razão" de ser.

Na ficção, a pesquisadora acaba descobrindo que, quando uma grande descoberta é feita, o universo em si acaba se "auto-organizando" localmente, de forma a adequar-se à beleza inerente da nova teoria. No caso "real" da história da função delta, talvez o mesmo tenha ocorrido, porém de maneira mais pontual, pois nunca mais o universo científico seria o mesmo: o funcional desenvolvido por Schwartz, explorado por Dirac e Heaviside pertence hoje a uma classe muito especial de sinais e desempenha papel importante em áreas que vão da física teórica aos problemas rotineiros da engenharia, tais como a análise e modelagem de sistemas mecânicos, circuitos elétricos, projeto de sistemas de controle, acústica, processamento de sinais etc. Serve também como base para representação de sinais ou para determinação de aspectos de sistemas, como "função teste", sendo de fundamental importância para o estudioso, sobretudo, conhecê-la em um nível abaixo da superfície, seja para compreender um fenômeno natural ou, simplesmente, solucionar problemas até então ininteligíveis, como a derivada fracionária $(d/dt)^{1/2}$ de uma função qualquer!

Referências

[1] A. Kasman, Math Horiz. **10**, 29 (2003).

[2] A.E.A. Araújo and D.A.V. Tonidandel, J. Control Autom. Electr. Syst. **24**, 388 (2013).

[3] W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory* (Dover publications Inc., New York, 1930).

[4] P.M. Dirac, in *Proceedings of the Royal Society*, London **1**, 621 (1927).

[5] P.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, Cambridge, 1958), 4ª ed.

[6] B.J. Hunt. *The Maxwellians* (Cornell University press, New York, 2005).

[7] A. Kasman, op. cit. p. 2.

[8] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory* (Elibron Classics, London, 1893), v. 2.

[9] P.M. Dirac, op. cit. p. 53.

[10] *Nobel Lectures, Physics 1922-1941* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1965), editado por S. Lundqvist.

[11] L.M. Schwartz, *Un Mathématicien aux Prises Avec le Siècle* (Editions Odile Jacob, Paris, 1997).

[12] L.M. Schwartz, Annales Univ. Grenoble **21**, (1945).

[13] L.M. Schwartz, *Théorie des Distributions* (Hermann, Paris, 1966).

[14] G.S. Ohm, *The Galvanic Circuit Investigated Mathematically*, (Kraus Reprint Co., New York, 1827), v. 1.

[15] O. Heaviside, Phil. Mag. **52**, 479 (1887).

[16] Oliver Heaviside, *Electrical Papers* (Elibron Classics, London, 1892), v. 2, p. 355.

[17] D.A.V. Tonidandel e A.E.A. Araújo, Revista Brasileira de Ensino de Física **34**, 2601 (2012).

[18] A.E.A. Araújo and D.A.V. Tonidandel. op. cit. p. 6.

[19] O. Heaviside, op. cit. p. 355.

[20] D.A.V. Tonidandel and A.E.A. Araújo, op. cit. p. 2601-3.

[21] O. Heaviside, op. cit. §352.

[22] J-B.J. Fourier, *The analytical theory of heat* (Cambridge University Press, Cambridge, 1822), Traduzido para o inglês, com notas, por A. Freeman.

[23] O. Heaviside, op. cit. §350.

[24] D.A.V. Tonidandel and A.E.A. Araújo, in: *Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, 2012. Disponível em `http://www.cricte2004.eletrica.ufpr.br/anais/cba/2012/Artigos/97189.pdf`

[25] O. Heaviside, op. cit. p. 55, §249.

[26] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications* (McGraw-hill Book Company Inc., New York, 1962).

[27] J.R. Carson, *Bell System Technical Journal* **9(1)**, 150 (1932)

[28] J.R. Carson, *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus* (Chelsea Publishing Company, New York, 1953), 2ª ed.