Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 38, nº 4, e4702 (2016)
www.scielo.br/rbef
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0044
Notas e Discussões

A geometria dinâmica do círculo de Apolônio

The dynamic geometry of Apollonius circle

Reynaldo Lopes de Oliveira Jr.*

Escola SESC de Ensino Médio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 22 de Fevereiro, 2016. Revisado em 21 de Junho, 2016. Aceito em 30 de Junho, 2016

Neste trabalho, apresento uma nova questão referente à aplicação do círculo de Apolônio no contexto do *design de games*. Ao invés de determinarmos o ponto de encontro a partir das condições iniciais; na nova questão proposta decidiremos previamente o ponto de encontro/interceptação e calcularemos o instante em que o torpedo deve ser lançado. Na questão proposta em [1] o torpedo e o navio partem ao mesmo tempo (em trajetória retilínea) rumo a interceptação. E se esperarmos um certo tempo t para lançarmos o torpedo? Ou então, e se apontarmos o torpedo para uma determinada posição e desejarmos saber em que instante o navio será interceptado nesta posição? Estas são as novas questões trazidas nesta nota..
Palavras-chave: problemas de perseguição, simulação computacional, simulação com software educacional.

In this paper, I present a new application of the Apollonius circle in a game design context. Instead of determining the meeting point from the initial conditions, in the present proposal a previously prescribed interception point is given and I calculate the instant of time that the torpedo must be launched. In the problem proposed in reference [1] the torpedo and the ship start at the same time (on a straight path) towards the point of interception. Now I pose the following question: What happens if we wait a certain time t to launch the torpedo? What happens if we aim the torpedo to a certain point and we want to know the instant the ship is hit when passing through this point? These are the new questions addressed to in this note.
Keywords: pursuit problems; computational simulation; educational software.

No trabalho [1] foi apresentado, como uma aplicação do círculo de Apolônio, a solução para a interceptação entre dois objetos a uma velocidade constante (um torpedo e um navio porta-aviões).

Na figura 1 o navio (N) está na posição (0,0) em $t = 0$ de um plano cartesiano.O eixo x a partir da origem, cruza a posição do torpedo (T). A reta NAB é a suposta direção a ser seguida pelo navio. Os pontos A e B são os pontos onde N intercepta o círculo de Apolônio.Se o navio e o torpedo **partirem ao mesmo tempo** de suas posições iniciais, eles se interceptarão em A ou B para um dado $k = \frac{V_N}{V_T}$. Onde V_N é a velocidade escalar do navio e V_T é a velocidade escalar do torpedo. Para mais detalhes sobre este problema ver ref. [1].
Neste artigo apresento uma nova questão: e se resolvermos esperar um pouco para atirarmos o torpedo, quais seriam as novas possibilidades de inter-

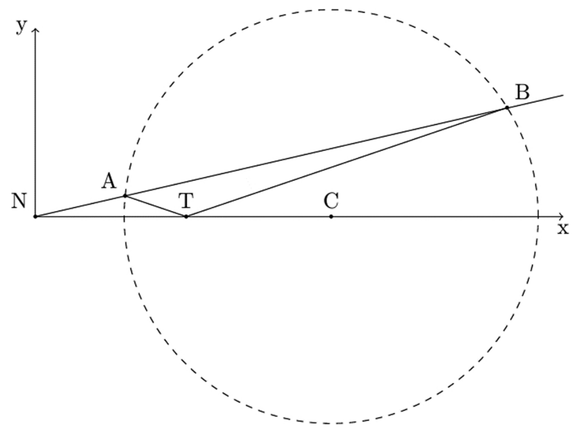

Figura 1: Círculo de Apolônio Estático para k = 0.7

*Endereço de correspondência: rlojunior@gmail.com.

ceptação? O navio ainda parte da origem do plano cartesiano xy (figura 1) e o torpedo ainda está em T. A nova situação se dá pelo fato do torpedo não partir ao mesmo tempo que o navio.

Considere o navio na origem do plano xy e o torpedo sobre o eixo x na posição T (figura 1). Para este caso o círculo de Apolônio é dado pela equação [1]:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{1}$$

onde:

$$x_0 = \frac{-x_T}{k^2 - 1}, \qquad y_0 = 0 \tag{2}$$

e

$$R = \frac{k x_T}{|1 - k^2|}, \qquad k \neq 1 \tag{3}$$

Imaginemos agora que o navio continue a navegar e o torpedo ainda não tenha sido lançado. Precisamos saber como determinar a cada instante as novas possibilidades de interceptação. Dada a posição de N em $t > 0$, para mantermos a mesma solução que a apresentada em (1) devemos traçar um novo plano cartesiano x'y'. Para a construção deste plano x'y' rotacionamos e transladamos o eixo xy (Figura 2). Observamos assim que o centro do círculo de Apolônio também será rotacionado e transladado. O novo centro do círculo de Apolônio em $t > 0$ será C'. Sendo assim as possibilidades de interceptação entre N e T serão nos pontos A' e B' conforme mostrado na figura 3. Observe ainda nesta figura que o ponto N, que indica a posição do navio já está em um pouco mais a frente do que quando $t = 0$.

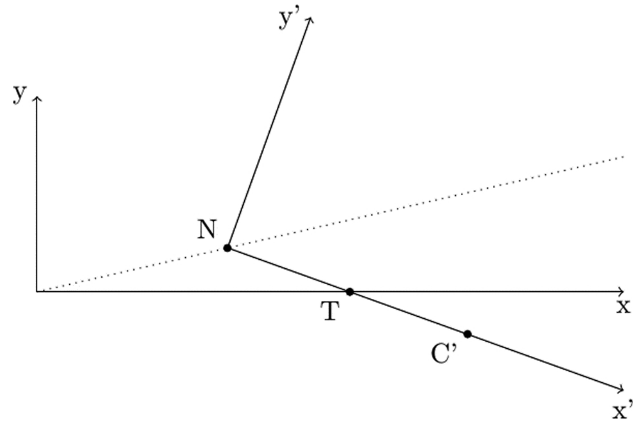

Figura 2: Eixo cartesiano x'y'

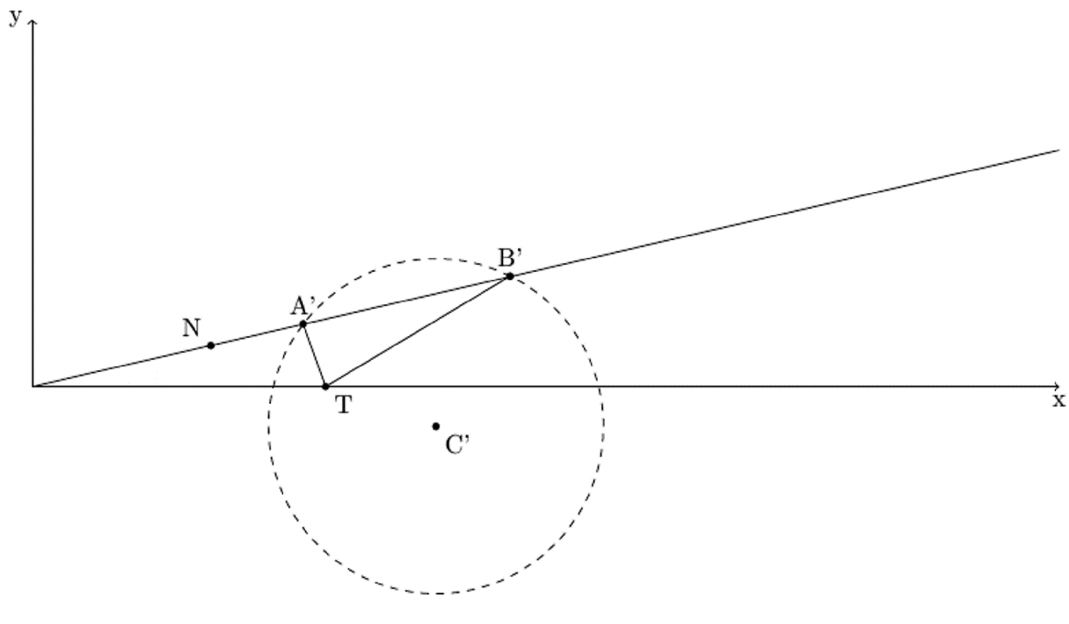

Figura 3: Círculo de Apolônio para $k < 1$ em um instante $t > 0$.

 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0044

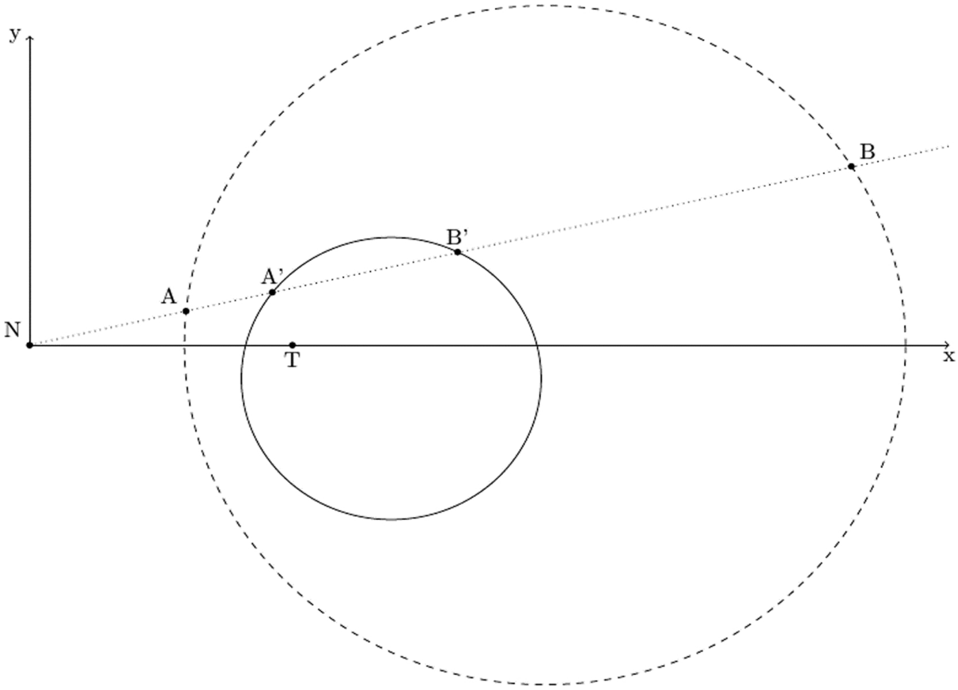

Figura 4: Em linhas tracejadas temos o círculo de Apolônio em $t = 0$ conforme mostrado na figura 1 e em linha sólida temos o círculo depois de um tempo $t > 0$ conforme mostrado na figura 3

Nesta figura o raio do círculo de Apolônio é menor do que a solução em $t = 0$. O raio da circunferência de acordo com (3) depende da posição de T. Como na figura 3 a posição, no novo sistema x'y', muda a cada instante o raio também mudará. Na figura 4 podemos observar a evolução temporal da circunferência.

Sendo assim, se o torpedo demorar um tempo $t > 0$ para ser atirado, a nova possibilidade de interceptação será em B' ou em A'.

Com o avanço de *softwares* matemáticos podemos observar que antes problemas estáticos e imóveis, agora podem ser animados tornando o aprendizado da matemática mais significativo e interessante. Não são poucos os problemas onde nossos alunos têm que "imaginar"rotações, translações das figuras geométricas estáticas do quadro negro. Assim, utilizei o *software* Geogebra para tornar o problema do círculo de Apolônio, um *applet* interativo. O link da aplicação especialmente criada para este trabalho está neste endereço[1]. Para acessar a aplicação não é necessário ter o *software* Geogebra instalado.

A fim de complementar os estudos realizados sobre o círculo de Apolônio, já apresentado nesta revista [1], apresentei a solução de mais uma questão que emergiu a respeito do tema. A nova questão surge a partir da implementação do círculo de Apolônio como algorítimo na programação de jogos de tiro. O jogo a ser desenvolvido é uma releitura do jogo lançado pela Atari em 1977, o *Air-Sea Battle* [2]. Neste jogo o jogador controla um canhão anti aéreo e deve atingir aviões que passam por cima da cidade. Ambos míssil e avião viajam em trajetórias retilíneas. Sabendo a velocidade do míssil e do avião (ou pelo menos sabendo a razão entre as velocidades) surge a pergunta: quanto tempo devemos esperar para que o míssil intercepte o avião?

O interessante é notar que desta vez, diferente da proposição feita em [1] desejamos previamente definir a posição de interceptação. Refazendo a pergunta em termos matemáticos seria: Em que instante as trajetórias do míssil e do avião interceptarão o círculo de Apolônio? Para resolver esta questão se fez necessário entender como o círculo de Apolônio (e as condições de interceptação) evoluem com o tempo.

Referências

[1] R. Lopes e A.C. Tort, Revista Brasileira de Ensino de Física **36**, 3502 (2014).

[2] Air-Sea Battle, disponível em `https://en.wikipedia.org/wiki/Air-Sea_Battle`.

[1] http://ggbtu.be/m1325441