

Artigos Gerais

Secções eficazes numa colisão inelástica entre duas esferas

(Cross sections for an inelastic collision between two spheres)

M.F. Ferreira da Silva¹

Departamento de Física, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal

Recebido em 23/8/2007; Aceito em 3/1/2008

No estudo das colisões, os conceitos de secção eficaz e coeficiente de restituição são bem conhecidos; no entanto, muito raramente eles são aplicados no mesmo contexto. Neste trabalho usa-se o coeficiente de restituição para obter a secção eficaz diferencial de uma colisão inelástica entre duas esferas. Conclui-se que a descrição envolve um único parâmetro, e confirma-se por integração directa o valor da secção eficaz total.

Palavras-chave: colisão inelástica, secção eficaz, coeficiente de restituição.

In the study of collisions, the concepts of cross section and coefficient of restitution are well known. Nevertheless, they are rarely applied in the same context. In this work we use the coefficient of restitution to get the differential cross section for an inelastic collision between two spheres. It is concluded that the description involves only one parameter, and the value of the total cross section is confirmed by direct integration.

Keywords: inelastic collision, cross section, coefficient of restitution.

1. Introdução

O conceito de secção eficaz constitui um dos pilares da teoria das colisões. É através dele que se tem obtido informação sobre a estrutura fundamental da matéria, e sobre os diferentes tipos de interacções que ocorrem na natureza [1]. O conjunto de experiências de Geiger e Marsden que conduziu Rutherford ao seu modelo do átomo (descoberta do núcleo atómico) é provavelmente o caso mais conhecido.

Também no estudo das colisões, particularmente no caso das colisões inelásticas, costuma ser introduzido o conceito de coeficiente de restituição; o valor do coeficiente de restituição reflecte o grau de inelasticidade da colisão (ele está compreendido entre 0 e 1, e quanto menor for, mais inelástica é a colisão).

É estranho que os dois conceitos referidos atrás raramente sejam usados no mesmo contexto. Provavelmente tal acontece porque o primeiro é associado tradicionalmente às colisões entre *partículas* (física microscópica, em especial física atómica e subatómica), enquanto que o segundo aparece quase sempre ligado às colisões entre *corpos* (física macroscópica, particularmente colisões entre esferas).

Uma excepção consiste na colisão elástica entre uma partícula e uma esfera rígida, um exemplo que alguns textos [2] usam para mostrar o significado geométrico

da secção eficaz diferencial e da secção eficaz total.

Recentemente, chamou-se a atenção para os seguintes factos:

1. A definição do coeficiente de restituição não é sempre a mesma; em particular, a definição mais apropriada para colisões bidimensionais entre esferas não coincide com a definição tradicional para colisões entre partículas [3];
2. A importância do conceito de coeficiente de restituição não é valorizada devidamente, já que ele pode ser usado em circunstâncias que, numa primeira análise, pareceriam cair fora do seu domínio de aplicabilidade [4].

Neste trabalho pretendemos, usando o conceito de coeficiente de restituição, calcular a secção eficaz diferencial de uma colisão inelástica entre duas esferas. Mostraremos que é possível caracterizar a secção eficaz diferencial através de um único parâmetro, e que, em certos casos, ela apresenta uma divergência, fenómeno que é por vezes denominado dispersão de arco-íris (*rainbow scattering*), por ser muito similar ao que ocorre no estudo da dispersão da luz pelas gotas de água na óptica geométrica. A secção eficaz total será também obtida e interpretada.

¹E-mail: mffs@ubi.pt.

2. Formulação do problema

Consideremos uma colisão entre duas esferas lisas. Suponhamos que, inicialmente, uma delas (de massa m_1 e raio R_1) tem uma velocidade $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0$, e que a outra (de massa m_2 e raio R_2) está em repouso. Após a colisão, a esfera incidente adquire uma velocidade $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_1$. A interação entre as esferas ocorre por contacto.

A situação é mostrada na Fig. 1a. Foi escolhido como eixo x um eixo paralelo a \mathbf{v}_0 , como eixo y um eixo perpendicular a x no plano do movimento da primeira esfera, e como origem de coordenadas o ponto O , centro da esfera alvo. O parâmetro de impacto da colisão, designado b , satisfaz naturalmente a relação

$$\sin \varphi = \frac{b}{R_1 + R_2}, \quad (1)$$

onde φ é o ângulo representado na Fig. 1a. O ângulo entre o vector \mathbf{v}_1 e o eixo x , chamado ângulo de desvio, é designado por θ , como se mostra na Fig. 1b; nesta figura foram assinalados também os eixos tangencial e normal.

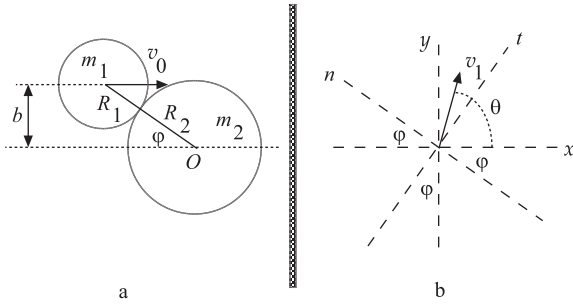


Figura 1 - Colisão entre duas esferas.

Para esta colisão, deseja-se calcular a secção eficaz diferencial, que vem dada por [5]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (2)$$

Da relação (1), resulta

$$b = (R_1 + R_2) \sin \varphi \implies \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left| \frac{db}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\theta} \right| = (R_1 + R_2) \cos \varphi \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|,$$

o que permite reescrever (2) na forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right| (R_1 + R_2)^2. \quad (3)$$

Quanto à secção eficaz total, pode ser escrita como

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta, \quad (4)$$

e calculada fazendo uso da expressão (2)

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_0^\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{R_1+R_2} b db = \pi (R_1 + R_2)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

resultado que tem uma interpretação geométrica clara [6].

3. Caso especial: a esfera alvo permanece fixa

Suponhamos primeiro que a esfera alvo permanece fixa devido a forças exteriores sobre ela aplicadas (alternativamente, podemos imaginar que a esfera alvo tem uma massa muito superior à da esfera incidente). Estudemos o movimento da esfera incidente.

A única força exercida sobre a esfera incidente é a que ocorre no instante da colisão; esta força actua na direcção do eixo normal, passando portanto pelo ponto O . Podemos aplicar a lei de conservação do momento angular \mathbf{L} em relação a O ao movimento desta esfera; assim, $L_i = L_f$ e, com a ajuda da Fig. 1, temos

$$\begin{aligned} m_1 b v_0 &= m_1 (R_1 + R_2) v_1 \cos[\theta - (\pi/2 - \varphi)] \implies \\ b v_0 &= (R_1 + R_2) v_1 \cos(\theta + \varphi - \pi/2) \end{aligned}$$

ou, incorporando a Eq. (1),

$$\begin{aligned} b v_0 &= (R_1 + R_2) v_1 \sin(\theta + \varphi) \implies \\ v_1 \sin(\theta + \varphi) &= v_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Uma relação adicional pode ser obtida introduzindo o coeficiente de restituição e associado à colisão, parâmetro que caracteriza o grau de inelasticidade da mesma; assim, da definição $e = -(v_f)_n / (v_i)_n$ resulta [7]

$$e = -\frac{v_1 \cos(\pi - \theta - \varphi)}{-v_0 \cos \varphi} = -\frac{v_1 \cos(\theta + \varphi)}{v_0 \cos \varphi} \implies v_1 \cos(\theta + \varphi) = -e v_0 \cos \varphi. \quad (7)$$

Para calcular a Eq. (3), devemos combinar a Eq. (6) com a Eq. (7). Neste caso, é claro que $d\varphi/d\theta \leq 0$, pelo que $|d\varphi/d\theta| = -d\varphi/d\theta$. Por outro lado, dividindo a Eq. (6) pela Eq. (7), temos

$$\begin{aligned} \tan(\theta + \varphi) &= -\frac{1}{e} \tan \varphi \implies \\ \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi} &= -\frac{1}{e} \tan \varphi, \end{aligned}$$

que nos permite obter θ em função de φ

$$\begin{aligned} e \tan \theta + e \tan \varphi &= \tan \theta \tan^2 \varphi - \tan \varphi \implies \\ \tan \theta &= \frac{(e + 1) \tan \varphi}{\tan^2 \varphi - e}. \end{aligned} \quad (8)$$

No entanto, para usarmos a expressão (3) precisamos de φ em função de θ (além disso, o que nos interessa é

obter a secção eficaz diferencial em função de θ e não em função de φ); reescrevemos então a Eq. (8) na forma

$$\tan \theta \tan^2 \varphi - (e + 1) \tan \varphi - e \tan \theta = 0.$$

Resolvendo esta equação de segundo grau em $\tan \varphi$, obtém-se

$$\tan \varphi_e = \frac{e + 1}{2 \tan \theta} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(e + 1)^2}} \right], \quad (9)$$

sendo o sinal + usado quando $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e o sinal - quando $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ (é simples verificar que $\varphi_e = \pi/2$ quando $\theta = 0$, $\tan \varphi_e = \sqrt{e}$ quando $\theta = \pi/2$, e $\varphi_e = 0$ quando $\theta = \pi$).

Dois casos particulares interessantes são $e = 1$ (colisão elástica) e $e = 0$. Assim

$$\begin{aligned} \tan \varphi_1 &= \frac{1 + \sec \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} = \\ \frac{2 \cos^2(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} &= \cot(\theta/2) \implies \varphi_1 = \frac{\pi - \theta}{2}, \\ \tan \varphi_0 &= \frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta \implies \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta \\ &\text{com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Alguns gráficos de $\varphi_e(\theta)$ para diferentes valores de e são mostrados na Fig. 2a. Os dois casos anteriores são claramente identificáveis (rectas). A relação (9) pode ser representada como se mostra na Fig. 2b, com

$$H_e = \sqrt{4 \tan^2 \theta + (1 + e)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1 + e)^2}} \right)^2}.$$

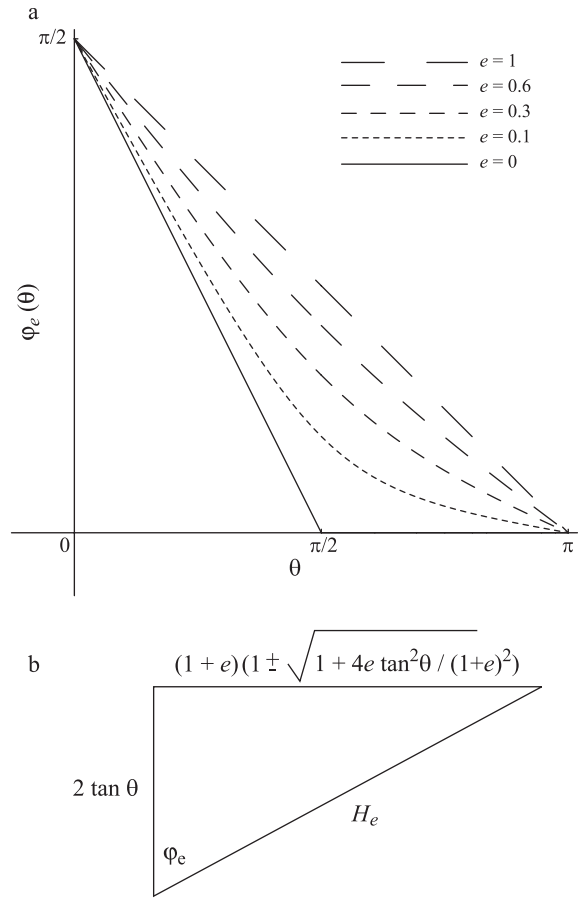


Figura 2 - Gráficos de $\varphi_e(\theta)$ e representação gráfica da relação (9). O cálculo de $d\varphi_e/d\theta$ a partir da Eq. (9) dá

$$\frac{d\varphi_e}{d\theta} = \mp \frac{\sin \varphi_e \cos \varphi_e}{\sin \theta \cos \theta \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1 + e)^2}}}. \quad (10)$$

Inserindo a Eq. (10) na Eq. (3) e tendo em conta a Fig. 2 obtém-se a seguinte expressão para a secção eficaz diferencial em função de θ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \pm \frac{4(R_1 + R_2)^2(1 + e)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1 + e)^2}} \right)^2}{\cos^3 \theta \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1 + e)^2}} \left[4 \tan^2 \theta + (1 + e)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1 + e)^2}} \right)^2 \right]^2}, \quad (11)$$

onde, mais uma vez, o sinal + é para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e o sinal - para $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

Prova-se facilmente que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (R_1 + R_2)^2 \times \begin{cases} 1 & \text{se } \theta = 0 \\ \frac{\sqrt{e}}{2(e + 1)} & \text{se } \theta = \frac{\pi}{2} \\ \frac{e^2}{(e + 1)^2} & \text{se } \theta = \pi \end{cases}. \quad (12)$$

Na Fig. 3 mostra-se o gráfico da secção eficaz diferencial em função de θ para vários valores do coeficiente de restituição.

Observa-se que, para uma colisão elástica ($e = 1$) a secção diferencial é constante e igual a $(R_1 + R_2)^2/4$, um resultado que é bem conhecido [2]; à medida que a colisão se torna mais inelástica (menores valores de e),

a dispersão tende a concentrar-se principalmente nos ângulos pequenos; para $e = 0$ a expressão (11) toma a forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \begin{cases} (R_1 + R_2)^2 \cos \theta & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad [e = 0]. \quad (13)$$

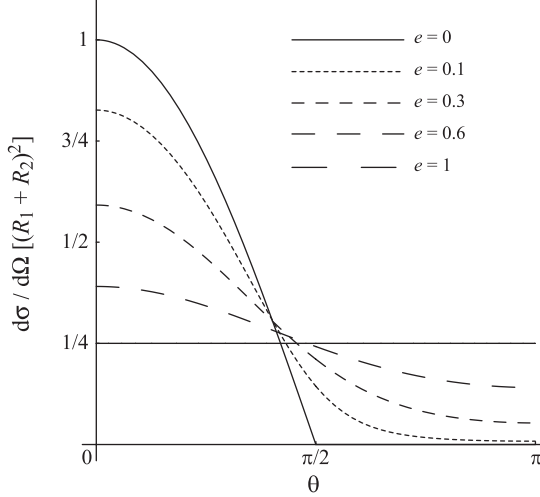


Figura 3 - Secção eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

Na Fig. 4 mostra-se o gráfico da secção eficaz diferencial multiplicada por $\sin \theta$, de novo em função de θ , para vários valores do coeficiente de restituição. É esta a função que, integrada entre 0 e π , nos dá a secção eficaz total. Todas as curvas representadas na Fig. 4 cobrem exactamente a mesma área, como se provou indirectamente em (5). A verificação deste facto, mediante integração directa a partir da expressão (11), pode ser vista no Apêndice A.

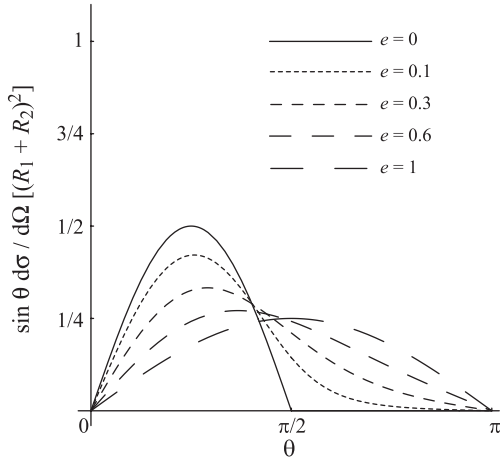


Figura 4 - Dependência de $\sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}$ com θ .

4. Caso geral: a esfera alvo recua

Admitamos agora que o sistema constituído pelas duas esferas está isolado, e que a esfera alvo recua como re-

sultado da colisão com a esfera incidente. (Alternativamente, deixamos de supor que a massa da esfera alvo é muito superior à da esfera incidente.) Seja $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_2$ a velocidade final da esfera alvo. Naturalmente, \mathbf{v}_2 deverá apontar no sentido negativo do eixo normal, já que é nessa direcção que está a única força que actua sobre a esfera alvo. A situação está representada na Fig. 5; na Fig. 5a mostra-se a situação inicial e na Fig. 5b a situação final. Note-se que, agora, o ângulo φ da Fig. 1a é precisamente o ângulo de recuo.

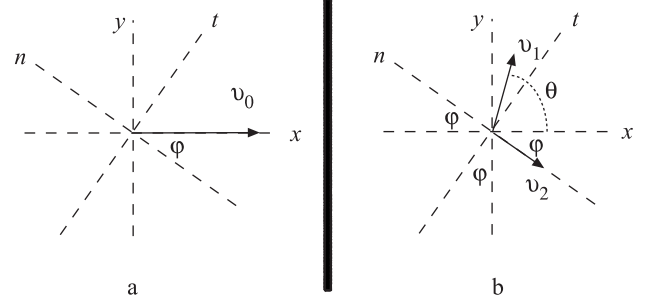


Figura 5 - Colisão entre as duas esferas, com recuo.

Escrevamos as equações que descrevem esta colisão. No eixo tangencial temos

$$v_{1t} = v_0 \sin \varphi \quad \text{e} \quad v_{2t} = 0, \quad (14)$$

já que não existe qualquer força sobre este eixo. Estas relações garantem automaticamente a conservação da componente tangencial do momento linear. No eixo normal, a conservação do momento linear dá

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = -m_1 v_0 \cos \varphi \implies \lambda v_{1n} + v_{2n} = -\lambda v_0 \cos \varphi, \quad (15)$$

onde introduzimos o parâmetro $\lambda \equiv m_1/m_2$ (a análise da secção anterior corresponde ao caso $\lambda = 0$). Por último, a definição do coeficiente de restituição dá

$$e = -\frac{v_{1n} - v_{2n}}{-v_0 \cos \varphi - 0} \implies v_{1n} - v_{2n} = e v_0 \cos \varphi. \quad (16)$$

Combinando as expressões (15) e (16) resulta

$$v_{1n} = \frac{e - \lambda}{\lambda + 1} v_0 \cos \varphi \quad \text{e} \quad v_{2n} = -\frac{\lambda(e + 1)}{\lambda + 1} v_0 \cos \varphi. \quad (17)$$

Portanto

$$v_{1x} = v_{1t} \sin \varphi - v_{1n} \cos \varphi = \frac{\lambda + \sin^2 \varphi - e \cos^2 \varphi}{\lambda + 1} v_0, \quad (18)$$

$$v_{1y} = v_{1t} \cos \varphi + v_{1n} \sin \varphi = \frac{(e + 1) \sin \varphi \cos \varphi}{\lambda + 1} v_0, \quad (19)$$

$$v_{2x} = v_{2t} \sin \varphi - v_{2n} \cos \varphi = \frac{\lambda(e + 1) \cos^2 \varphi}{\lambda + 1} v_0, \quad (20)$$

$$v_{2y} = v_{2t} \cos \varphi + v_{2n} \sin \varphi = -\frac{\lambda(e + 1) \sin \varphi \cos \varphi}{\lambda + 1} v_0. \quad (21)$$

Como $v_{1x} = v_1 \cos \theta$ e $v_{1y} = v_1 \sin \theta$, conclui-se que

$$\tan \theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{(e + 1) \sin \varphi \cos \varphi}{\lambda + \sin^2 \varphi - e \cos^2 \varphi}. \quad (22)$$

Usando as fórmulas trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos \varphi &= \frac{\sin 2\varphi}{2}, \\ \sin^2 \varphi &= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \quad e \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

a expressão (22) pode ser reescrita na forma mais simples

$$\tan \theta = \frac{\sin 2\varphi}{k - \cos 2\varphi}, \quad \text{com} \quad k \equiv \frac{2\lambda + 1 - e}{e + 1}. \quad (24)$$

À semelhança da Eq. (8), esta fórmula dá-nos θ em função de φ [de facto, se substituirmos o valor $\lambda = 0$ na Eq. (22), deduz-se imediatamente a Eq. (8)]. Mais uma vez, para calcularmos a secção eficaz diferencial da colisão através da Eq. (3), a fórmula (24) deve ser invertida.

Elevando ao quadrado a Eq. (24) e escrevendo $\sin^2 2\varphi = 1 - \cos^2 2\varphi$ obtém-se a seguinte equação de segundo grau em $\cos 2\varphi$

$$\cos^2 2\varphi - 2k \sin^2 \theta \cos 2\varphi + k^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 0. \quad (25)$$

As duas soluções desta equação são

$$\begin{aligned} \varphi_k^\pm(\theta) &= \frac{1}{2} \arccos(k \sin^2 \theta \pm \\ &|\cos \theta| \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}). \end{aligned} \quad (26)$$

O comportamento destas soluções depende do valor de k , que por sua vez depende da relação entre os

parâmetros λ e e (note-se, adicionalmente, que k e λ coincidem no caso de uma colisão elástica). Efectivamente, da definição de k na Eq. (24) é fácil concluir que k é não negativo, e que

$$\begin{aligned} k > 1 &\iff \lambda > e, \\ k = 1 &\iff \lambda = e, \\ k < 1 &\iff \lambda < e. \end{aligned} \quad (27)$$

Consideremos cada um destes casos separadamente.

Suponhamos primeiro que $k > 1$. Neste caso a Eq. (24) permite concluir que os valores de θ estão limitados ao primeiro quadrante, pelo que pode substituir-se $|\cos \theta|$ por $\cos \theta$ na Eq. (26). Na verdade, a expressão (26) restringe ainda mais os valores de θ

$$\begin{aligned} 1 - k^2 \sin^2 \theta \geq 0 &\implies k \sin \theta \leq 1 \implies \\ \theta &\leq \arcsin \frac{1}{k} \equiv \theta_k^*. \end{aligned} \quad (28)$$

É fácil verificar que $\varphi_k^+(0) = 0$, $\varphi_k^-(0) = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi_k^+(\theta_k^*) = \varphi_k^-(\theta_k^*) = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{k} \equiv \varphi_k^*$. Calculando a derivada obtemos

$$\frac{d\varphi_k^\pm}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{2 \sin 2\varphi_k^\pm} \left(-2k \cos \theta \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \pm \frac{k^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right), \quad (29)$$

expressão que permite concluir que a função φ_k^+ é crescente, e que a função φ_k^- é decrescente. Um gráfico genérico das funções $\varphi_k^\pm(\theta)$ pode ver-se na Fig. 6a; a Fig. 6b mostra a dependência de $\varphi_k^\pm(\theta)$ com k .

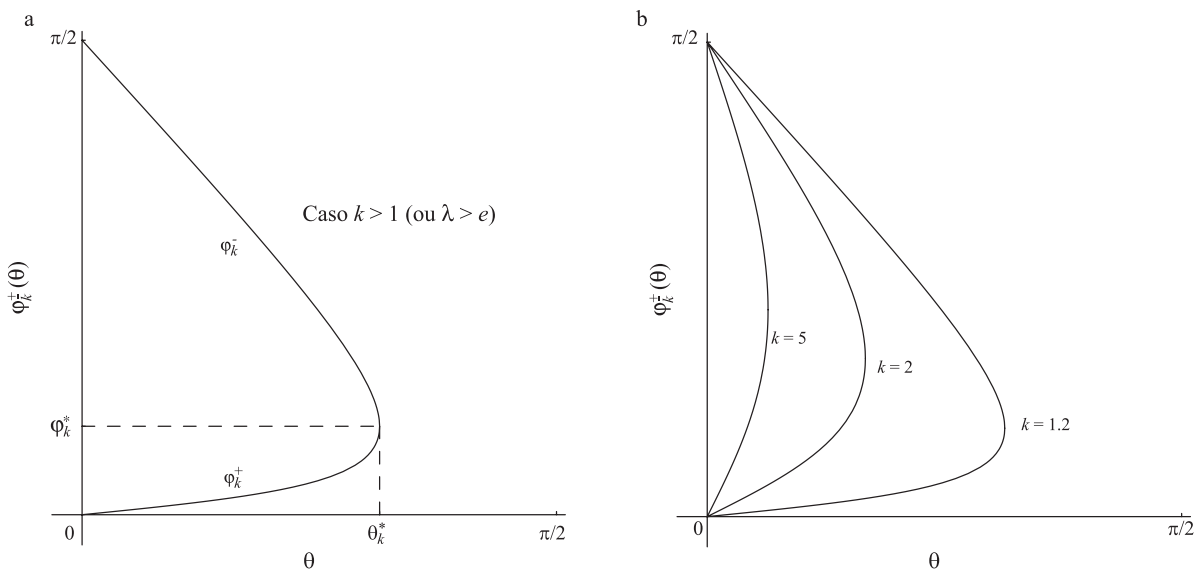


Figura 6 - Gráfico das funções $\varphi_k^\pm(\theta)$ para $k > 1$.

Nestes gráficos observa-se que, para cada valor de θ , existem dois valores de φ , ou seja, dois parâmetros de impacto diferentes estão associados ao mesmo ângulo de desvio. O facto de $\varphi_k(\theta)$ ter estes dois “ramos” faz dela uma “função” plurívoca, e tem de ser levado em conta no cálculo da secção eficaz diferencial, que deve ser obtida somando estas duas contribuições [8, 9].

Tomando o valor absoluto da expressão (29) resulta

$$\left| \frac{d\varphi_k^\pm}{d\theta} \right| = \frac{\sin \theta}{2 \sin 2\varphi_k^\pm} \left(\mp 2k \cos \theta + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} + \frac{k^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right), \quad (30)$$

com θ_k^* definido em (28). Note-se que esta função diverge no limite em que $\theta \rightarrow \theta_k^*$. Verifica-se que $\frac{d\sigma}{d\Omega}(0) = \frac{1+k^2}{2}(R_1+R_2)^2$ e, estudando a derivada da secção eficaz diferencial com respeito a θ , pode-se provar que, para $k < \sqrt{3}$, a função apresenta um máximo local em $\theta = 0$ e um mínimo local em $\theta = \arcsin \sqrt{(3-k^2)/2k^2} \equiv \theta_k^{**}$, enquanto que, para $k \geq \sqrt{3}$, a função tem um mínimo em $\theta = 0$ e é sempre crescente.

A Fig. 7 contém gráficos da secção eficaz diferencial em função de θ . As Figs. 7a e 7b mostram gráficos genéricos para $k < \sqrt{3}$ e $k \geq \sqrt{3}$, respectivamente, e as Figs. 7c e 7d mostram a dependência destes gráficos com o parâmetro k . A característica mais importante destes gráficos é o facto de a secção eficaz diferencial divergir para ângulos próximos do ângulo limite, θ_k^* . Este fenómeno é denominado dispersão de arco-íris [9].

Na Fig. 8 mostra-se o gráfico da secção eficaz diferencial multiplicada por $\sin \theta$, em função de θ . As Figs. 8a e 8b são gráficos genéricos em duas situações distintas, e a Fig. 8c mostra a dependência dos gráficos com o valor do parâmetro k . A função representada tem um mínimo (0) em $\theta = 0$; se $k \geq \sqrt{5}/2$, ela é sempre crescente; se $k < \sqrt{5}/2$, a função apresenta um

de modo que

$$\frac{\sin 2\varphi_k^+}{\sin \theta} \left| \frac{d\varphi_k^+}{d\theta} \right| + \frac{\sin 2\varphi_k^-}{\sin \theta} \left| \frac{d\varphi_k^-}{d\theta} \right| = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} + \frac{k^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (31)$$

Introduzindo este resultado na Eq. (3), obtém-se (lembrando que $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}(R_1+R_2)^2 \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} + \frac{k^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right),$$

pelo que a secção eficaz diferencial adquire a seguinte expressão final

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \begin{cases} \frac{1+k^2-2k^2 \sin^2 \theta}{2\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}(R_1+R_2)^2 & \text{se } 0 \leq \theta < \theta_k^* \\ 0 & \text{se } \theta_k^* \leq \theta \end{cases} \quad [k > 1], \quad (32)$$

máximo local em $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{3-\sqrt{5-4k^2}}}{2k} \equiv \theta_k^M$ e um mínimo local em $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{3+\sqrt{5-4k^2}}}{2k} \equiv \theta_k^m$.

O integral de $\sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}$ entre 0 e θ_k^* dá-nos a secção eficaz total. Apesar de todas as curvas representadas divergirem quando $\theta \rightarrow \theta_k^*$, elas cobrem a mesma área [finita, ver Eq. (5)]. A verificação explícita por integração directa a partir da Eq. (32) foi feita no Apêndice B.

Consideremos agora o caso $k = 1$. Podemos substituir este valor na Eq. (26), mas é mais fácil fazê-lo na Eq. (24)

$$\tan \theta = \frac{\sin 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi} = \cot \varphi \implies \theta + \varphi = \frac{\pi}{2} \implies \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad (33)$$

o que significa que θ está restrito ao intervalo $[0, \pi/2]$; a representação gráfica é a da Fig. 9 (veja a Fig. 6b e tente imaginar o limite $k \rightarrow 1^+$).

Esta situação inclui o bem conhecido caso particular de uma colisão elástica ($e = 1$) entre esferas de igual massa ($\lambda = 1$), no qual, como se sabe, as trajectórias finais das duas esferas resultam perpendiculares [10]. Também inclui o caso $e = 0$ estudado na secção 3, representado pela recta contínua da Fig. 2a.

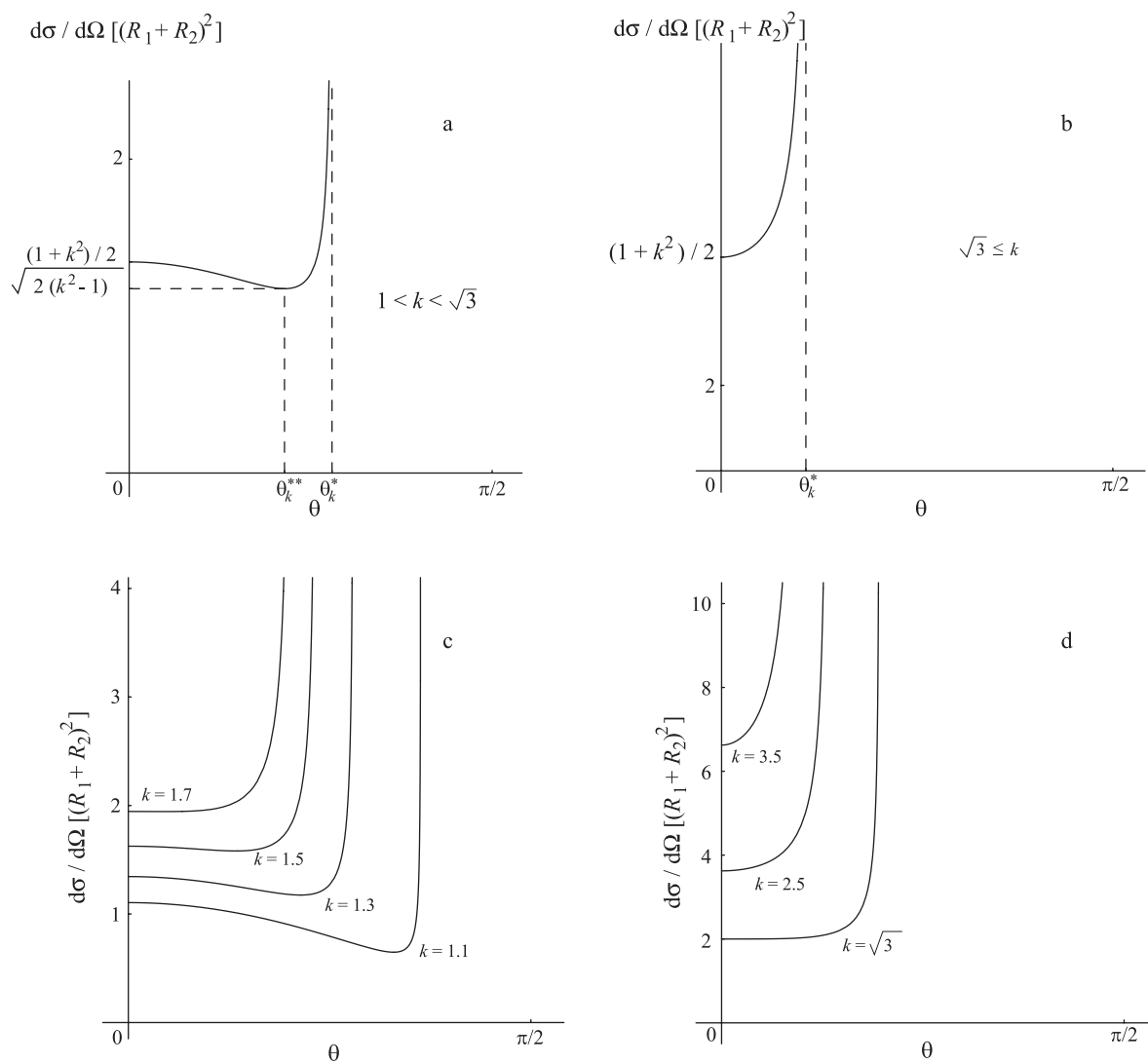


Figura 7 - Secção eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para $k > 1$.

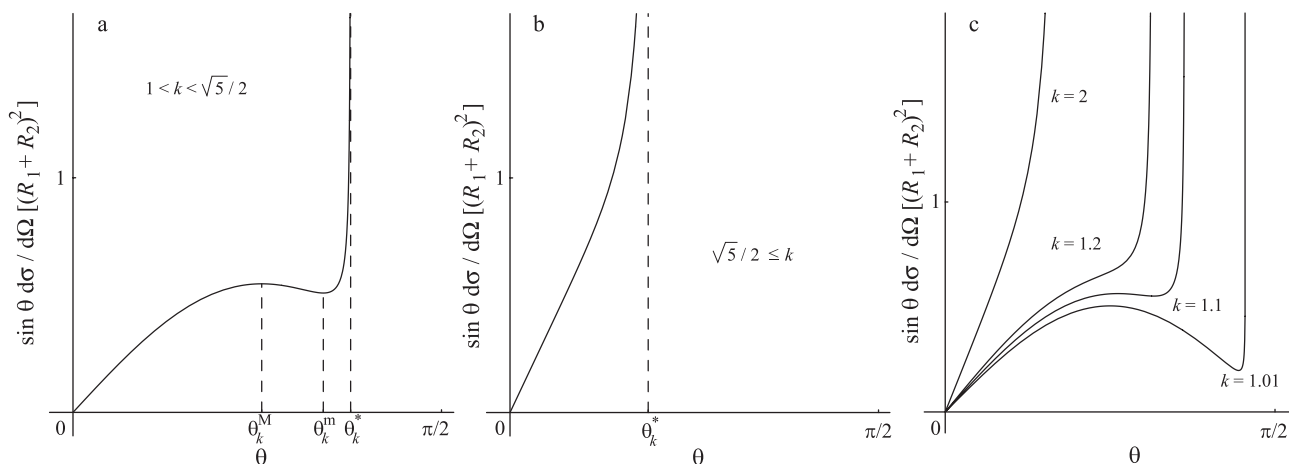


Figura 8 - Dependência de $\sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}$ com θ para $k > 1$.

O cálculo da secção eficaz diferencial através da Eq. (3) é, neste caso, extremamente simples. Com base na Eq. (33), temos $\sin \varphi_1 = \cos \theta$, $\cos \varphi_1 = \sin \theta$, e

$|d\varphi_1/d\theta| = 1$. Logo,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin \theta} (R_1 + R_2)^2,$$

e a expressão final para a secção eficaz diferencial é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \begin{cases} \cos \theta (R_1 + R_2)^2 & \text{se } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 \leq \theta \end{cases} \quad [k = 1]. \quad (34)$$

Fazemos notar novamente que este resultado é idêntico àquele que se obteve na secção 3 (esfera alvo fixa) quando $e = 0$ [ver Eq. (13)]. O que é fácil de perceber: uma esfera alvo fixa é equivalente a $m_2 = \infty$, ou seja, $\lambda = 0$, logo se $e = 0$ temos $k = 1$.

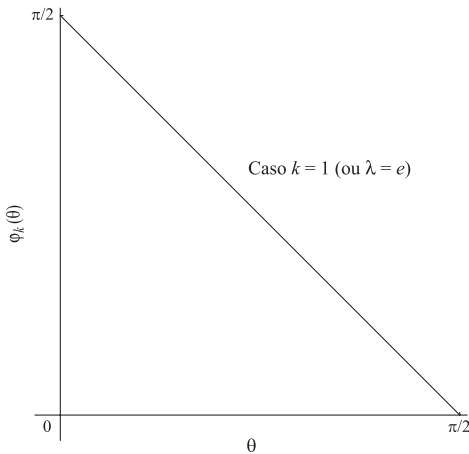


Figura 9 - Gráfico de $\varphi_1(\theta)$.

Os gráficos da secção eficaz diferencial e do seu produto por $\sin \theta$ foram representados na Fig. 10, e são precisamente as curvas contínuas das Figs. 3 e 4, que já não apresentam as divergências observadas nas Figs. 7 e 8 (caso $k > 1$). O gráfico da Fig. 10a pode ver-se como o limite do gráfico da Fig. 7a quando $k \rightarrow 1^+$ (note que, neste limite, $\theta_k^* \rightarrow \pi/2$, $\theta_k^{**} \rightarrow \pi/2$, $(1+k^2)/2 \rightarrow 1$ e $\sqrt{2(k^2-1)} \rightarrow 0$). Analogamente, o gráfico da Fig. 10b é o limite do gráfico da Fig. 8a quando $k \rightarrow 1^+$ (neste limite, $\theta_k^M \rightarrow \pi/4$, $\theta_k^m \rightarrow \pi/2$ e $\theta_k^* \rightarrow \pi/2$), o que é claramente visível na Fig. 8c. O cálculo da secção eficaz total mediante integração directa da Eq. (34) está no Apêndice A [expressão (47)].

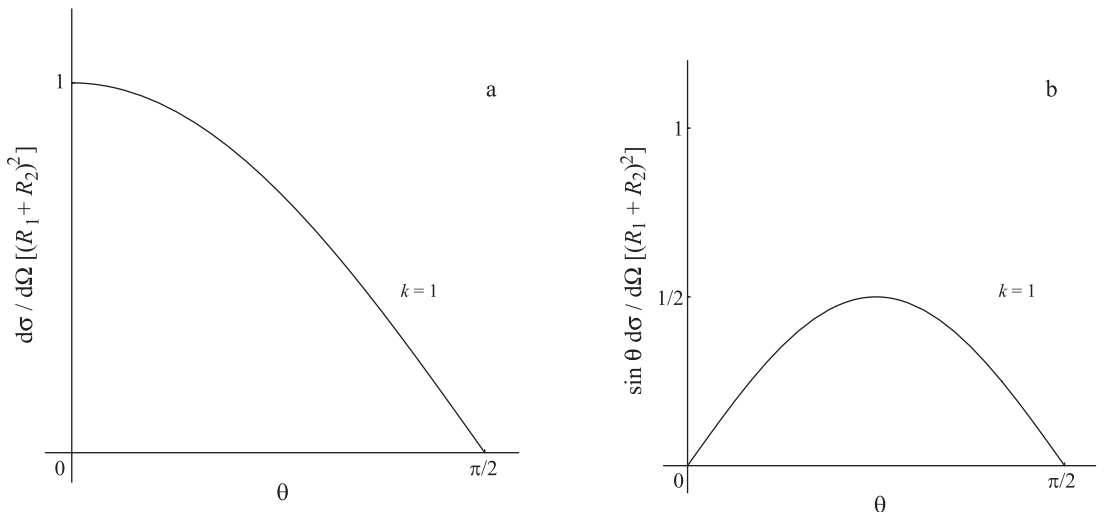


Figura 10 - Dependência de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ e de $\sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}$ com θ para $k = 1$.

Para concluir, vejamos agora o caso $k < 1$. A expressão (24) mostra que $\theta = \pi$ quando $\varphi = 0$, e $\theta = 0$ quando $\varphi = \pi/2$. Ou seja, neste caso os valores de θ já não estão restritos ao primeiro quadrante. Adicional-

mente, como

$$\theta = \arctan \left(\frac{\sin 2\varphi}{k - \cos 2\varphi} \right) \implies \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2(k \cos 2\varphi - 1)}{(k - \cos 2\varphi)^2 + \sin^2 2\varphi} < 0, \quad (35)$$

a função $\theta(\varphi)$ é decrescente, pelo que $\varphi(\theta)$ deve ser, também, decrescente. Para que a função $\varphi(\theta)$ seja decrescente, na expressão (26) devemos escolher o sinal $-$ quando $0 \leq \theta \leq \pi/2$, e o sinal $+$ quando $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. Como no primeiro caso $|\cos \theta| = \cos \theta$ e no segundo $|\cos \theta| = -\cos \theta$, conclui-se que a solução pode ser escrita na forma

$$\varphi_k(\theta) = \frac{1}{2} \arccos \left(k \sin^2 \theta - \cos \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \right) . \quad (36)$$

A Fig. 11 mostra alguns gráficos da função $\varphi_k(\theta)$ para vários valores de k . Resulta interessante comparar estes gráficos com os obtidos nas Fig. 6 e 9. Note-se também que o caso $k = 0$ (que só é possível se, simultaneamente, $\lambda = 0$ e $e = 1$) pode ser associado à colisão elástica estudada na secção 3 (esfera alvo fixa), representada na Fig. 2a pela recta descontínua $e = 1$.

A grande semelhança entre a Fig. 2a e a Fig. 11 tem uma explicação: a Fig. 2a corresponde a uma situação em que $\lambda = 0$; da definição (24), $k = (1 - e)/(e + 1) < 1$ (se $e \neq 0$). Ou seja, as curvas da Fig. 2a são casos especiais das da Fig. 11 (a única excepção é a do caso $e = 0$, que corresponde à Fig. 9).

Tentemos obter agora a secção eficaz diferencial. Derivando a fórmula (36) em relação a θ resulta

$$\left| \frac{d\varphi_k}{d\theta} \right| = \frac{\sin \theta}{2 \sin 2\varphi_k} \left(2k \cos \theta + \frac{1 + k^2 - 2k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right), \quad (37)$$

pelo que (lembre novamente que $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$)

$$\frac{\sin \varphi_k \cos \varphi_k}{\sin \theta} \left| \frac{d\varphi_k}{d\theta} \right| = \frac{1}{4} \left(2k \cos \theta + \frac{1 + k^2 - 2k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right). \quad (38)$$

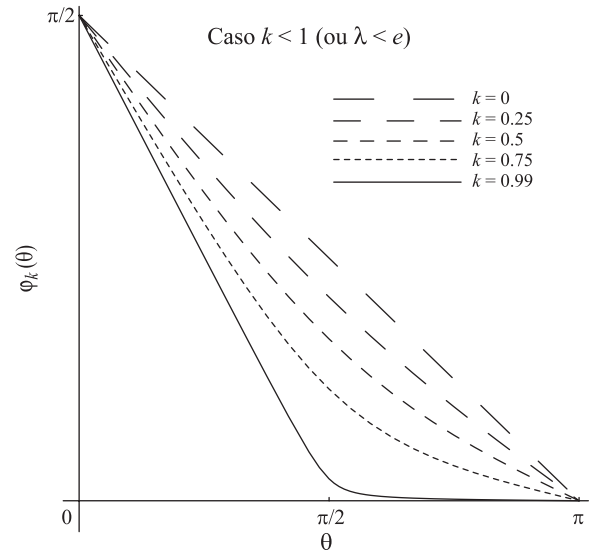
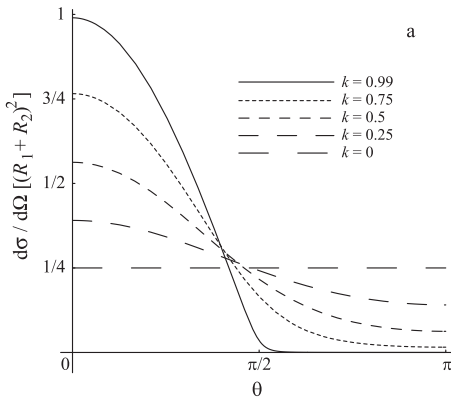


Figura 11 - Gráficos de $\varphi_k(\theta)$ para $k < 1$.

Substituindo este resultado na Eq. (3) obtém-se a secção eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{1}{4} \left(2k \cos \theta + \frac{1 + k^2 - 2k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right) \times (R_1 + R_2)^2 \quad [k < 1]. \quad (39)$$

Verifica-se que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (R_1 + R_2)^2 \times \begin{cases} \left(\frac{1+k}{2} \right)^2 & \text{se } \theta = 0 \\ \sqrt{1-k^2} & \text{se } \theta = \frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{1-k}{2} \right)^2 & \text{se } \theta = \pi \end{cases} . \quad (40)$$

A derivada da secção eficaz diferencial com respeito a θ é nula para $\theta = 0$ e para $\theta = \pi$, e negativa para qualquer outro θ ; assim, trata-se de uma função decrescente, cujo gráfico é apresentado na Fig. 12a para vários valores do parâmetro k . Na Fig. 12b mostra-se o gráfico de $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta$, também para vários k .

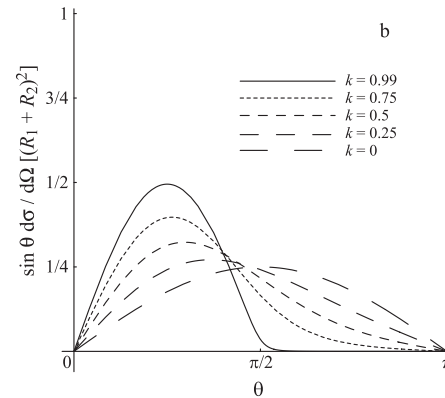


Figura 12 - Dependência de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ e de $\sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}$ com θ para $k < 1$.

A semelhança entre os gráficos da Fig. 12 e os das Fig. 3 e 4 da secção 3 não é acidental, pelos motivos já descritos anteriormente (o caso considerado na secção 3 é um caso particular do caso tratado nesta secção). A mesma semelhança ocorre entre as Eqs. (40) e (12): de facto, a Eq. (12) pode ser obtida a partir da Eq. (40) colocando $k = (1 - e)/(e + 1)$. A mesma substituição permite transformar a Eq. (39) na Eq. (11), se bem que os cálculos correspondentes sejam algo mais elaborados [é muito significativa a simplicidade da expressão que resulta da Eq. (39) em relação à expressão (11)].

A verificação analítica, por integração directa da Eq. (39), de que todas as curvas representadas na Fig. 12b cobrem a mesma área (cálculo da secção eficaz total) foi colocada no Apêndice C.

5. Conclusões

Calculou-se a secção eficaz diferencial para uma colisão inelástica entre uma esfera de massa m_1 e uma esfera de massa m_2 inicialmente em repouso. Foi conseguida uma descrição em termos de um único parâmetro positivo k , definido a partir do quociente $\lambda = m_1/m_2$ entre as massas e do coeficiente de restituição e da colisão.

A análise envolveu três situações distintas: $k > 1$ (ou $\lambda > e$), $k = 1$ (ou $\lambda = e$) e $k < 1$ (ou $\lambda < e$). Para cada uma dessas situações, foram elaborados gráficos a partir das expressões analíticas correspondentes [Eqs. (32), (34) e (39), respectivamente]. Na primeira situação, foi obtida uma divergência na secção eficaz diferencial. O valor da secção eficaz total foi confirmado por integração directa em todos os casos.

Desta forma foram conciliados dois conceitos que tradicionalmente não têm sido usados em simultâneo: o de secção eficaz diferencial e o de coeficiente de restituição.

Apêndices

A. Cálculo direto da secção eficaz total no caso da colisão sem recuo

Neste apêndice calcula-se directamente a secção eficaz total da colisão analisada na secção 3 (colisão sem recuo). A secção eficaz diferencial é dada pela expressão (11), que ao ser introduzida na Eq. (4) dá

$$\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2(I_1 + I_2), \quad \text{com} \quad (41)$$

$$I_1 \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{8(1+e)^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1+e)^2}}\right)^2 \sin \theta d\theta}{\cos^3 \theta \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1+e)^2}} \left[4 \tan^2 \theta + (1+e)^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1+e)^2}}\right)^2\right]^2}, \quad (42)$$

$$I_2 \equiv \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-8(1+e)^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1+e)^2}}\right)^2 \sin \theta d\theta}{\cos^3 \theta \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1+e)^2}} \left[4 \tan^2 \theta + (1+e)^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1+e)^2}}\right)^2\right]^2}. \quad (43)$$

Suponhamos primeiro que $e \neq 0$. Introduzindo a variável $u = \sqrt{1 + \frac{4e \tan^2 \theta}{(1+e)^2}}$ resulta

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2(1+e)^4}{e} \int_1^{\infty} \frac{(1+u)^2 du}{\left[\frac{(1+e)^2(u^2-1)}{e} + (1+e)^2(1+u)^2\right]^2} = \frac{2e}{(1+e)^2} \int_1^{\infty} \frac{du}{\left[u + \frac{e-1}{e+1}\right]^2} \\ &= \frac{2e}{(1+e)^2} \left[\frac{1}{u + \frac{e-1}{e+1}} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{1+e} \quad e \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2(1+e)^4}{e} \int_1^{\infty} \frac{(1-u)^2 du}{\left[\frac{(1+e)^2(u^2-1)}{e} + (1+e)^2(1-u)^2\right]^2} = \frac{2e}{(1+e)^2} \int_1^{\infty} \frac{du}{\left[u + \frac{1-e}{e+1}\right]^2} \\ &= \frac{2e}{(1+e)^2} \left[\frac{1}{u + \frac{1-e}{e+1}} \right]_1^{\infty} = \frac{e}{1+e}. \quad \text{Portanto} \end{aligned} \quad (45)$$

$$I_1 + I_2 = 1 \quad \implies \quad \sigma = \pi(R_1 + R_2)^2. \quad (46)$$

Se, por outro lado, $e = 0$, podemos usar a expressão (13) em (4) para obter

$$\sigma = 2\pi(R_1 + R_2)^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi(R_1 + R_2)^2 \int_0^1 2wdw = \pi(R_1 + R_2)^2, \quad (47)$$

onde se fez a mudança de variável $w = \sin \theta$; este resultado particular coincide com o resultado obtido antes, o que prova que a fórmula (46) é válida em geral.

Note-se que, em ambas as situações, $I_2 = eI_1$, ou seja, o coeficiente de restituição pode ser visto como o quociente entre a secção eficaz total “para trás” e a secção eficaz total “para a frente” numa colisão sem recuo.

B. Cálculo direto da secção eficaz total no caso da colisão com recuo para $k > 1$

Neste apêndice calcula-se directamente a secção eficaz total da colisão analisada na secção 4 (colisão com recuo) quando $k > 1$. A secção eficaz diferencial é dada pela expressão (32), que ao ser introduzida na Eq. (4) dá

$$\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2 I_3, \quad \text{com} \quad (48)$$

$$I_3 \equiv \int_0^{\arcsin(1/k)} \frac{1 + k^2 - 2k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \sin \theta d\theta. \quad (49)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{k} \int_0^{\operatorname{arccosh}(k/\sqrt{k^2-1})} [2(k^2 - 1) \cosh^2 p - (k^2 - 1)] dp \\ &= \frac{k^2 - 1}{k} \int_0^{\operatorname{arccosh}(k/\sqrt{k^2-1})} \cosh 2p dp = \frac{k^2 - 1}{2k} [\sinh 2p]_0^{\operatorname{arccosh}(k/\sqrt{k^2-1})} \\ &= \frac{k^2 - 1}{k} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} = 1, \end{aligned} \quad (52)$$

onde usámos as relações hiperbólicas $2 \cosh^2 p - 1 = \cosh 2p$, $\sinh 2p = 2 \sinh p \cosh p$ e $\cosh^2 p = 1 + \sinh^2 p$ [11]. Portanto

$$\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2. \quad (53)$$

C. Cálculo direto da secção eficaz total no caso da colisão com recuo para $k < 1$

Neste apêndice calcula-se directamente a secção eficaz total da colisão analisada na secção 4 (colisão com recuo) quando $k < 1$. A secção eficaz diferencial é dada pela expressão (39), que ao ser introduzida na Eq. (4) dá

$$\sigma = \frac{\pi}{2}(R_1 + R_2)^2(I_4 + I_5), \quad \text{com} \quad (54)$$

$$I_4 \equiv \int_0^\pi 2k \cos \theta \sin \theta d\theta$$

e

$$I_5 \equiv \int_0^\pi \frac{1 + k^2 - 2k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \sin \theta d\theta. \quad (55)$$

Mostra-se facilmente que a primeira integral é nula

$$I_4 = k \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = \frac{k}{2} [\cos 2\theta]_\pi^0 = 0. \quad (56)$$

Usando a relação $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, podemos escrever

$$I_3 = \int_0^{\arcsin(1/k)} \frac{1 - k^2 + 2k^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 + k^2 \cos^2 \theta}} \sin \theta d\theta. \quad (50)$$

Fazendo a mudança de variável $z = \cos \theta$ temos

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\sqrt{k^2-1}/k}^1 \frac{1 - k^2 + 2k^2 z^2}{\sqrt{1 - k^2 + k^2 z^2}} dz = \\ &= \int_{\sqrt{k^2-1}/k}^1 \frac{2k^2 z^2 - (k^2 - 1)}{\sqrt{k^2 z^2 - (k^2 - 1)}} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \int_{\sqrt{k^2-1}/k}^1 \frac{2k^2 z^2 - (k^2 - 1)}{\sqrt{\frac{k^2 z^2}{k^2 - 1} - 1}} dz. \end{aligned} \quad (51)$$

Apliquemos aqui a mudança de variável $\frac{kz}{\sqrt{k^2 - 1}} = \cosh p$. Resulta

Como no apêndice B, o segundo integral pode ser reescrito na forma

$$I_5 = \int_0^\pi \frac{1 - k^2 + 2k^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 + k^2 \cos^2 \theta}} \sin \theta d\theta \quad (57)$$

e fazendo a mudança de variável $z = \cos \theta$ obtém-se

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{-1}^1 \frac{1 - k^2 + 2k^2 z^2}{\sqrt{1 - k^2 + k^2 z^2}} dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} \int_0^1 \frac{1 - k^2 + 2k^2 z^2}{\sqrt{1 + \frac{k^2 z^2}{1 - k^2}}} dz. \end{aligned} \quad (58)$$

Introduz-se agora a mudança de variável $\frac{kz}{\sqrt{1 - k^2}} = \sinh p$. Resulta

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{2}{k} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(k/\sqrt{1-k^2})} [1 - k^2 + 2(1 - k^2) \sinh^2 p] dp \\
&= \frac{2(1 - k^2)}{k} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(k/\sqrt{1-k^2})} \cosh 2p dp = \frac{1 - k^2}{k} [\sinh 2p]_0^{\operatorname{arcsinh}(k/\sqrt{1-k^2})} \\
&= \frac{2(1 - k^2)}{k} \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} = 2, \tag{59}
\end{aligned}$$

onde usamos as relações hiperbólicas $1 + 2 \sinh^2 p = \cosh 2p$, $\sinh 2p = 2 \sinh p \cosh p$ e $\cosh^2 p = 1 + \sinh^2 p$ [11]. Assim

$$\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2. \tag{60}$$

Se separarmos o integral \int_0^π nos integrais $\int_0^{\pi/2}$ (secção eficaz total “para a frente”, σ_f) e $\int_{\pi/2}^\pi$ (secção eficaz total “para trás”, σ_t), obtém-se

$$\begin{aligned}
\sigma_f &= \frac{\pi}{2}(1 + k)(R_1 + R_2)^2, \\
\sigma_t &= \frac{\pi}{2}(1 - k)(R_1 + R_2)^2 \implies \\
\frac{\sigma_t}{\sigma_f} &= \frac{1 - k}{1 + k} = \frac{e - \lambda}{1 + \lambda}. \tag{61}
\end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, $\sigma_t/\sigma_f = e$, como já tínhamos concluído no Apêndice A.

Referências

- [1] W. Greiner, *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics* (Springer, Nova Iorque, 2003), p. 52.
- [2] J.R. Taylor, *Classical Mechanics* (University Science Books, Califórnia, 2005), p. 573-4, Eq. (14.25).
- [3] M.F. Ferreira da Silva, Rev. Esp. Fís. (em breve).
- [4] M.F. Ferreira da Silva, Eur. J. Phys. **28**, 1219 (2007).
- [5] S.T. Thornton and J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Brooks/Cole, Belmont, 2004), 5th ed., p. 364, Eq. (9.120).
- [6] R.G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles* (Dover, Nova Iorque, 2002), 2nd ed., p. 125, Eq. (5.14).
- [7] J.L. Meriam and L.G. Kraige, *Engineering Mechanics v. 2: Dynamics* (Wiley, Nova Iorque, 2003), 5th ed., p. 216.
- [8] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Mecánica* (Editorial Reverté, Barcelona, 1978), 2^a ed., p. 59, nota de pé de página.
- [9] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, San Francisco, 2002), 3rd ed., p. 111.
- [10] G.R. Fowles and G.L. Cassiday, *Analytical Mechanics* (Saunders College Publishing, Fort Worth, 1999), 6th ed., p. 287, Eq. (7.6.6).
- [11] H.B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data* (MacMillan Publishing, Nova Iorque, 1961), 4th ed., p. 151-152.