

Estudo introdutório sobre resistência do ar: uma abordagem integrada entre modelagem e experimentação para graduandos

Introductory study about air resistance: an integrated modelling and experimentation approach for undergraduate students

Leandro de Abreu^{*1}, Alysson Fábio Ferrari¹

¹Universidade Federal do ABC, Centro de Ciências Naturais e Humanas, Campus Santo André, Santo André, SP, Brasil.

Recebido em 17 de abril de 2022. Aceito em 16 de junho de 2022.

A influência da resistência do ar sobre um corpo deslocando-se sobre um cabo inclinado foi estudada por uma abordagem integrada englobando modelagem, solução analítica de equações diferenciais ordinárias, experimentação e estimativa de erros para os dados experimentais. O sistema utilizado permite realizar o experimento com três configurações diferentes para o corpo que se desloca, uma sem revestimento, com baixa área de seção transversal em relação à direção de deslocamento, e duas com revestimento, com elevada área de seção transversal, permitindo evidenciar experimentalmente não apenas a dependência da força resistiva com esta área, mas também com o formato do corpo. Como resultado dos procedimentos adotados, foi possível determinar propriedades como coeficiente de atrito, coeficiente de resistência do ar por unidade de massa e velocidade limite. O experimento proposto envolve materiais de baixo custo e pode servir, com as devidas adaptações, como uma atividade de ensino médio.

Palavras chave: Resistência do ar, modelos não lineares, abordagem integrada entre modelagem e experimentação, técnicas estatísticas e numéricas.

The influence of the air resistance over a body moving over a slant cable was studied using an integrated approach, including modelling, analytical solutions to ordinary differential equations, experimental practice and the estimation of error margins for the experimental data. The proposed setup allows for three different configurations for the moving body, one without coating, with a small transverse section area, and two with coating, with higher transverse section area, and this allows us to experimentally demonstrate not only the dependence of air resistance with the transverse area, but also with the format of the moving body. As a result of our methods, we were able to determine properties such as friction coefficient, air resistance coefficient per mass unit and limiting speed. The proposed experiment involves only low cost materials and can be adapted to be used as an activity in college education.

Keywords: Air resistance, non-linear models, integrated modelling and experimentation approach, statistical and numerical techniques.

1. Introdução

1.1. Motivação e histórico

A literatura tem apontado que o uso de abordagens baseadas na integração entre teoria e experimento no ensino em Física [1–3] e que incentivem uma postura ativa dos estudantes ao longo da construção de seu conhecimento [2–5] favorecem o desenvolvimento de capacidades de generalização [1], reflexão [1, 5] e autonomia [1, 2]. Em tais abordagens, procura-se fazer com que conceitos, fenômenos, formalismo matemático e prática (laboratorial e computacional) sejam estudados conjuntamente [1].

Nesse trabalho, apresentamos um experimento, bem como sua modelagem e análise experimental, realizado

na disciplina Fenômenos Mecânicos da Universidade Federal do ABC (UFABC), durante o primeiro quadrimestre letivo do ano de 2021. Devido à pandemia da COVID-19, a universidade operava desde 2020 em formato de ensino remoto, o que trouxe o desafio de adaptar a prática laboratorial das disciplinas de física básica a esse formato. A disciplina de Fenômenos Mecânicos (conhecida abreviadamente como FEMEC) faz parte do curso interdisciplinar Bacharelado em Ciência e Tecnologia (BCT) [6], e corresponde essencialmente à disciplina de Física I na maioria das universidades públicas, ou seja, mecânica clássica estudada em profundidade similar à de livros de coleções como as de Halliday, D. e Resnick, R. [7], Serway, R. D. e Jewett Jr., J. W. [8], Tipler, P. A. e Mosca, G. [9], entre outros. O curso de FEMEC inclui atividades práticas que tipicamente consistem na realização de quatro experimentos em laboratório ao

* Endereço de correspondência: abreu.leandro@aluno.ufabc.edu.br

longo do quadrimestre. Durante o regime de ensino remoto, essas atividades foram substituídas por experimentos simples realizados na casa dos estudantes. A última atividade de laboratório consistiu na proposta, pelos alunos, de um experimento envolvendo conceitos da mecânica, com materiais simples. Este artigo relata um dos experimentos realizados nesse contexto.

Trata-se de um experimento que pode ser realizado com materiais de fácil acesso, integrando aspectos teóricos, experimentais e técnicos, e permitindo a discussão de conceitos da Mecânica e da Aerodinâmica. Mais especificamente, o experimento engloba a modelagem, a solução teórica e a experimentação de um problema envolvendo a resistência do ar [10]. O problema da resistência do ar é de grande importância tecnológica em diversas áreas, como a produção de energia [11], o transporte [12–14], a estabilidade de estruturas [15] e os efeitos de turbulência sobre asas [16]. Uma compreensão mais profunda sobre esse problema pelo leitor pode ser alcançada através de trabalhos teóricos [17–23] e experimentais [24–26] disponíveis na literatura.

Um aspecto do problema de resistência do ar que pode ser explorado dentro da nossa proposta, e que é pouco destacado em artigos sobre o assunto encontrados na literatura [17–26], é a dependência da força resistiva com o formato do objeto (relacionada ao seu coeficiente de arrasto). Esta dependência é explicitada pelo fato de que, em nosso experimento, observa-se claramente a diferença na força resistiva para dois objetos de mesma área de seção transversal, mas com formatos diferentes.

Destacamos que o experimento apresentado pode ser adaptado, simplificando-se as etapas de modelagem e solução numérica, e concentrando-se nos aspectos experimentais, por exemplo. Desta forma, o presente trabalho pode também ser utilizado por docentes de Ensino Médio para introduzir o assunto a seus alunos, permitindo a discussão de conceitos como aplicações de leis de Newton, atrito estático e dinâmico, e resistência do ar.

1.2. O problema da resistência do ar

O ar, como qualquer fluido, interage, em diferentes intensidades, com tudo o que se move imerso nele. Isso provoca uma força resistiva ao movimento de qualquer objeto no ar. Essa força resistiva (\vec{F}_R) é dependente da velocidade (\vec{v}) com a qual o objeto se desloca em relação à atmosfera (ou a qualquer outro fluido homogêneo) e possui a mesma direção e o sentido oposto ao do movimento. Empiricamente, a intensidade da força resistiva (F_R) pode ser considerada como uma função definida em série de potências de v , isto é,

$$F_R = \beta v + \lambda v^2 + \dots, \quad (1)$$

com os coeficientes (β, λ, \dots) determinados experimentalmente. A baixas velocidades, o termo linear é suficiente para representar o fenômeno, e β será chamado de coeficiente de resistência do ar. Quando termos quadráticos ou de ordem superior são necessários para modelar o

problema, a equação de movimento se torna não linear e são nessas situações em que o efeito de turbulência [10] pode ocorrer. Os coeficientes que determinam F_R são específicos para cada objeto, dependem do seu formato e determinam a sua eficiência aerodinâmica.

1.3. Modelagem

O experimento proposto teve por objetivo a determinação do coeficiente de resistência do ar por unidade de massa ($\alpha = \beta/m$) de um conjunto, que será chamado de “carro”, formado por uma polia presa a um suporte, através do estudo de seu movimento sobre um cabo inclinado (Figura 1). O suporte possuía áreas vazadas que podiam ser revestidas com papel, permitindo que o carro assumisse três configurações diferentes: uma sem revestimento (caso em que a resistência do ar pôde ser desprezada), uma com um revestimento plano e outra com um revestimento em forma angulada (ambas com elevada área superficial). Como a atmosfera em que se trabalhou apresentava um comportamento inercial (atmosfera de um cômodo fechado, sem vento), o carro era relativamente rígido e simétrico em relação à direção do movimento relativo, e sua velocidade era suficientemente pequena, o modelo linear para F_R apresentou-se satisfatório para o estudo.

Aplicando-se a 2ª lei de Newton [10] aos sistemas propostos, obtêm-se as equações de movimento

$$\frac{dv}{dt} = 2\rho = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = \frac{P\sin\theta - F_a}{m}, \quad (2)$$

para a configuração sem revestimento, e

$$\frac{dv}{dt} = 2\rho - \alpha v = \frac{P\sin\theta - F_a - F_R}{m}, \quad (3)$$

para a configuração com revestimento. Aqui e no que se segue, m é a massa do carro, t o tempo de deslocamento, θ o ângulo de inclinação do cabo em relação ao chão, $P = mg$ o módulo força peso atuante sobre o carro (com g sendo o módulo da aceleração da gravidade), $F_a = \mu mg \cos\theta$ o módulo da força de atrito resultante (que inclui o atrito interno da polia e o atrito entre o rolamento da polia e o cabo), e μ o coeficiente de atrito associado a F_a . Finalmente, ρ é definido como

$$\rho = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta). \quad (4)$$

Ressalta-se que o empuxo exercido pelo ar sobre o carro foi desconsiderado, pois o seu efeito era desprezível para os sistemas estudados, já que a densidade do carro era muito maior que a densidade do ar.

1.4. Solução das equações de movimento

As equações (2) e (3) são Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) de primeira ordem e podem ser solucionadas por integração direta [27]. Considerando-se o repouso como condição inicial, obtêm-se as soluções

$$v(t) = 2\rho t, \quad (5)$$

e

$$v(t) = \frac{2\rho}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \tag{6}$$

para os casos sem e com revestimento, respectivamente. Finalmente, por integração de $v(t)$, obtêm-se as funções horárias $x(t)$ para a posição do carro sobre o cabo,

$$x(t) = x_0 + \rho t^2, \tag{7}$$

e

$$x(t) = x_0 + \frac{2\rho}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1 + \alpha t), \tag{8}$$

novamente, nas configurações sem e com revestimento, sendo x_0 a posição inicial do carro sobre o cabo. O deslocamento do carro é representado por $\Delta x(t) = x(t) - x_0$.

1.5. Tratamento estatístico e numérico dos dados experimentais

Os parâmetros x_0 , ρ e α podem ser determinados utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) [28, 29] aplicado aos conjuntos formados por N medidas de posição ($X = \{x_k | k \in \{1, 2, \dots, N\}\}$) e de tempo ($T = \{t_k | k \in \{1, 2, \dots, N\}\}$) obtidas para cada configuração do carro estudada, e dos modelos dados pelas equações (7) e (8). O parâmetro ρ é comum às três configurações, o parâmetro x_0 apresenta um valor específico para cada par de conjuntos X e T medidos (ou seja, para cada configuração do carro, conforme será descrito na seção 2.3), e o parâmetro α apresenta um valor específico para cada formato de revestimento aplicado ao suporte do carro.

Assim, a determinação dos parâmetros deve ser iniciada pela configuração sem revestimento, através dos conjuntos X e $T^2 = \{t_k^2 | k \in \{1, 2, \dots, N\}\}$ medidos, que permitem a linearização do modelo dado pela equação (7) e a determinação analítica dos parâmetros ρ e x_0 e suas incertezas ($\Delta\rho$ e Δx_0 respectivamente), através de expressões matemáticas determinadas pelo MMQ para modelos lineares com dois parâmetros [28, 29].

Em seguida, deve ser feita a determinação dos parâmetros para as configurações revestidas, determinando-se independentemente os pares de parâmetros x_0 e α referentes a cada configuração, observando que o valor de ρ já foi determinado. Porém, o modelo dado pela equação (8) é não linear e não linearizável em relação ao parâmetro α , não podendo, por isso, ser determinado analiticamente. Esta situação é muito comum em problemas físicos reais e pode ser contornada através do uso de métodos numéricos de cálculo. Para o problema em questão, o método Newton-Raphson [30] é uma alternativa eficaz para a determinação de α . Por fim, o parâmetro x_0 pode ser determinado analiticamente (dada a linearidade do modelo em relação a ele) e em função de α . O método MMQ minimiza o erro quadrático médio [28, 29] do modelo (ε_r^2) em relação aos

conjuntos de dados experimentais. Para os casos em que a configuração do carro contém revestimento, ε_r^2 é dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^2 &= \sum_{k=1}^N [x_k - x(t_k)]^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \left[x_k - x_0 - \frac{2\rho}{\alpha^2} (e^{-\alpha t_k} - 1 + \alpha t_k) \right]^2, \end{aligned} \tag{9}$$

em que t_k é o tempo de deslocamento do carro entre a posição de lançamento (x_0) e a k -ésima posição final (ou de parada) (x_k) do carro, com $k = 1, 2, \dots, N$ e N sendo o número de diferentes posições de lançamento do carro utilizadas no experimento.

Tomando-se $\frac{\partial \varepsilon_r^2}{\partial \alpha} = 0$, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_r^2}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{k=1}^N \left\{ x_k - x_0(\alpha) - \frac{2\rho}{\alpha^2} (e^{-\alpha t_k} - 1 + \alpha t_k) \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{2\rho}{\alpha^3} [(2 + \alpha t_k) e^{-\alpha t_k} - 2 + \alpha t_k] \right\} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

através da qual o valor ótimo do parâmetro α pode ser obtido pela aplicação do método Newton-Raphson [30].

De forma simplificada, o método Newton-Raphson [30] calcula uma solução aproximada (y_n) para uma equação da forma $f(y) = 0$, através de um processo iterativo, e com um erro relativo à solução exata (ε_{NR}) menor que a exatidão desejada (ε), sendo necessária uma aproximação inicial da solução (y_0). Vale ressaltar que, em geral, o valor de y_0 precisa ser suficientemente próximo do valor exato da solução para que seja garantida a convergência da solução numérica. Uma maneira eficaz para se escolher um valor adequado de y_0 é através da observação do gráfico de $f(y)$ em torno da solução. A iteração utilizada para aproximar as soluções de $f(y) = 0$ é dada por [30]

$$y_n = y_{n-1} + \frac{f(y_{n-1})}{f'(y_{n-1})}. \tag{11}$$

Para aplicar o MMQ [28, 29] em relação ao parâmetro x_0 , toma-se $\frac{\partial \varepsilon_r^2}{\partial x_0} = 0$, obtendo-se

$$x_0 = \langle x \rangle - \frac{2\rho}{N\alpha^2} \sum_{k=1}^N (e^{-\alpha t_k} - 1 + \alpha t_k), \tag{12}$$

que é analítica para o parâmetro α , sendo $\langle x \rangle$ o valor médio do conjunto X .

As incertezas $\Delta\alpha$ e Δx_0 podem ser estimadas a partir de uma aproximação linear do modelo e assintótica para a distribuição estatística dos valores experimentais [31] do conjunto de posições X , determinadas por

$$\Delta\alpha = \sqrt{\frac{(\sigma_x^{var})^2}{N \left[\left\langle \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle^2 \right]}} \tag{13}$$

e

$$\Delta x_0 = \sqrt{\frac{(\sigma_x^{var})^2 \left\langle \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \right\rangle}{N \left[\left\langle \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle^2 \right]}}, \quad (14)$$

sendo

$$(\sigma_x^{var})^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{k=1}^N [x_k - x(t_k)]^2, \quad (15)$$

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial x(t_k)}{\partial \alpha}, \quad (16)$$

e

$$\left\langle \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial x(t_k)}{\partial \alpha} \right)^2, \quad (17)$$

com $\frac{\partial x(t_k)}{\partial \alpha}$ calculada no valor de α obtido pela solução numérica da equação (10). As equações (13) e (14) são análogas às utilizadas no cálculo das incertezas $\Delta\rho$ e Δx_0 , respectivamente, para a configuração sem revestimento (modelo linear com 2 parâmetros [28, 29]). As expressões referentes a $\Delta\rho$ e Δx_0 são obtidas a partir das substituições dos termos $(\sigma_x^{var})^2$, $\left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\rangle$ e $\left\langle \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \right\rangle$ por $(\sigma_x^{varL})^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [x_k - x(t_k)]^2$, $\langle t^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k^2$ e $\langle t^4 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k^4$, respectivamente, nas equações (13) e (14).

2. Metodologia e Coleta de Dados

O experimento proposto consistiu no deslocamento de um carro apoiado sobre um cabo inclinado de um ângulo θ e tensionado entre duas paredes, cujos pontos de fixação encontravam-se em uma altura superior h_S e outro a uma altura inferior h_I em relação ao solo. A projeção do comprimento do cabo em relação ao solo (d) foi considerada como sendo a distância entre as paredes, descontados os comprimentos dos ganchos de fixação. O carro foi lançado, a partir do repouso, de um conjunto de diferentes posições localizadas ao longo do cabo, tendo como ponto final de deslocamento uma posição comum delimitada por um nó (que chamaremos “nó de parada”). Foram medidos os deslocamentos espaciais (com uma trena) e o tempo de deslocamento (com um cronômetro digital) para cada lançamento do carro. Três configurações do carro foram utilizadas para que o efeito da resistência do ar sobre o movimento pudesse ser avaliado, uma com baixa área superficial transversal ao movimento (sem revestimento) e outras duas com elevada área superficial transversal ao movimento (com revestimentos plano e angulado). A Figura 1 traz uma representação esquemática para a montagem experimental referente ao lançamento do carro sobre o cabo.

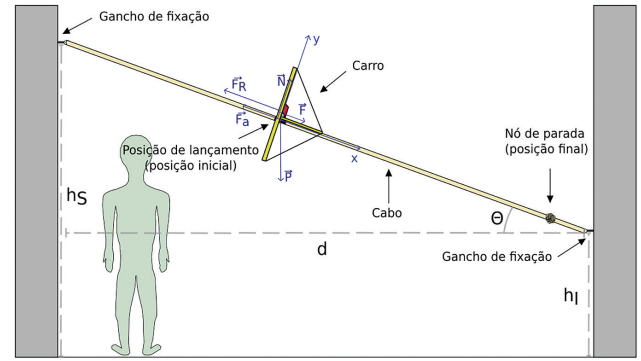


Figura 1: Montagem experimental com o carro sobre o cabo e as representações das grandezas θ , h_I e h_S e d , do sistema de coordenadas adotado e das forças atuantes sobre o carro (fora de escala). As alturas e distâncias mensuradas foram $h_I = (1,200 \pm 0,002) \text{ m}$, $h_S = (2,463 \pm 0,002) \text{ m}$ e $d = (3,6763 \pm 0,0009) \text{ m}$, e o ângulo calculado foi $\theta = (18,96 \pm 0,02)^\circ$. As incertezas referentes às grandezas h_I e h_S foram calculadas pela equação (18) e as incertezas para as grandezas d e θ foram determinadas por propagação de erros [28].

2.1. Construção do carro

O carro foi construído utilizando-se apenas materiais caseiros e de baixo custo: palitos para churrasco, linha para crochê, uma polia para varal, um cadeado pequeno, cola adesiva instantânea e fita adesiva. Os palitos para churrasco foram unidos por amarrações feitas com linha para crochê, reforçadas com gotas da cola adesiva instantânea, formando assim o suporte, que possuía áreas vazadas e que podiam ser revestidas por papel sulfite em duas configurações diferentes: planas (um par de folhas, sendo que cada folha será representada por Λ_P na Figura 2), com uma área retangular com dimensões aproximadas de $(0,297 \text{ m}) \times (0,210 \text{ m})$ cada; e anguladas (dois pares de folhas, sendo que cada folha será representada por Λ_A na Figura 2), com uma área retangular com dimensões aproximadas de $(0,210 \text{ m}) \times (0,210 \text{ m})$ cada, sendo que entre as áreas formadoras de um par havia um ângulo de aproximadamente 90° . O suporte foi amarrado à polia com a linha para crochê, de forma que, quando o carro fosse colocado sobre a corda para varal (que funcionou como o cabo pelo qual o carro se movimentou), suas faces vazadas planas ficassem em posição aproximadamente perpendicular ao movimento do carro. O cadeado pequeno foi amarrado ao suporte em sua parte inferior, para que o centro de massa do carro se localizasse a uma altura abaixo do seu ponto de contato com o cabo, estabilizando o seu movimento. As Figuras 2 e 3 mostram imagens esquemáticas e fotografias do suporte e do carro.

Foi utilizado um par de pedaços de papel sulfite como revestimento das áreas vazadas do suporte em cada configuração revestida estudada. Cada pedaço era aproximadamente retangular e os comprimentos dos lados

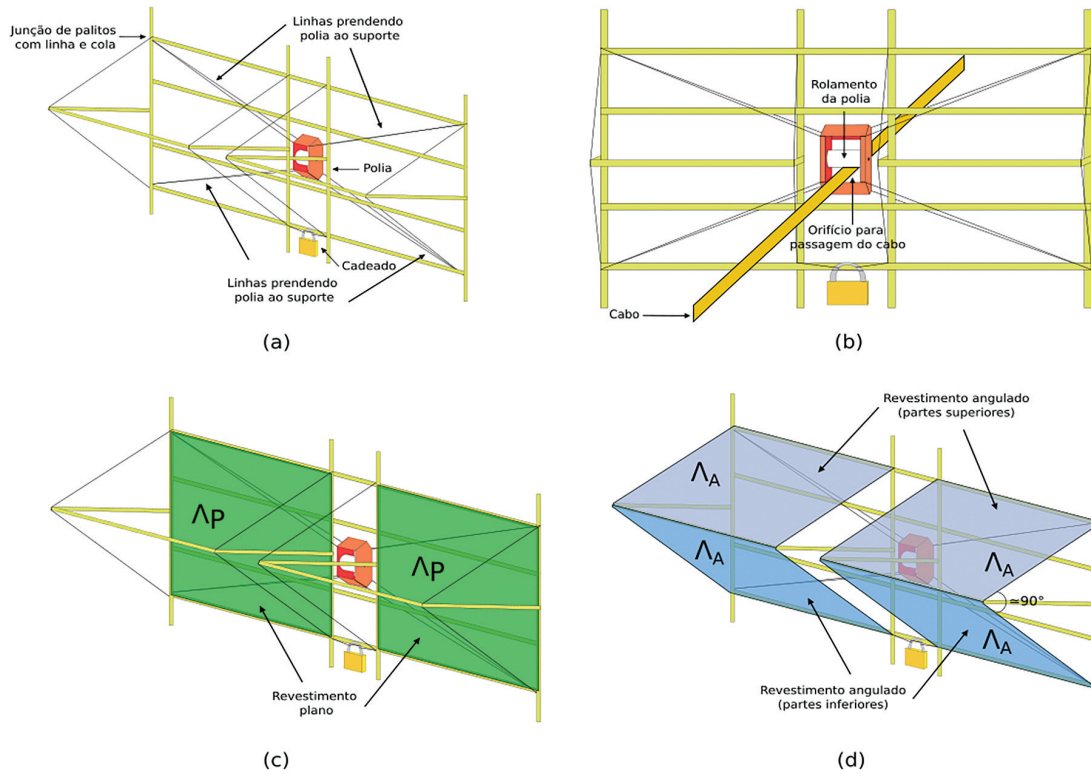


Figura 2: Diagramas esquemáticos do carro utilizado no experimento. Em (a), o carro é representado sem revestimento, destacando-se a estrutura do suporte, e a fixação da polia e do cadeado ao suporte. Em (b), o carro é representado de frente, destacando-se a região através da qual ele se apoiava sobre o cabo. Em (c) e (d), o carro é representado destacando-se o tipo de revestimento utilizado, plano e angulado, respectivamente. Em (d), também ressalta-se a angulação de aproximadamente 90° entre as regiões revestidas e anguladas entre si.

foram medidos utilizando-se uma trena. A partir deles, a área do revestimento (S) pôde ser estimada para cada configuração, com a incerteza calculada por propagação de erros [28]. Os valores obtidos foram $S_P = (0,1252 \pm 0,0004)m^2$ (revestimento plano) e $S_A = (0,1715 \pm 0,0004)m^2$ (revestimento angulado). Vale lembrar que, pela construção do carro, a área S_P mantinha-se sempre perpendicular ao cabo, correspondendo assim à área de seção transversal do carro.

No restante do texto, sempre que os subscritos P e A forem utilizados, estarão referindo-se às configurações do carro com revestimento plano e angulado, respectivamente, e o subscrito S representará a configuração sem revestimento.

2.2. Montagem experimental do sistema carro-cabo

O sistema utilizado no experimento está esquematizado na Figura 1. O cabo, preso por ganchos de sustentação a duas paredes, foi estendido com a maior tensão possível para evitar que cedesse e para minimizar o efeito de vibração durante o movimento do carro. Próximo à extremidade de fixação inferior do cabo, foi feito um nó, que serviu como ponto de parada para o carro (comum a todos os lançamentos realizados), cuja posição foi

marcada com uma caneta, para que a reprodutibilidade da posição de parada fosse garantida para todos os lançamentos e para auxiliar na medição dos deslocamentos do carro.

O ângulo de inclinação θ , entre o cabo e o chão, foi determinado por trigonometria, a partir das alturas entre os pontos de fixação do cabo e o chão (altura menor h_I e altura maior h_S), e da projeção do comprimento do cabo em relação ao chão (d). Essas medidas de comprimento foram tomadas com uma trena cuja menor graduação era de 0,001 m. Para levar em conta as dimensões finitas dos ganchos de fixação, as medidas de h_I e h_S foram consideradas, individualmente, como sendo a média das medidas do chão até a parte inferior do respectivo gancho, e do chão até a parte superior do respectivo gancho. Para medir d , foi tomada a medida da distância entre as paredes (a partir do chão) e foram descontados os comprimentos dos ganchos de fixação. Os valores obtidos constam na legenda da Figura 1.

2.3. Lançamentos do carro e medição dos deslocamentos (ΔX) e de seus tempos (T)

Para garantir que não houve deslizamento da polia sobre o cabo nos lançamentos realizados e que o movimento do carro deu-se exclusivamente através do giro do rolamento

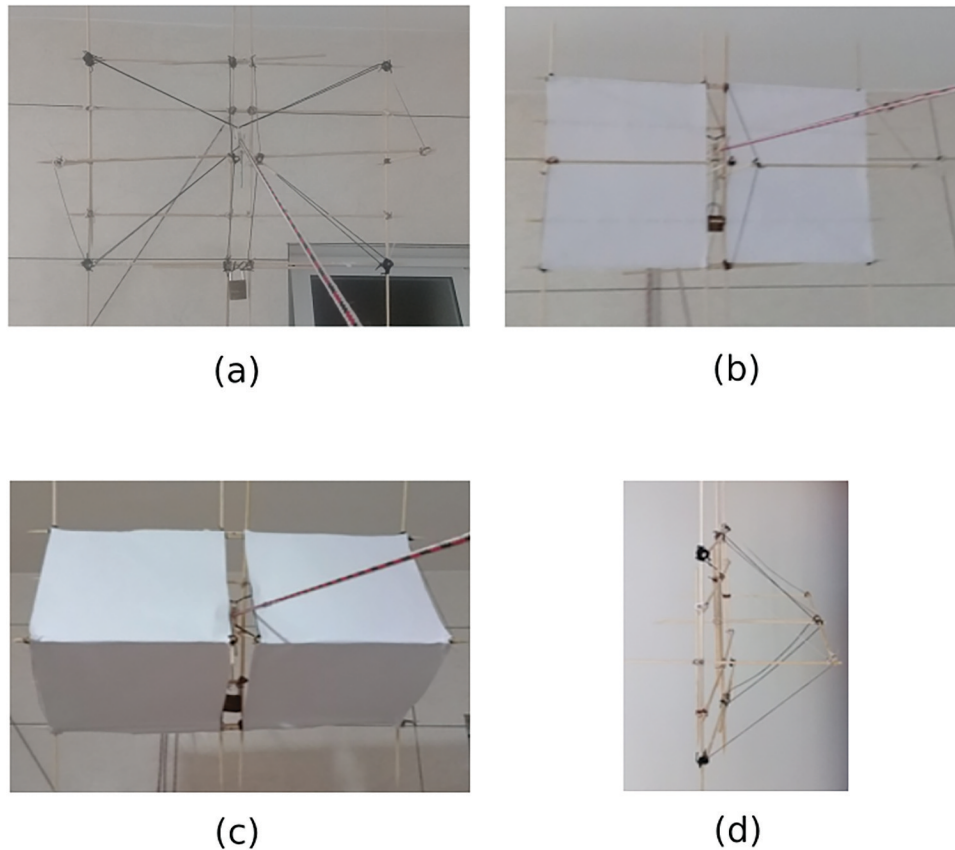


Figura 3: Fotografias do carro. Em (a), (b) e (c), são reproduzidos sobre o cabo o carro sem revestimento, com revestimento plano e com revestimento angulado, respectivamente. Em (d), é reproduzido o suporte, em uma visão lateral.

da polia, foi feito um teste preliminar soltando-se o carro sobre o cabo com o rolamento da polia travado. Verificou-se que o carro não se movimentou sobre o cabo inclinado nesta situação, indicando que o ângulo θ era menor que o ângulo limite para o qual a intensidade da componente da força peso na direção do cabo superaria a intensidade da força de atrito estático máxima que poderia existir entre o rolamento da polia e o cabo.

Para a realização da tomada das medidas, o carro foi lançado a partir de um conjunto de nove posições iniciais diferentes ao longo do cabo ($X^0 = \{x_k^0 \mid k \in \{1, 2, \dots, 9\}\}$) e que foram consideradas como a origem do referencial adotado para cada lançamento, i.e. $x_k^0 = 0$. Previamente à realização dos lançamentos, as posições iniciais foram marcadas no cabo com uma caneta, permitindo reproduzir com precisão a posição inicial de todos os lançamentos realizados a partir de uma mesma marca e auxiliando na medição dos deslocamentos do carro. Essas marcas foram distribuídas de forma aproximadamente uniforme ao longo do cabo, entre 0,15 m e 3,40 m de distância (na direção do cabo) em relação ao nó de parada. Em contrapartida, a posição do nó de parada representou as posições finais para todos os lançamentos, que podem ser representadas pelo conjunto de nove posições $X = \{x_k \mid k \in \{1, 2, \dots, 9\}\}$, cada uma associada a uma posição de lançamento x_k^0 . O conjunto dos

deslocamentos do carro sobre o cabo foi definido como sendo $\Delta X = \{\Delta x_k = x_k - x_k^0 = x_k \mid k \in \{1, 2, \dots, 9\}\}$, sendo cada medida Δx_k tomada como a distância entre a marca da k -ésima posição de lançamento e a marca do nó de parada, e relacionando-se o deslocamento do carro com o valor de sua posição final.

Como cada marca feita no cabo (posições de lançamento e posição do nó de parada) possuía uma largura mensurável, as medidas Δx_k foram tomadas como sendo a média das medidas Δx_k^H e Δx_k^L , que representam a distância entre as extremidades mais afastadas das marcas da k -ésima posição de lançamento e do nó de parada (Δx_k^H), e as mais próximas (Δx_k^L). Todas essas medidas foram tomadas com uma trena, estendendo-se o cabo em linha reta sobre o chão plano. As grandezas Δx_k^H e Δx_k^L são representadas graficamente na Figura 4, para $k = 6$.

Para cada posição de lançamento k e configuração do carro, foram realizados quatro lançamentos a partir do repouso, obtendo-se um conjunto de valores de tempo de deslocamento $t_k^* = \{t_k^j \mid j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Os tempos de deslocamento foram registrados utilizando-se o cronômetro digital de um relógio, com mecanismo de disparo e registro manual, e precisão estimada de 0,01 s. O disparo do cronômetro e o registro do tempo de deslocamento foram realizados da maneira mais sincronizada possível

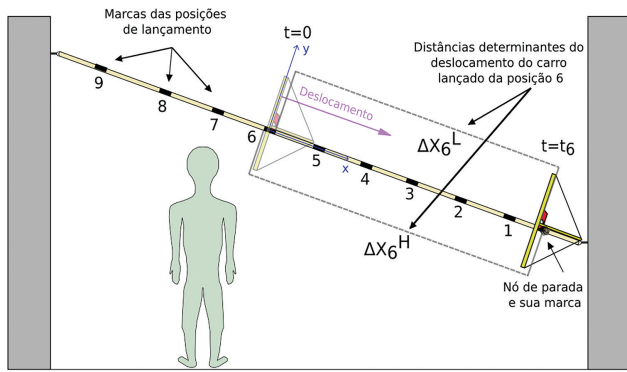


Figura 4: Representação esquemática de um lançamento do carro exemplificando o mensuramento das grandezas Δx_k^H , Δx_k^L e t_k para a posição de lançamento $k = 6$. Em $t = 0$, é representada a configuração de lançamento do carro (posição inicial). Em $t = t_6$, é representada a configuração de parada do carro (posição final). As posições de lançamento adotadas (marcas pretas numeradas sobre o cabo) e do nó de parada (com sua respectiva marca) também estão representadas.

com o lançamento do carro e sua colisão com o nó de parada, respectivamente, para minimizar a influência de erros operacionais de medida [32]. Calcularam-se os tempos de deslocamento médios para cada posição de lançamento e cada configuração do carro que, daqui em diante, serão chamados apenas como tempos de deslocamento e serão objeto de discussão na seção 3), a partir do respectivo conjunto t_k^* . O conjunto de tempos de deslocamento obtido para uma configuração específica do carro será representado por $T = \{t_k \mid k \in \{1, 2, \dots, 9\}\}$.

A incerteza σ_η de uma grandeza η medida em replicata foi calculada a partir

$$\sigma_\eta = \sqrt{(\sigma_\eta^{(PE)})^2 + (\sigma_\eta^{(DPM)})^2}, \quad (18)$$

sendo $\sigma_\eta^{(PE)}$ a contribuição para a incerteza proveniente da propagação de erros da média e $\sigma_\eta^{(DPM)}$ o desvio padrão da média [28] das medidas. As incertezas para x_k , t_k e t_k^2 foram denominadas σ_{x_k} , σ_{t_k} e $\sigma_{t_k^2}$, respectivamente, e foram calculadas a partir da equação (18).

Para fins de exemplificação da mensuração de todas as grandezas envolvidas em um lançamento do carro, a Tabela 1 apresenta os valores de Δx_k^H , Δx_k^L , Δx_k , t_k^* e t_k medidos para a posição de lançamento $k = 6$, considerando-se as três configurações do carro (sem revestimento, com revestimento plano e angulado).

A Tabela 2 apresenta os valores obtidos para os conjuntos de dados ΔX e T referentes às três configurações estudadas.

3. Resultados e Discussão

Nesta seção, os gráficos apresentados (Figuras 5, 6 e 7) contêm análises estatísticas que vão além do conteúdo adequado a ser trabalhado com alunos de ensino médio,

Tabela 1: Valores mensurados para as grandezas Δx_k^H , Δx_k^L e Δx_k (em metros), comum para todas as configurações de carro, para o conjunto t_k^* e para t_k (em segundos), considerando-se as três configurações de carro e a posição de lançamento $k = 6$

Grandeza	Sem	Revestimento	Revestimento
	Revestimento	Plano	Angulado
t_6^1	1,84±0,01	2,61±0,01	2,42±0,01
t_6^2	1,82±0,01	2,58±0,01	2,35±0,01
t_6^3	1,81±0,01	2,59±0,01	2,42±0,01
t_6^4	1,85±0,01	2,62±0,01	2,37±0,01
t_6	1,83±0,01	2,60±0,01	2,39±0,01
Comum às Configurações			
Δx_6^H	2,2340±0,0005		
Δx_6^L	2,2280±0,0005		
Δx_6	2,231±0,003		

Tabela 2: Valores de deslocamento do carro (Δx_k , em metros), comum a todas as configurações do carro, e tempos de deslocamento (t_k , em segundos) para cada posição de lançamento (k) e para as três configurações estudadas

k	Δx_k	t_k		
		Sem	Revestimento	Revestimento
		Revestimento	Plano	Angulado
1	0,190 ± 0,002	0,56 ± 0,01	0,66 ± 0,01	0,68 ± 0,01
2	0,592 ± 0,002	0,92 ± 0,01	1,148 ± 0,007	1,14 ± 0,02
3	0,992 ± 0,002	1,21 ± 0,01	1,55 ± 0,01	1,482 ± 0,009
4	1,398 ± 0,002	1,42 ± 0,01	1,92 ± 0,01	1,84 ± 0,01
5	1,830 ± 0,002	1,658 ± 0,009	2,27 ± 0,02	2,14 ± 0,02
6	2,231 ± 0,003	1,83 ± 0,01	2,60 ± 0,01	2,39 ± 0,02
7	2,635 ± 0,002	2,012 ± 0,007	2,89 ± 0,01	2,70 ± 0,02
8	3,057 ± 0,002	2,16 ± 0,01	3,16 ± 0,01	2,91 ± 0,01
9	3,392 ± 0,002	2,27 ± 0,01	3,430 ± 0,009	3,13 ± 0,02

como as curvas ajustadas aos dados experimentais pelo MMQ [28, 29] e as bandas de confiança [29, 31, 33], mas que são técnicas importantes de serem conhecidas e trabalhadas por alunos de graduação. O formalismo necessário para obtenção das curvas pelo MMQ foi apresentado na subseção 1.5, e um tratamento simplificado e que pode ser trabalhado com alunos do ensino médio será proposto ao final desta seção. A técnica de determinação das bandas de confiança pode ser inteiramente omitida quando o experimento for direcionado a alunos de ensino médio; porém, uma apresentação simplificada da técnica, inclusive a respeito de como interpretá-la, será apresentada no Apêndice A, disponível como material suplementar, para que possa ser trabalhada por alunos de graduação.

3.1. Carro sem revestimento

A Figura 5 apresenta o gráfico de posição x versus tempo ao quadrado t^2 obtido a partir das medidas realizadas com o carro sem revestimento, acompanhado da curva ajustada pelo modelo linear da equação (7), e a estimativa de uma banda de confiança [29, 31, 33]

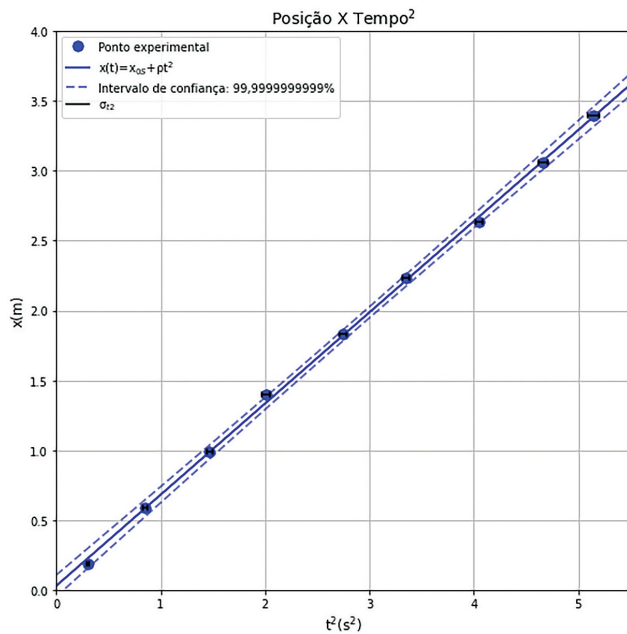


Figura 5: Gráfico de posição x versus tempo ao quadrado t^2 para o carro sem revestimento [34]. Os círculos azuis representam os pontos experimentais, acompanhados das incertezas experimentais em t^2 (σ_{t^2}) (linhas pretas). As incertezas experimentais em x foram omitidas, pois são desprezíveis na escala utilizada. A linha azul sólida representa a curva ajustada ao modelo da equação (7), cujos parâmetros obtidos foram $x_{0S} = (0,03 \pm 0,02) m$ e $\rho = (0,652 \pm 0,007) ms^{-2}$. As linhas azuis tracejadas indicam a banda de confiança para intervalo de confiança de 99,9999999999%.

para 7 graus de liberdade e intervalo de confiança de 99,9999999999%.

Verifica-se que o comportamento do carro sem revestimento obedece ao modelo linear, equação (7), tanto visualmente, como através do valor do coeficiente de determinação [28, 29] calculado para o ajuste realizado ($R_S = 0,999638$). Isto significa que a atuação da resistência do ar sobre o deslocamento do carro foi desprezível para essa configuração, como esperado. Além disso, obteve-se $x_{0S} = (0,03 \pm 0,02)m$, valor bastante próximo de zero, o que demonstra que a tensão aplicada sobre o cabo e a suavidade da soltura do carro nos lançamentos foram adequadas para minimizar efeitos de vibração que pudessem fazer com que os dados experimentais desviassem do modelo proposto.

O coeficiente de atrito (μ) foi determinado a partir do parâmetro $\rho = (0,652 \pm 0,007)ms^{-2}$. Tomando-se $g = 9,80665ms^{-2}$ [35], obteve-se $\mu = 0,203 \pm 0,001$. Dado que F_a é uma força resultante, μ é formado pela contribuição das componentes do atrito interno da polia (atrito dinâmico), que realiza trabalho e dissipa energia, e de atrito estático (responsável pelo movimento rotacional do rolamento da polia), que não realiza trabalho e não dissipa energia [10]. No entanto, o experimento realizado não permite decompor μ em suas componentes,

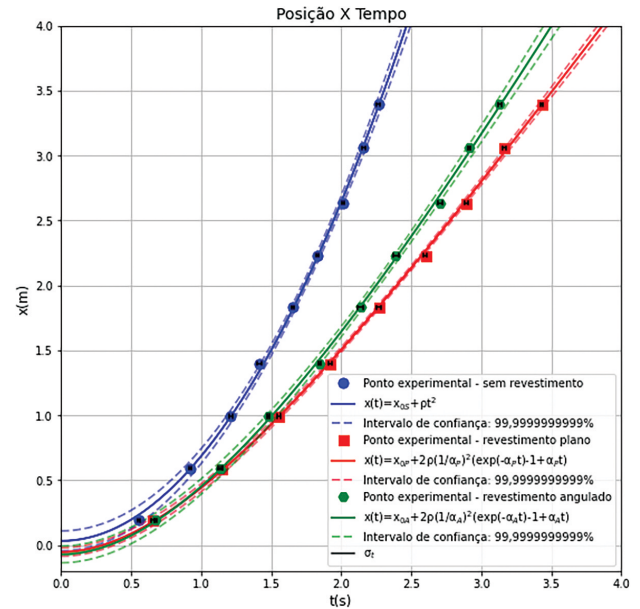


Figura 6: Gráficos da posição x em função do tempo t para as três configurações de carro [34]. Os círculos azuis, quadrados vermelhos e hexágonos verdes representam os pontos experimentais para os casos sem revestimento, com revestimento plano e angulado, respectivamente, acompanhados das incertezas experimentais em t (σ_t) (linhas pretas). As incertezas experimentais em x foram omitidas, pois são desprezíveis na escala utilizada. As linhas sólidas representam as curvas ajustadas aos modelos das equações (7) e (8), cujos parâmetros obtidos foram $x_{0S} = (0,03 \pm 0,02)m$ e $\rho = (0,652 \pm 0,007)ms^{-2}$; $x_{0P} = (-0,05 \pm 0,01)m$ e $\alpha_P = (0,896 \pm 0,009)s^{-1}$; e $x_{0A} = (-0,07 \pm 0,02)m$ e $\alpha_A = (0,71 \pm 0,01)s^{-1}$. As linhas tracejadas indicam as bandas de confiança para intervalo de confiança de 99,9999999999%. As linhas referentes a cada configuração são apresentadas nas mesmas cores que os pontos experimentais.

pois seria necessário conhecer a relação entre a massa total do carro (m) e a massa do rolamento da polia (m_R).

3.2. Carro com revestimento

A Figura 6 apresenta os gráficos da posição x em função do tempo t obtidos a partir das medidas realizadas com o carro nas três configurações estudadas, acompanhados das curvas ajustadas pelos modelos das equações (7) e (8), e as estimativas de bandas de confiança [29, 31, 33] para 7 graus de liberdade e intervalo de confiança de 99,9999999999%. Para o ajuste numérico das curvas modeladas pela equação (8), foram utilizados o valor inicial $\alpha_0 = 0,9872$ para o parâmetro α e $\varepsilon = 10^{-8}$.

Observa-se que o comportamento do carro com revestimento (plano e angulado) obedece ao modelo não linear dado pela equação (8), tanto visualmente, como através dos valores dos coeficientes de determinação [28, 29] $R_P = 0,999827$ e $R_A = 0,999654$. Isto significa que a atuação da resistência do ar sobre o deslocamento do carro não foi desprezível para essas configurações, como

esperado. Além disso, a suposição de que $F_R \propto v$ levou a uma descrição satisfatória do fenômeno estudado. Por fim, a Figura 6 também evidencia que a força de resistência do ar atuou de forma mais intensa sobre o carro com revestimento plano, como se vê pelos valores de α obtidos em cada caso,

$$\alpha_P = (0,896 \pm 0,009)s^{-1}, \tag{19}$$

e

$$\alpha_A = (0,71 \pm 0,01)s^{-1}. \tag{20}$$

Este resultado concorda com a percepção intuitiva de que o revestimento angulado é mais “aerodinâmico” que o plano, já que no primeiro caso o carro atua de forma mais similar a uma flecha “cortando” o ar do que a uma parede se movendo contra ele, situação a qual o movimento do carro com revestimento plano pode ser comparado. De forma mais técnica, esse resultado pode ser explicado pelo fato de que, no caso do revestimento plano, o fluxo laminar do ar se choca frontalmente com o papel do revestimento do carro em movimento, sendo necessário um desvio do fluxo de ar próximo a 90° em relação à direção do movimento do carro, ao passo que, quando o revestimento é angulado, o fluxo laminar de ar choca-se obliquamente com o papel, sendo necessário um desvio do fluxo muito menor, de aproximadamente 45°.

Assim, destacamos que nosso experimento permite evidenciar de forma bastante clara a diferença da resistência do ar atuante entre dois corpos de mesma área de seção transversal, mas com formatos (e portanto coeficientes de arrasto) diferentes.

3.3. Velocidade de deslocamento

A Figura 7 apresenta os gráficos da velocidade v em função do deslocamento Δx construídos para as três configurações de carro estudadas, acompanhados das curvas obtidas a partir dos parâmetros ρ e α determinados nas subseções anteriores e dos modelos dados pelas equações (5) e (6), além das respectivas estimativas das bandas de confiança [29, 31, 33] para 8 graus de liberdade e intervalo de confiança de 99%.

Constata-se que o padrão de evolução de v em função de Δx é distinto para as configurações sem e com revestimento. No primeiro caso, o movimento é acelerado, com velocidade sempre crescente, pois a força gravitacional é dominante no movimento e, segundo as equações (5) e (7), $\frac{dv}{dt} = 2\rho = cte$. Isto implica na existência de uma relação do tipo $v \propto (\Delta x)^{\frac{1}{2}}$, em concordância com o que se observa na Figura 7. Para os casos em que o carro possuía revestimento, o movimento também é acelerado, mas verifica-se a existência de uma velocidade limite (v^{lim}) com o crescimento de Δx . Estimou-se v^{lim} para cada tipo de revestimento utilizado, a partir da equação (6), considerando-se que

$$v^{\text{lim}} = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} v(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\rho}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = \frac{2\rho}{\alpha}, \tag{21}$$

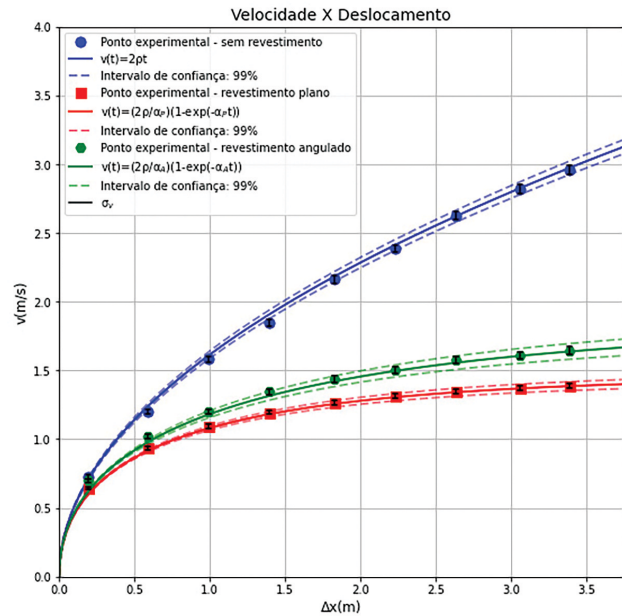


Figura 7: Gráficos da velocidade v em função do deslocamento Δx para as três configurações do carro[34]. Os círculos azuis, quadrados vermelhos e hexágonos verdes representam os pontos experimentais para os casos sem revestimento, com revestimento plano e angulado, respectivamente, acompanhados de suas incertezas em v (σ_v) (linhas pretas). As incertezas experimentais em Δx foram omitidas, pois são desprezíveis na escala utilizada. As linhas sólidas representam as curvas ajustadas aos modelos das equações (5) e (6). As linhas tracejadas indicam as bandas de confiança para intervalo de confiança de 99%. As linhas referentes a cada configuração são apresentadas nas mesmas cores que os pontos experimentais.

e obteve-se $v_P^{\text{lim}} = (1,46 \pm 0,02)ms^{-1}$ e $v_A^{\text{lim}} = (1,84 \pm 0,04)ms^{-1}$. Justamente porque $\alpha_A < \alpha_P$, segue que $v_A^{\text{lim}} > v_P^{\text{lim}}$, e $v(t)$ se aproxima mais lentamente de v^{lim} para configuração com revestimento angulado.

3.4. Determinação dos parâmetros ρ , x_0 e α – uma técnica alternativa para nível médio

Como a aplicação do MMQ [28, 29] e do método Newton-Raphson [30] na obtenção dos parâmetros ρ , x_0 e α exige o conhecimento de conceitos do cálculo diferencial, que não são exigidos de um aluno do ensino médio, propõe-se uma abordagem alternativa para que esse experimento possa ser direcionado também a esses alunos.

Para o caso em que o carro não possui revestimento e o modelo dado pela equação (7) pode ser linearizado, sugere-se que a estimativa dos parâmetros ρ e x_0 (coeficientes angular e linear da equação de uma reta, respectivamente) seja feita através da construção manual do gráfico da posição x em função de t^2 (ver subseção 3.1), utilizando-se um papel milimetrado. Nesse caso, após a disposição dos dados experimentais, a reta que se ajustar melhor aos pontos poderá ser traçada de maneira estimada com o uso de uma régua, e os

parâmetros ρ e x_0 poderão ser estimados através do cálculo da inclinação dessa reta e de seu intercepto com o eixo das abscissas, respectivamente.

Nos casos em que o carro possuir revestimento, o método do parágrafo anterior torna-se de difícil aplicação, devido à não linearidade do modelo dado pela equação (8). Porém, uma abordagem alternativa pode ser executada construindo-se um gráfico da posição x em função do tempo t (ver subseção 3.2) através de um *software* apropriado, contendo os dados experimentais, adicionando-se curvas determinadas pela equação (8) para diferentes valores do parâmetro α , e assumindo-se que $x_0 = 0$ (consideração bastante razoável, dado que os valores obtidos na subseção 3.2 para o parâmetro x_0 são próximos de zero). Visualmente, a curva que melhor se ajustar aos dados experimentais poderá ser identificada e o valor de α correspondente fornecerá uma estimativa para o coeficiente de resistência do ar por unidade de massa referente à componente \vec{F}_R da força atuante sobre o carro revestido.

Após os valores dos parâmetros ρ , x_0 e α terem sido estimados, o gráfico da velocidade v em função do deslocamento Δx (ver subseção 3.3) poderá ser construído através do mesmo *software* utilizado na determinação de α , e v^{lim} poderá ser estimada através da inclusão da assíntota horizontal que visualmente melhor representar o limite de v para Δx (ou t) muito grande.

Os resultados apresentados para as três configurações de carro experimentadas nesse trabalho podem ser aplicados a outras configurações mais complexas, de forma que se possa construir um estudo aerodinâmico mais completo, caso se tenha acesso a materiais e equipamentos mais sofisticados, sendo que aqui pretendia-se apenas introduzir o tema.

4. Conclusões

Através desse trabalho, verifica-se que é possível, a partir de uma montagem experimental relativamente simples e com materiais e equipamentos acessíveis, realizar um estudo cientificamente rigoroso e que pode proporcionar a graduandos ou alunos do ensino médio um contato inicial com o problema da resistência do ar e com a Aerodinâmica, além de introduzir importantes técnicas de análise estatística (estimativa de incertezas associadas a parâmetros de modelos não lineares [31]) e de cálculo numérico (método Newton-Raphson [30]) de forma integrada, de maneira que o aprendizado teórico possa ser construído juntamente com a experiência prática da realização do estudo.

O estudo permitiu a obtenção do coeficiente de atrito referente à força de atrito que atuou entre o cabo e a polia durante o deslocamento do carro, $\mu = 0,203 \pm 0,001$, e do coeficiente de resistência do ar por unidade de massa para duas configurações do carro com revestimento, $\alpha_P = (0,896 \pm 0,009)s^{-1}$ para o revestimento plano, e $\alpha_A = (0,71 \pm 0,01)s^{-1}$ para o revestimento angulado,

evidenciando a dependência da força resistiva com o formato do corpo considerado. Destaca-se que a não linearidade (em termos de velocidade e dissipação de energia mecânica) do comportamento dinâmico inerente às configurações com revestimento (equações (6) e (8)) faz com que o carro tenda a uma velocidade limite, conforme estimado para os casos estudados, $v_P = (1,46 \pm 0,02)ms^{-1}$ e $v_A = (1,84 \pm 0,04)ms^{-1}$, e com que a dissipação de energia mecânica seja muito mais acentuada em relação à configuração sem revestimento, ilustrando a importância dos formatos dos objetos para que se extraia a maior eficiência possível de um sistema mecânico sob ação de fenômenos aerodinâmicos.

Além disso, o trabalho fornece o embasamento mínimo para que um estudante interessado em Aerodinâmica ou em outras áreas que exijam aplicação de modelos não lineares possa compreender tópicos e solucionar problemas mais complexos.

Por fim, julgamos que, simplificadas as etapas de modelagem e tratamento de dados, o experimento proposto pode ser perfeitamente adaptado ao ensino médio, por envolver materiais de baixo custo e facilmente acessíveis. Podem ser assim apresentados e discutidos conceitos como aplicações de leis de Newton para a obtenção das equações de movimento (2) e (3), coeficiente de atrito estático (relevante para determinar se existe deslizamento entre o cabo e a polia utilizada, como discutido na subseção 2.3) e dinâmico, bem como a resistência do ar e sua dependência tanto em relação à área de seção transversal, quanto ao formato do corpo.

Agradecimentos

L.A. agradece à Universidade Federal do ABC (UFABC) pela oportunidade de aprimorar seus estudos e aos professores R. Custodio e A. López-Castillo, pelo aprendizado e conselhos pessoalmente compartilhados no passado. A.F.F. agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio financeiro, através do projeto 305967/2020-7.

Material suplementar

O seguinte material suplementar online está disponível para este artigo:

Apêndice A: Estimativa da Banda de Confiança.

Referências

- [1] J.R.C. Arruda e J.M. Antuña, Rev. Bras. Ens. Fís. **23**, 329 (2001).
- [2] S. Wahyuni, Kosim, Gunawan e S. Husein, J. Phys. Conf. Ser. **1233**, 012034 (2019).
- [3] J.E. Parreira, Rev. Bras. Ens. Fís. **40**, e1401 (2018).
- [4] J.A. Pulgar e I.R. Sánchez, Formación Universitaria **7**, 3 (2014).
- [5] V. Machado e N.A.M. Pinheiro, Ciência & Educação **16**, 525 (2010).

- [6] Universidade Federal do ABC, *Projeto Pedagógico do Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia*, disponível em: <https://prograd.ufabc.edu.br/bct/pps>, acessado em 01/10/2021.
- [7] D. Halliday e R. Resnick, *Fundamentos de Física: Mecânica* (LTC, Rio de Janeiro, 2018), v. 1.
- [8] R.A. Serway e J.W. Jewett Jr., *Princípios de Física* (Cengage Learning, São Paulo, 2015), v. 1.
- [9] P.A. Tipler e G. Mosca, *Física Para Cientistas e Engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, e Termodinâmica* (LTC, Rio de Janeiro, 2011), v. 1.
- [10] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: Mecânica* (Edgar Blücher, São Paulo, 2002), v. 1.
- [11] S. Aubrun, A. Leroy e P. Devinant, *Exp. Fluids* **58**, 134 (2017).
- [12] A.P. Gaylard, K. Kirwan e D.A. Lockerby, *Proc. IMechE. Part D: J. Automobile Engineering* **231**, 1160 (2017).
- [13] M.M. Rashidi, A. Hajipour, T. Li, Z. Yang e Q. Li, *J. Appl. Comput. Mech.* **5**, 311 (2019).
- [14] Z. Yao, N. Zhang, X. Chen, C. Zhang, H. Xia e X. Li, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics* **14**, 222 (2020).
- [15] M. Jafari, F. Hou e A. Abdelkefi, *Nonlinear Dyn.* **100**, 351 (2020).
- [16] J.D. Eldredge e A.R. Jones, *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **51**, 75 (2019).
- [17] W.H.C. Freire, M.L. Medeiros, D. Leite e R.M. Silva, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **38**, 1306 (2016).
- [18] G.F.L. Ferreira, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **23**, 271 (2001).
- [19] A.D.S. Bruno e J.M.O. Matos, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **24**, 30(2002).
- [20] P. Chudinov, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **35**, 1310 (2013).
- [21] S.L.L. Silva e H.F. Fumiã, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **41**, e201800260 (2019).
- [22] E.N. Miranda, S. Nikolskaya e R. Riba, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **26**, 125 (2004).
- [23] L.R. Pereira e V. Bonfim, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **30**, 3313 (2008).
- [24] W.P. Silva, C.M.D.P.S. Silva e J.W. Precker, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **21**, 79 (1999).
- [25] M.R. Rossini, M.J. Alves, L.H. Amorin e P.S. Camargo Filho, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **42**, e20200290 (2020).
- [26] M.M. Almeida, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **43**, e20200360 (2021).
- [27] W.E. Boyce e R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (John Wiley & Sons, New York, 2001).
- [28] J.A. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis* (Thompson Brooks/Cole, Belmont, 2007).
- [29] P.A. Morettin e W.O. Bussab, *Estatística Básica* (Saraiva, São Paulo, 2017).
- [30] J.D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists* (Marcel Dekker, New York, 2001).
- [31] A. Ruckstuhl, *Introduction to Nonlinear Regression*, disponível em: <https://stat.ethz.ch/~stahel/courses/cheming/nlreg10E.pdf>, acessado em 29/06/2022.
- [32] N. Baccan, J.C. Andrade, O.E.S. Godinho e J.S. Barone, *Química Analítica Quantitativa Elementar* (Unicamp/Edgar Blücher, Campinas/São Paulo, 1979).
- [33] <https://www.missouristate.edu/rstats/Tables-and-Calculators.htm>, acessado em 02/06/2021.
- [34] J.D. Hunter, *Computing in Science & Engineering* **9**, 90 (2007).
- [35] P. Atkins, L. Jones e L. Laverman, *Chemical Principles, The Quest for Insight* (W. H. Freeman, New York, 2013).