

# Escrevendo o “Livro da Natureza” na linguagem da matemática: A lei de Ampère

(Writing the “Book of Nature” in the language of mathematics: Ampère’s law)

Vitor Hugo Alves Dias<sup>1,2</sup>, Penha Maria Cardozo Dias<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Observatório Nacional, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

<sup>2</sup>Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Recebido em 30/6/2015; Aceito em 8/9/2015; Publicado em 12/12/2015

O artigo revê a dedução da lei de Ampère, como feita por ele e na mesma sequência de etapas. Indicam-se princípios que a fundamentam. A expressão da lei resultou de uma interação entre experimento e a habilidade de Ampère em “narrar” o fato na linguagem da matemática.

**Palavras-chave:** lei de Ampère, corrente elétrica, força entre circuitos, história da física.

This paper reviews the deduction of Ampère’s law as made by Ampère himself, and following the same sequence of steps. We indicate the principles on which the law is founded. The expression of the law is the result of an interaction between experiment, and Ampère’s skills to account for facts in the language of mathematics.

**Keywords:** Ampère’s law, electric current, force between two circuits, history of physics.

## 1. Introdução

André-Marie Ampère comunicou à Académie Royale des Sciences, em várias sessões, entre 1820 e 1825, uma série de experimentos [1]. Uma coletânea de seu trabalho foi publicada em 1827, sob o nome de “Mémoire sur la Théorie Mathématique des Phénomènes Electrodynamiques Uniquement Déduite de l’Expérience” (Ref. [2], traduzida na Ref. [1]). Nessa *Mémoire*, é reproduzida a demonstração da força entre correntes, a chamada Lei de Ampère, a qual ele já havia apresentado em artigos [3]. A Fig. 1 ilustra a lei.

Em notação moderna, a força entre os circuitos da figura (Lei de Ampère) é [4]<sup>1</sup>

$$\mathbf{F} = \frac{ii'}{c^2} \oint \oint \frac{\mathbf{ds} \times (\mathbf{ds}' \times \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (1)$$

em que  $c$  é a velocidade da luz. Definindo a indução

<sup>2</sup>E-mail: penha@if.ufrj.br.

<sup>1</sup>No sistema CGS.

<sup>2</sup>Ela é complicada para um aluno iniciante da graduação, tanto em seu significado, quanto matematicamente, por envolver vários produtos vetoriais, o que sempre é difícil para esse aluno. Talvez por isso, livros de física básica largamente adotados nas universidades (Ref. [5], [6]) omitem a expressão (1) e apresentam somente (2) ou sua forma diferencial,  $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ , em que  $\mathbf{j}$  é a corrente. Além disso, limitam-se a apresentar somente um caso particular de (2), a chamada Lei de Biot-Savart (Refs. [4, p. 135]; [7, p. 197]), que fornece a indução magnética gerada por uma corrente em um fio linear, infinito, a uma distância  $R$  do fio. O resultado é obtida por integração de (2), adaptada às condições do problema [4]  $|\mathbf{B}(R)| = \frac{i'R}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds'}{[R^2+(s')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2i'}{cR}$ .

magnética

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{i'}{c} \oint \frac{(\mathbf{ds}' \times \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (2)$$

a força pode ser escrita

$$\mathbf{F} = \frac{i}{c} \oint \mathbf{ds} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

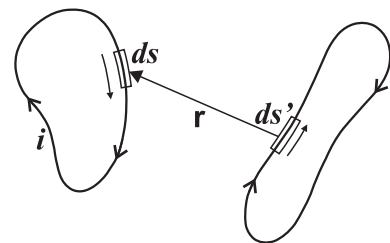


Figura 1 - Lei de Ampère. A figura mostra dois circuitos. As correntes são respectivamente  $i$  e  $i'$ ; os elementos de circuito são respectivamente  $\mathbf{ds}$  e  $\mathbf{ds}'$ ;  $\mathbf{r}$  liga os centros dos circuitos elementares, isto é,  $\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{s}'$ , em que  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{s}'$  são as posições dos centros, respectivamente.

A expressão (1) é instigante dos pontos de vista físico e matemático. Matematicamente, pode-se perguntar como foi possível chegar a uma expressão tão complicada.<sup>2</sup> Fisicamente, um modo de justificar a lei, sem entrar em discussão sobre a natureza da descoberta científica [8], é um enfoque histórico, no qual se analisa a construção da lei — como originalmente feita por Ampère — na procura dos princípios que a fundamentam e que lhe conferem racionalidade.<sup>3</sup> Uma abordagem histórica foi apresentada por José Goldemberg [7]; após discutir quatro experimentos auxiliares realizados por Ampère, que mostram propriedades fundamentais da força, Goldemberg conclui (Ref. [7, p. 190]):

As informações das quatro experiências acima bastam para que se descubra a expressão analítica da força entre dois elementos de corrente [...].

Mas entre os quatro experimentos e (1) existe um abismo, que foi transposto pela capacidade de Ampère em matematizar. Este artigo segue o enfoque de Goldemberg, mas com ênfase na “matematização”, isto é, na construção da complicada (1) a partir dos quatro experimentos.

A expressão (1) resultou de uma interação entre os quatro experimentos citados e a capacidade de Ampère de “narrar” o fato empírico na linguagem da Matemática, o que é expresso na metáfora do título do artigo. Autores conceituados de história, talvez por optarem por uma apresentação historiográfica exaustiva [10], limitam-se a uma descrição sumária da dedução da lei, deixando escapar o significado do fato matemático e criando um “vazio”, como se “fazer conta” fosse, apenas, um detalhe. Abner Shimony dizia a um de nós (PMCD) que contas são classificadas em “illuminating” e “non-illuminating”; em nossa interpretação, aquelas explicam e são parte do significado físico, essas são, como o nome diz, sem brilho próprio e são só manipulações analíticas (embora, muitas vezes, brilhante manipulações). No caso de Ampère, as contas “iluminam” os pressupostos da derivação, isto é, o caminho até (9), abaixo, e a derivação de  $n = 2$ , na seção 4.5.

A seção 2 é introdutória e contextualiza as pesquisas de Ampère; ele observou o fenômeno da atração entre duas bobinas, no decurso de outros estudos (Refs. [10, 11]). Na seção 3, discutimos os experimentos auxiliares, ressaltando seus objetivos. Na seção 4, discutimos a dedução da força; como o objetivo é a procura do significado da lei contido nos elementos que levaram Ampère a ela, são reproduzidos os mesmos cálculos feitos na *Mémoire* [2] e na mesma seqüência de etapas; cálculos auxiliares longos (mas que nem por isso deixam de ser brilhantes), foram colocados em apêndices. A notação é muito pouco modernizada, por exemplo,

com a introdução da notação vetorial, mas as componentes são, também, apresentadas; o leitor é avisado, quando uma notação não original de Ampère é introduzida, de modo a não lhe atribuir categorias que não poderia ter conhecido.

As contribuições de Ampère vão além de sua equação (o que já teria sido suficiente em uma única vida), por exemplo, os conceitos de circuito e de elementos de corrente (Ref. [10, p. 6]). Sua motivação mais profunda (Ref. [10, p. 7]) “[...] era estabelecer sua teoria em bases experimentais firmes e formulá-la em uma forma matemática irrepreensível”. Sobre a Lei de Ampère expressou-se James Clerk Maxwell (*apud* Ref. [12, p. 88]):

O todo, teoria e experimento, parece ter saltado, inteiramente pronto e com o instrumental completo, do cérebro do “Newton da Eletricidade”. Ela é perfeita em forma e inatingível em acuracidade; e é resumida em uma fórmula da qual todos os fenômenos podem ser deduzidos e que deve sempre permanecer a fórmula cardinal da eletrodinâmica.

## 2. A descoberta de Ampère

Em 1820, Hans Christian Ørsted observou que um longo fio, próximo a uma bússola, alterava a orientação da agulha da bússola (que é naturalmente ao longo do meridiano terrestre local), sempre que uma corrente atravessava o fio. Quando a bússola era colocada acima do fio, a agulha se desviava para leste; para oeste, se colocada abaixo. A descoberta de Ampère, de que correntes se atraem ou repelem foi feita no decurso de sua investigação do efeito relatado por Ørsted.

Ampère verificou que o efeito observado por Ørsted era, também, produzido por uma pilha, o que o levou à idéia de circuito, fechando a corrente (Ref. [10, p. 6]).<sup>4</sup> As etapas importantes que levaram à observação do fenômeno formam um silogismo; seguimos a apresentação na Ref. [11]:

1. Ampère faz uma analogia entre correntes e o magnetismo terrestre (Ref. [13, p. 202-203]):

Minha primeira reflexão, quando desejei procurar as causas dos novos fenômenos descobertos pelo [Senhor] [Ørsted], foi que [—] a ordem na qual dois fatos são descobertos não fazendo nenhuma diferença nas conseqüências das analogias que eles apresentam [—] nós podemos supor que, antes de saber que a agulha imantada assume uma direção constante do sul ao norte, já

<sup>3</sup>Foi proposto [9] que a história da física tem propriedades que a tornam um bom “organizador prévio”, um conceito da teoria da Aprendizagem Significativa, constituindo-se em um facilitador do aprendizado.

<sup>4</sup>Na época, não havia um consenso sobre o funcionamento de pilhas e nem se existia uma corrente dentro dela (Ref. [10, p. 6]).

tivéssemos conhecido a propriedade que ela tem de ser conduzida, por uma corrente elétrica, a uma situação perpendicular à da corrente, de modo que o pólo austral da agulha fosse levado à esquerda da corrente; e que, em seguida, se descobrisse a propriedade que ela tem de girar constantemente para o norte a extremidade que se dirigia para o lado esquerdo da corrente. A idéia mais simples, aquela que se apresentaria imediatamente àquele que desejasse explicar a direção constante do sul ao norte, não seria admitir na Terra uma corrente elétrica [...]?

2. Se o magnetismo terrestre é devido a correntes na Terra, assim o deve ser qualquer magnetismo, incluindo ímãs (Ref. [13, p. 207]):

Entretanto, se as correntes elétricas são a causa da ação diretriz da Terra, as correntes elétricas serão também a causa [da ação] de um ímã sobre um outro ímã; donde se segue que um ímã deve ser considerado como um conjunto de correntes elétricas que ocorrem no plano perpendicular a seu eixo, [...].

3. O próximo experimento verifica o fenômeno entre ímãs e circuitos fechados com correntes constantes (Ref. [13, p. 207]):

Assim, em cada um dos pólos de um ímã, as correntes elétricas em que se compõem são dirigidas ao longo de curvas fechadas concêntricas. Imitai esta disposição tanto quanto possível, com uma corrente elétrica, dobrando o fio condutor em espiral.

O experimento de Ampère é, assim, descrito (Ref. [11, p. 607]):

Enrolou um fio na forma de uma espiral plana; colocou o eixo da espiral alinhado com o eixo norte-sul de um ímã em forma de barra; ao passar uma corrente constante no fio, observou uma atração ou uma repulsão entre a espiral e o ímã. A atração tornava-se uma repulsão, quando ele invertia o pólo do ímã que estava mais próximo da espiral ou quando invertia a direção da corrente elétrica que fluía através da espira

O resultado é interpretado (Ref. [11, p. 607]):

A diferença principal dessa experiência em relação à experiência de [Ørsted]

é que Ampère observou atrações e repulsões entre a espiral e o ímã, enquanto que [Ørsted] observou uma deflexão lateral da agulha imantada, devido a um torque exercido pelo fio com corrente.

4. A seguir, Ampère substituiu o ímã em forma de barra por uma segunda espiral. Segundo Moacir P. Souza Filho e cols. [11], embora Ampère não tenha justificado essa substituição, ele estaria (Ref. [11, p. 607-608]) “dando continuidade à verificação experimental de sua hipótese inicial de que todos os efeitos magnéticos são devidos a correntes no interior dos ímãs. Logo, deveria, pois, ser possível reproduzir atrações e repulsões entre ímãs, trabalhando apenas com condutores conduzindo correntes constantes”.

Após descrever seu experimento com as duas espirais, Ampère declara (Ref. [13, p. 208]):

Substituindo o ímã por uma outra espiral, cuja corrente tinha o mesmo sentido que o seu, obteve-se as mesmas atrações e repulsões; foi assim que descobri que duas correntes elétricas se atraem, quando ocorrem no mesmo sentido, e se repelem, no sentido contrário.

Os autores formulam uma tese historiográfica (Ref. [11, p. 608]): O texto acima “[...] indica o caminho seguido por Ampère e o fato de sua descoberta da atração e repulsão entre condutores retilíneos ter vindo depois da observação da atração e repulsão entre espirais, inspirada por este último fato”.

### 3. Os quatro casos de equilíbrio

Os casos de equilíbrio são constituídos por quatro experimentos (Ref. [2, p. 185-199]). Esses são experimentos em que nada acontece. Por nada acontecer, as forças envolvidas estão em equilíbrio e é possível fazer inferências sobre as direções das forças ou sobre a ação de correntes. Antecipando resultados, nos dois primeiros experimentos, o aparelho básico é a chamada *balança de Ampère* (Fig. 2); a balança permanece equilibrada, sem girar em torno do eixo vertical; nesses experimentos (Ref. [7, p. 190]):

[...] a noção de elemento de corrente [ $i\mathbf{dl}$  e  $i'\mathbf{dl}'$ ] é útil porque a [primeira] e [segunda] experiências mostram que a dependência da força em  $i$  e [ $\mathbf{dl}$ ] é de caráter aditivo e vetorial.

No terceiro e quarto experimentos (Ref. [7, p. 190]):

A [quarta] experiência mostra que a força é proporcional a  $\frac{1}{r}$  e a [terceira], que a dependência com [ $r\mathbf{dl}$ ] e [ $\mathbf{dl}'$ ] deve envolver

produtos vetoriais (que são sempre perpendiculares a  $[d\mathbf{l}]$  e  $[d\mathbf{l}']$ ).

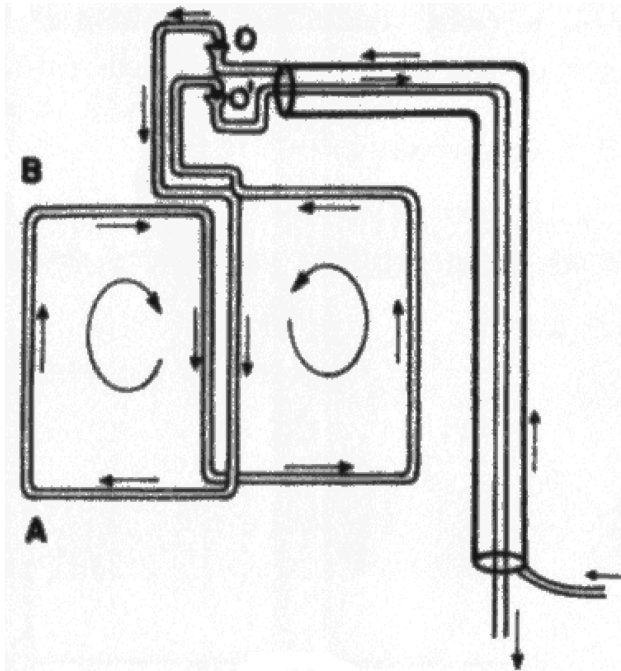


Figura 2 - A balança esquematizada (Ref; [7, p. 187]). Dois circuitos são pivotados em  $O$  e  $O'$ , respectivamente, podendo girar em torno do eixo vertical  $OO'$ . A corrente neles circula em sentidos opostos.

### 3.1. Primeiro caso de equilíbrio

#### 3.1.1. Objetivo

Mostrar que (Ref. [12, p. 85]) “[o] efeito de uma corrente é revertido, quando a direção da corrente for revertida”. Significa que correntes iguais e opostas produzem forças iguais e opostas.

#### 3.1.2. Descrição

O aparato é mostrado na Fig. 3 e um detalhe de  $AB$ , na Fig. 4. No experimento, qualquer que seja o ângulo formado pelo plano da balança com o condutor  $AB$ , a balança fica estacionária. Então, as correntes em  $AB$  causam forças nas correntes em  $bcde$  e  $b'c'd'e'$  (Fig. 5), que exercem torques que se cancelam mutuamente (Fig. 6).

#### 3.1.3. Diagramas de correntes e de campos e forças

As correntes na balança (Fig. 3) estão indicadas na Fig. 5 e os campos e forças, na Fig. 6.

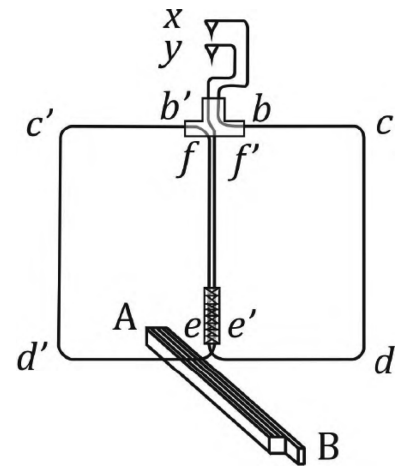


Figura 3 - Experimento 1 (o aparato na Ref. [2, p. 186-188]). Os circuitos  $bcde$  e  $b'c'd'e'$  formam uma balança que pode girar em torno do eixo vertical pivotado em  $bb'$ ;  $AB$  é um condutor dobrado várias vezes.

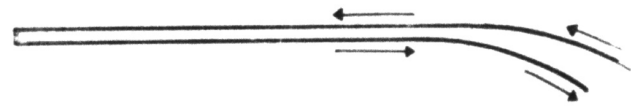


Figura 4 - O fio  $AB$  (Ref. [7, p. 188]). A figura mostra uma dobra do fio  $AB$  e as correntes nos ramos dobrados.

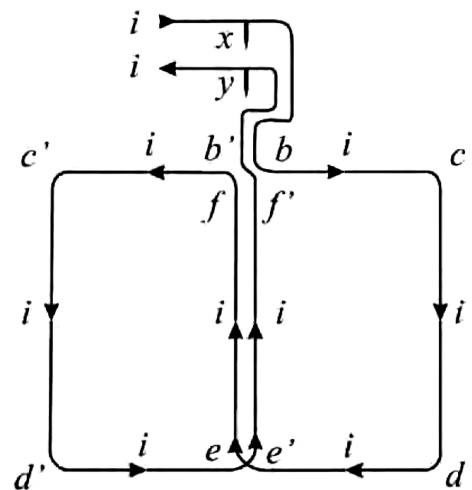


Figura 5 - Correntes. A figura mostra as correntes nos braços da balança da Fig. 3 [1].

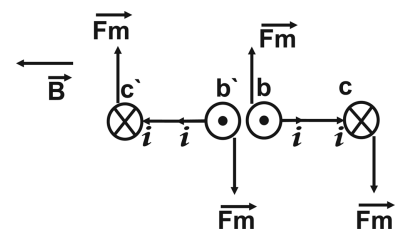


Figura 6 - Campos e forças. Aparelho da Fig. 5, visto por um observador no topo do aparelho, olhando verticalmente para baixo.  $\mathbf{F}$  é a força;  $\mathbf{B}$ , a indução;  $i$  a corrente. A convenção é a usual: círculo com ponto, o campo é direcionado para fora da folha de papel; círculo com cruz, o campo é direcionado para dentro da folha.

### 3.2. Segundo caso de equilíbrio

#### 3.2.1. Objetivo

Mostrar que (Ref. [12, p. 85]) "o efeito de uma corrente [...] torcida em pequenas sinuosidades é o mesmo, se o circuito fosse retificado".

#### 3.2.2. Descrição

O aparato é mostrado na Fig. 7 e uma ilustração de correntes em fios retilíneo e sinuoso, na Fig. 8. No experimento (Fig. 9), a corrente percorre os condutores fixos,  $RS$  (sinuoso) e  $PQ$  (retilíneo), no mesmo sentido (ascendente), contrário ao sentido em  $GH$  (descendente). Como a ação dos dois condutores é a mesma a distâncias iguais, o fio  $GH$  é igualmente repellido por  $RS$  e por  $PQ$ , ficando estacionário no meio do intervalo entre os fios fixos (Fig. 10).

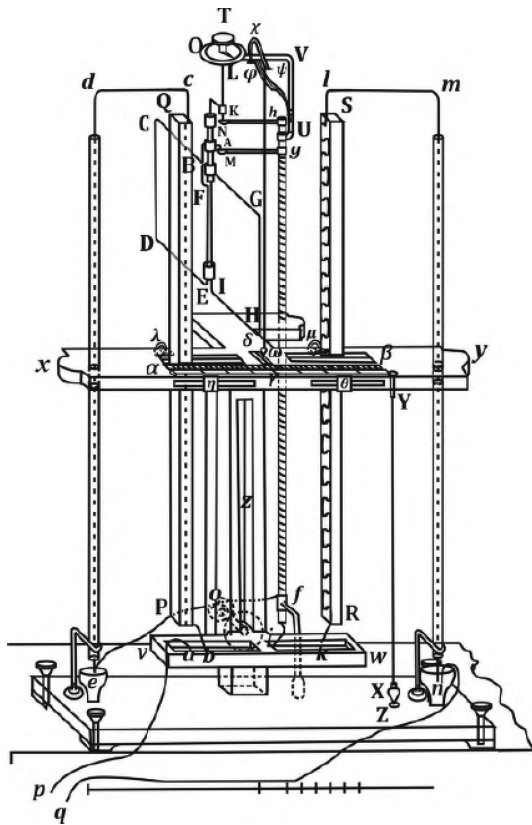


Figura 7 - Experimento 2 (aparato em (Ref. [2, p. 188-194])). O circuito é formado por  $abcdefghijklmnopq$ . A parte  $CDEFGHIK$  do circuito forma uma balança, pivotada em  $MN$ ;  $PQ$  (retilíneo) e  $RS$  (sinuoso) são condutores fixos;  $GH$  é móvel e está no meio do intervalo entre os dois condutores fixos.



Figura 8 - Correntes em fios retilíneo e sinuoso (Ref. [7, p. 188]). O efeito de uma corrente em um fio sinuoso é igual em intensidade ao da mesma corrente em um fio retilíneo.

### 3.2.3. Diagramas de correntes e de campos e forças

As correntes na balança estão indicadas na Fig. 9 e os campos e forças, na Fig. 10.

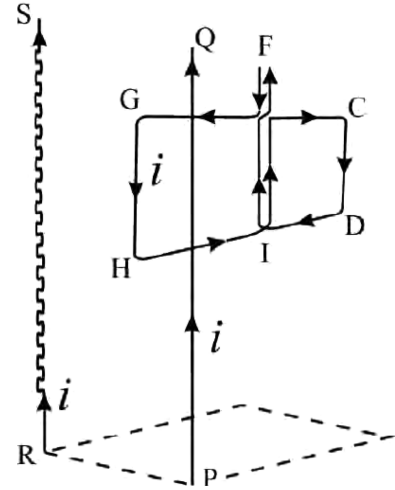


Figura 9 - Corrente [1]. A figura é um esquema da Fig. 7; mostra as correntes nos braços da balança e nos fios retilíneo e sinuoso.

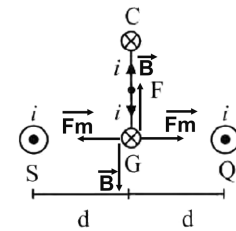


Figura 10 - Campos e forças [1]. Aparelho da Fig. 7, visto por um observador no topo do aparelho, olhando verticalmente para baixo. A convenção é a mesma da Fig. 6.

### 3.3. Terceiro caso de equilíbrio

#### 3.3.1. Objetivo

Mostrar que (Ref. [12, p.85]) "[a] força exercida por um circuito fechado, em um elemento de outro circuito faz um ângulo reto com este [circuito]".

#### 3.3.2. Descrição

O aparato é mostrado na Fig. 11. No experimento (Fig. 11 e Fig. 12), se o centro do arco  $BB'$  é inicialmente alinhado com o eixo  $GH$ , ao ligar a corrente,  $BB'$  desliza sobre os recipientes de mercúrio,  $M$  e  $M'$ , de modo a alinhar  $O$  com  $GH$ , onde permanece imóvel. Significa que o torque é perpendicular ao arco, por onde passa a corrente (Fig. 13).

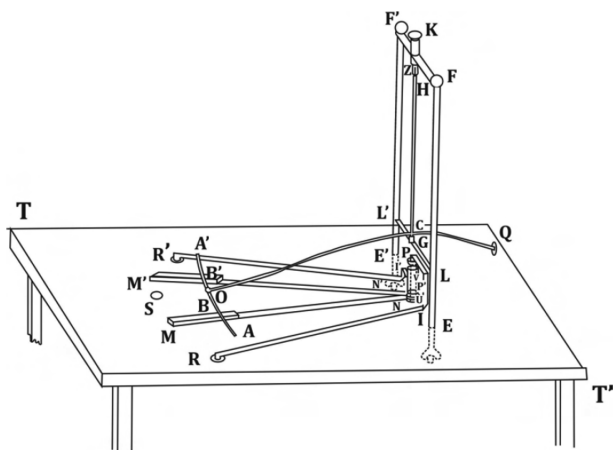


Figura 11 - Experimento 3 (o aparato na Ref. [2, p. 194-197]). *MA* e *M'B'* são recipientes com mercúrio sobre os quais o condutor *AA'* desliza. O circuito total é formado (Ref. [2, p. 196]): “1° Do arco *BB'* e dos condutores *MN* e *M'N'*; 2° De um circuito que se compõe das partes *RIP*, *P'I'R'* do aparelho, do condutor curvilíneo indo de *R'* a *S* e da própria pilha”.

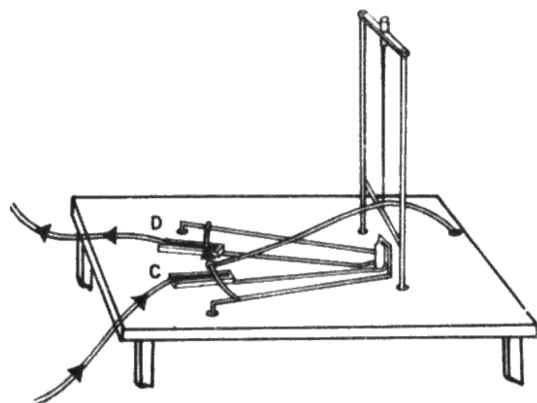


Figura 12 - Fig. 11 esquematizada (Ref. [7, p. 188]). O esquema clarifica detalhes da Fig. 11.

### 3.3.3. Diagrama de correntes, campos e forças

A Fig. 13 é um esquema do circuito. Nela estão indicados a corrente no circuito, os campos e as forças em *BB'*.

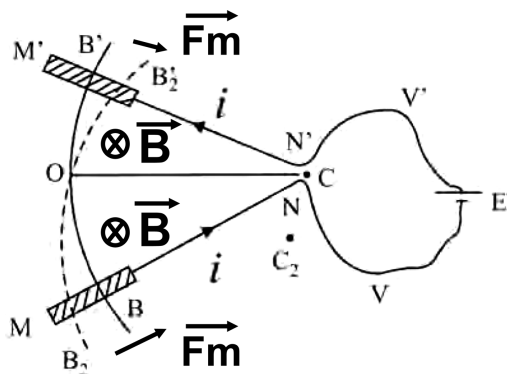


Figura 13 - Correntes, campos e forças. O diagrama [1] mostra a corrente, a direção de *B* e de *F*.

### 3.4. Quarto caso de equilíbrio

#### 3.4.1. Objetivo

Mostrar que (Ref. [12, p. 85]) “[a] força entre dois elementos de circuitos não é afetada, quando todas as dimensões lineares crescem proporcionalmente, mantendo inalterada a intensidade da corrente”. Significa que o sistema de círculos (Fig. 14) está em equilíbrio, se os círculos forem construídos na razão geométrica dos raios  $r_1 = r, r_2 = \lambda r, r_3 = \lambda^2 r$  e as distâncias estiverem na razão  $OO' = d, O'O'' = \lambda d$ .

#### 3.4.2. Descrição

O aparato é mostrado na Fig. 14 e na Fig. 15. As três espirais são similares, isto é, distâncias homólogas são proporcionais, de modo que seus raios estão na proporção  $1, \lambda, \lambda^2$ . A espiral central (*LMNPQ*) pode pivotar em torno do eixo *KRQ*. No experimento, é mostrado que a espiral central fica estacionária, quando as distâncias entre os centros *O''O'* e *O'O* estão na razão de similaridade

$$\frac{O''O'}{O'O} = \frac{\text{raio do círculo da esquerda}}{\text{raio do círculo do meio}} = \frac{\text{raio do círculo do meio}}{\text{raio do círculo da direita}} = \frac{1}{\lambda}$$

Significa que as forças de um lado e do outro da espiral central se cancelam (Fig. 16).

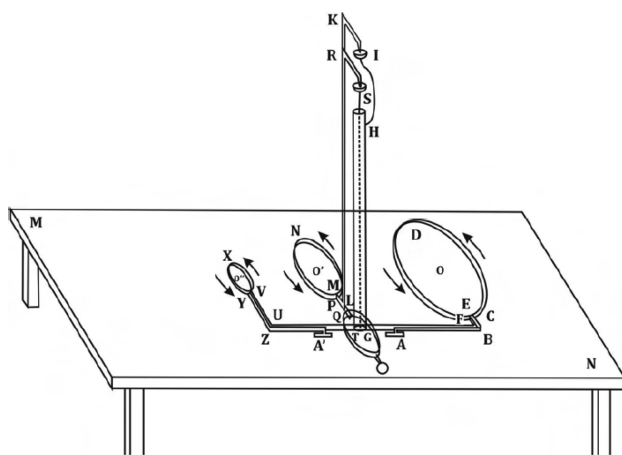


Figura 14 - Experimento 4 (Ref. [2, p. 197-199]). A primeira parte do circuito é *ABCDEFGHI*; a segunda parte, *IKLMNPQRS*, é móvel e pivota em torno de *GHS*; a terceira parte é *STUVXYEA'*; *A* e *A'* são, respectivamente, ligados aos pólos da pilha. As setas indicam o sentido da corrente no circuito. As espirais estão no plano da bancada. A espiral do meio, *MNP*, pode girar com o circuito móvel, as outras espirais, *CDE* e *VXY*, são fixas.

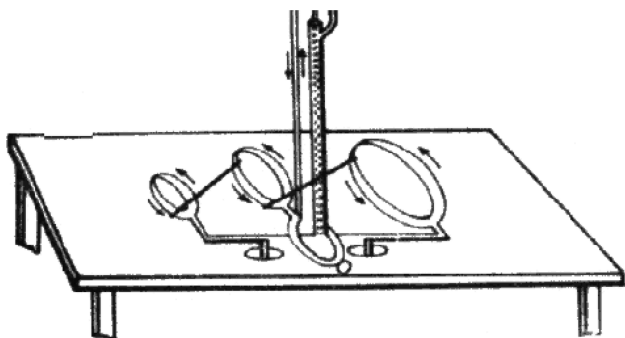


Figura 15 - Fig. 14 esquematizada (Ref. [7, p. 189]).

**3.4.3. Diagrama de correntes, campos e forças**

A Fig. 16 mostra as direções das correntes, forças e campos em cada espiral.

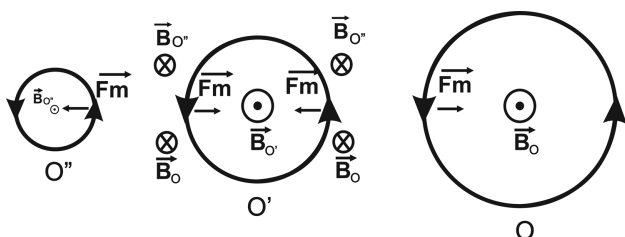


Figura 16 - Correntes, campos e forças nas espirais [1]. A convenção é a mesma da Fig. 6.

**4. A expressão matemática da nova lei**

Ampère (Ref. [12, p. 83]) “[proclama-se] um seguidor da escola que explica todos os fenômenos físicos em termos de forças iguais e diretamente opostas, entre pares de partículas”. Parece que o experimento 1 suporta essa consideração; o experimento 2 suporta a consideração de elementos infinitesimais (portanto lineares) de corrente. Posto isso, Ampère estabelece uma lei entre elementos de corrente.

**4.1. Determinação das variáveis envolvidas na lei**

Ampère inicia os cálculos, estabelecendo que a força é proporcional aos comprimentos dos elementos de circuito,  $ds$  e  $ds'$  (Fig. 1); indicando a força por  $d^2F$  (o que ele não fez)

$$d^2F \propto ds \times ds'$$

Ampère assim o justifica (Ref. [2, p. 199]):

Inicialmente, é evidente que a ação mútua de dois elementos de correntes elétricas é proporcional a seus comprimentos; pois, ao supô-los divididos em partes infinitesimalmente pequenas, iguais à sua medida comum, todas as atrações ou repulsões dessas partes, podendo ser consideradas como

sendo dirigidas segundo uma mesma reta, ajuntando-se necessariamente.

Segundo Edmund Whittaker, isso depende do experimento 2 (Ref. [12, p. 85]):

[Do experimento 2], vemos que o efeito de  $ds$  em  $ds'$  é a soma vetorial dos efeitos de  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  em  $ds'$ , em que essas são as três componentes de  $ds$ .

Depois, Ampère estabelece que a força é proporcional às correntes,  $i$  e  $i'$  (Fig. 1)

$$d^2F \propto i \times i'$$

e assim o justifica (Ref. [2, p.199]):

Esta mesma ação deve, ainda, ser proporcional às intensidades das duas correntes. Para exprimir, em números, a intensidade de uma corrente qualquer, concebe-se que se tenha escolhido uma outra corrente arbitrária como termo de comparação, que se tenha pego dois elementos iguais em cada uma dessas correntes, que se tenha procurado a razão entre as ações que elas exercem a uma mesma distância sobre um mesmo elemento de qualquer outra corrente, na situação em que ela [a corrente teste] lhes seja paralela [às outras duas] e na qual sua direção seja perpendicular às retas que ligam seu meio ao meio dos outros dois elementos. Essa razão será a medida de uma das intensidades, tomando a outra como unidade.

Então para elementos de corrente paralelos entre si

$$d^2F \propto i \times i' \times ds \times ds',$$

ou, nas palavras de Ampère, tacitamente invocando o experimento 3 (Ref. [2, p. 200]):

[...] suas ações mútuas [i.e., dos elementos de circuito], quando eles são perpendiculares à linha que liga seus meios, paralelos entre si e situados a uma unidade de distância, um do outro, será expressa por  $ii'dsds'$ ; que tomaremos com o sinal + quando as duas correntes, indo no mesmo sentido, se atraem, e com sinal -, no caso contrário.

Generalizando à situação de interação, em que os elementos de corrente não mais são paralelos (Ref. [2, p. 200]):

[...] [considerando] dois elementos colocados de uma maneira qualquer, sua ação mútua dependerá de seus comprimentos, das intensidades das correntes das quais eles fazem parte e de suas posições respectivas.

A posição respectiva dos elementos de circuito é determinada por (Ref. [2, p. 200]):

Essa posição pode-se determinar por meio do comprimento  $r$  da reta que liga os seus centros, dos ângulos  $\theta$  e  $\theta'$  que fazem, com um mesmo prolongamento desta reta, as direções de dois elementos tomados no sentido de suas correntes respectivas e, enfim, do ângulo  $\omega$  que fazem entre eles os planos traçados por cada uma destas direções e pela reta que liga o centro dos elementos.

ou seja, as grandezas definindo a posição dos elementos de circuito são mostradas na Fig. 17.

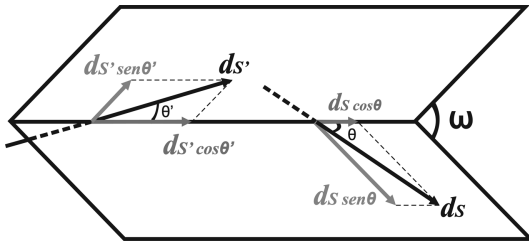


Figura 17 - Variáveis de direção. O vetor  $r$  liga os centros dos elementos de circuito e  $\hat{r}$  é o unitário em sua direção;  $ds$  e  $\hat{r}$  formam um plano e  $ds'$  e  $\hat{r}$ , outro plano; o ângulo entre os planos é  $\omega$ .

Então, introduzindo uma função, até aqui desconhecida, dos ângulos (Ref. [2, p. 201])

$$d^2F \propto \rho(\theta, \theta', \omega) \times (i \times i' \times ds \times ds').$$

Ampère introduz uma hipótese para a dependência em  $r$  (Ref. [2, p. 200-201]):

A consideração de diversas atrações ou repulsões observadas na natureza me levou a crer que a força, cuja expressão procuro, agia na razão inversa da distância; eu a suporei, para maior generalidade, na razão inversa da  $n$ -ésima potência dessa distância,  $n$  sendo uma constante a ser determinada.

Finalmente, a expressão mais geral da força é

$$d^2F = \rho(\theta, \theta', \omega) \frac{i \times i' \times ds \times ds'}{r^n}. \quad (4)$$

Ampère determina  $\rho$  (Eq. (9), abaixo) e mostra que  $n = 2$ .

#### 4.1.1. Valor de $\rho$ em uma situação simples

Se  $a'd'$  for transportado paralelo a si mesmo, ao longo de um círculo com centro no meio de  $ad$ , ocupando as posições  $a''d''$ ,  $a'''d'''$ , como na Fig. 18, continuará a ser  $\omega = 0$ ;  $\theta$  e  $\theta'$  são ou iguais ou suplementares. Assim, nessa situação, será  $\rho \equiv \phi(\theta, \theta')$  e

$$d^2F = \phi(\theta, \theta') \frac{i \times i' \times ds \times ds'}{r^n},$$

sendo  $ds \parallel ds'$  e situados em um mesmo plano. Quando  $a'd'$  tiver girado de  $90^\circ$ , chegando finalmente a  $a'''d'''$ , estará no prolongamento de  $ad$ ;  $\theta = \theta' = 0$  e nessa situação ( $\rho$  já independe das outras variáveis) será  $\rho = k = \text{constante}$  e

$$d^2F = k \frac{i \times i' \times ds \times ds'}{r^n} \quad (ds \text{ e } ds' \text{ na mesma linha}). \quad (5)$$

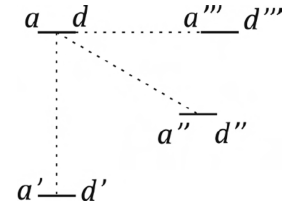


Figura 18 - Elementos de circuito paralelos. (Fig. 5 na Ref. [2])  $ad$  e  $a'd'$  são dois elementos de circuito perpendiculares a  $r$ ;  $\omega = 0$ ;  $\theta$  e  $\theta'$  são fixos e iguais a  $\pm \frac{\pi}{2}$ , dependendo do sentido das correntes.

## 4.2. Determinação das componentes dos elementos de circuitos que interagem entre si

### 4.2.1. Teorema: A influência mútua dos elementos de correntes é somente entre elementos paralelos

O teorema estabelece que componentes de correntes perpendiculares entre si não interagem, de modo que a influência mútua é, apenas, entre as componentes paralelas (Ref. [2, p. 202]):

[...] [uma] porção infinitamente pequena de corrente elétrica não exerce nenhuma ação sobre uma outra porção infinitamente pequena de uma corrente situada em um plano que passa por seu meio e que é perpendicular a sua direção.

Parafrazeando a demonstração: As duas metades do circuito perpendicular ao plano produzem, sobre o circuito no plano, ações iguais que se cancelam, pois, em uma metade do primeiro circuito, a corrente se aproxima do plano e, na outra, se afasta. Esta afirmativa pressupõe os experimentos 1 e 2; quando o circuito perpendicular ao plano tende para zero, as forças tendem a ser iguais e opostas, paralelas ao plano, e se cancelam.

### 4.2.2. A várias componentes dos elementos de circuitos

Vetores nos planos das correntes com  $\hat{r}$  podem ser escritos em termos dos eixos, de modo que

$$\begin{aligned} ds &= ds [\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\zeta}], \\ ds' &= ds' [\cos \theta' \hat{r} + \sin \theta' \hat{\zeta}']. \end{aligned}$$



Inspeção da figura mostra que  $\hat{\zeta} \cdot \hat{\zeta}' = \cos \omega$ . Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds}' &= ds ds' [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega] \\ &\equiv ds ds' \cos \epsilon, \end{aligned}$$

em que

$$\cos \epsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega. \quad (6)$$

As várias componentes dos elementos dos circuitos são (Fig. 19)

1. Componentes dos elementos dos circuitos na direção de  $\hat{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned} ds_r &\equiv \mathbf{ds} \cdot \hat{\mathbf{r}} = ds \cos \theta, \\ ds'_r &\equiv \mathbf{ds}' \cdot \hat{\mathbf{r}} = ds' \cos \theta'. \end{aligned}$$

2. Componentes dos elementos dos circuitos na direção perpendicular a  $\hat{\mathbf{r}}$

- (a) Em seus respectivos planos com  $\hat{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned} ds_\zeta &\equiv |\mathbf{ds} \times \hat{\mathbf{r}}| = ds \sin \theta, \\ ds'_\zeta &\equiv |\mathbf{ds}' \times \hat{\mathbf{r}}| = ds' \sin \theta'. \end{aligned}$$

- (b) Como os planos não são perpendiculares, essas componentes, quando respectivamente projetadas no plano ao qual não pertencem, produzem componentes perpendiculares a  $\hat{\mathbf{r}}$

no plano  $(\mathbf{ds}', \mathbf{r})$ :

$$ds_{\zeta'} \equiv \mathbf{ds} \cdot \hat{\zeta}' = ds \sin \theta \cos \omega.$$

no plano  $(\mathbf{ds}, \mathbf{r})$ :

$$ds'_\zeta \equiv \mathbf{ds}' \cdot \hat{\zeta} = ds' \sin \theta' \cos \omega.$$

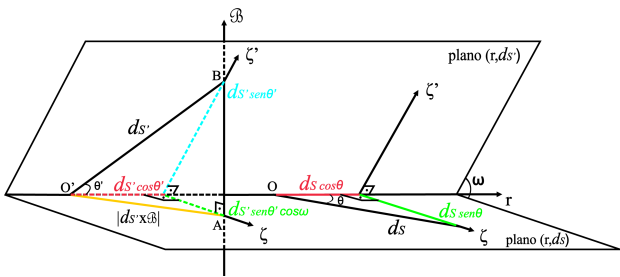


Figura 19 - Componentes dos elementos de circuito.  $\hat{\zeta}$  é o eixo perpendicular a  $\hat{\mathbf{r}}$ , no plano  $(\mathbf{ds}, \hat{\mathbf{r}})$ ;  $\hat{\zeta}'$  é o eixo perpendicular a  $\hat{\mathbf{r}}$  no plano  $(\mathbf{ds}', \hat{\mathbf{r}})$ ;  $\overline{AB} \parallel \mathbf{B}$ ;  $\overline{AB} \perp \text{plano}(\mathbf{ds}, \hat{\mathbf{r}})$ ;  $\overline{O'A} \perp \overline{AB}$ , pois  $\overline{O'A}$  pertence ao plano  $(\mathbf{ds}, \hat{\mathbf{r}})$ ; então  $\overline{AB} = \mathbf{ds}' \cdot \mathbf{B}$  e  $\overline{O'A} = |\mathbf{ds}' \times \mathbf{B}|$ . Os elementos de circuito estão em preto; as componentes que interagem entre si estão com a mesma cor (vermelho em um caso, verde em outro); outras projeções estão em azul e amarelo. Ângulos de  $90^\circ$  são indicados pelo sinal convencional (um quadrado dentro do qual há um ponto).

#### 4.2.3. As componentes dos elementos dos circuitos que interagem

São as componentes paralelas entre si (Ref. [2, p. 203])

1. Na direção  $\parallel \hat{\mathbf{r}}$

$$ds_r = ds \cos \theta, \quad \text{e} \quad ds'_r = ds' \cos \theta'. \quad (7)$$

2. Na direção  $\perp \hat{\mathbf{r}}$

São as componentes no plano  $(\mathbf{ds}', \mathbf{r})$

$$d_{\zeta'} s \equiv \mathbf{ds} \cdot \hat{\zeta}' = ds \sin \theta \cos \omega, \quad \text{e} \quad ds' \sin \theta'. \quad (8)$$

Ou alternativa e equiivalentemente, as componentes no plano  $(\mathbf{ds}, \mathbf{r})$

$$d_{\zeta} s' \equiv \mathbf{ds}' \cdot \hat{\zeta} = ds' \sin \theta' \cos \omega, \quad \text{e} \quad ds \sin \theta.$$

#### 4.3. A Força entre os circuitos

A interação é na direção perpendicular a ambos circuitos (experimento 3), que é  $\hat{\mathbf{r}}$ . Portanto a força é dada pelos dois conjuntos de Eqs. (7) e (8):

1. Força definida pelo conjunto (8) (Ref. [2, p. 203]):

$$d^2 F_{r_1} = \frac{ii' ds ds'}{r^n} \sin \theta \sin \theta' \cos \omega.$$

2. Força definida pelo conjunto (7) (Ref. [2, p. 204]):

$$d^2 F_{r_2} = k \frac{ii' ds ds'}{r^n} \cos \theta \cos \theta'.$$

A força total tem a direção  $\hat{\mathbf{r}}$  e o módulo é a soma  $d^2 F_{r_1} + d^2 F_{r_2}$  (Ref. [2, p. 204]):

$$d^2 F_r = \frac{ii' ds ds'}{r^n} (\sin \theta \sin \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta'). \quad (9)$$

#### 4.4. As componentes cartesianas da força

A expressão (9) já é a solução. Mas Ampère obtém as componentes cartesianas. Inicialmente, a Eq. (9) tem de ser posta em uma forma que permita escrever as variáveis em termos de suas componentes cartesianas; por exemplo, não é fácil obter  $\cos \omega$ .

Inicialmente, fazendo  $h = k - 1$  na Eq. (9) e notando que  $\cos \epsilon$  é definido na Eq. (6), Ampère re-escreve a Eq. (9) (Ref. [2, p. 204])

$$d^2 F_r = \frac{ii' ds ds'}{r^n} (\cos \epsilon + h \cos \theta \cos \theta'). \quad (10)$$

Após um longo cálculo (Ref. [2, p. 207-212]), apresentado nos apêndices A e B, a Eq. (10) é re-escrita (Ref. [2, p. 212])

$$d^2 F_r = ii' r^k \frac{d}{ds} (r^k \cos \theta') ds ds'. \quad (11)$$

A Eq. (11) envolve variáveis que podem ser escritas em termos das variáveis cartesianas. Os vetores  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{ds}$  podem ser escritos em termos de seus cossenos diretores

com  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{k}}, \quad (12)$$

$$d\mathbf{s}' = ds' \left( \cos \lambda' \hat{\mathbf{i}} + \cos \mu' \hat{\mathbf{j}} + \cos \nu' \hat{\mathbf{k}} \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{d\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{r}}}{ds'} \\ &= \frac{x}{r} \cos \lambda' + \frac{y}{r} \cos \mu' + \frac{z}{r} \cos \nu'. \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo as Eqs. (12), (13) e (14) na Eq. (11), a força em  $d\mathbf{s}'$  é (Ref. [2, p. 213])

$$\begin{aligned} d^2 F_r &= ii' r^k ds' d(r^k \cos \theta') \\ &= ii' r^k ds' r^k \times \\ &\quad d[r^{k-1} (x \cos \lambda' y \cos \mu' + z \cos \nu')]. \end{aligned} \quad (15)$$

É demonstrado (apêndice C) que a força (15) tem as componentes cartesianas (Ref. [2, p. 214])

$$dX = \frac{1}{2} ii' ds' (C \cos \mu' - B \cos \nu'), \quad (16)$$

$$dY = \frac{1}{2} ii' ds' (A \cos \nu' - C \cos \lambda'), \quad (17)$$

$$dZ = \frac{1}{2} ii' ds' (B \cos \lambda' - A \cos \mu'), \quad (18)$$

em que

$$A = \oint \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}} \equiv \oint \frac{[\mathbf{r} \times d\mathbf{s}]_{\text{componente } x}}{r^{n+1}}, \quad (19)$$

$$B = \oint \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \equiv \oint \frac{[\mathbf{r} \times d\mathbf{s}]_{\text{componente } y}}{r^{n+1}}, \quad (20)$$

$$C = \oint \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} \equiv \oint \frac{[\mathbf{r} \times d\mathbf{s}]_{\text{componente } z}}{r^{n+1}}. \quad (21)$$

Como  $ds' \cos \lambda' = d\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{i}}$ ,  $ds' \cos \mu' = d\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{j}}$  e  $ds' \cos \nu' = d\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{k}}$ , o leitor moderno reconhece que

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} ii' \oint [ds'_y C - ds'_z B] \\ &\equiv \frac{1}{2} ii' \oint \oint \frac{[d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} \times d\mathbf{s})]_{\text{componente } x}}{r^{n+1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2} ii' \oint [ds'_z A - ds'_x C] \\ &\equiv \frac{1}{2} ii' \oint \oint \frac{[d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} \times d\mathbf{s})]_{\text{componente } y}}{r^{n+1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} ii' \oint [ds'_x B - ds'_y A] \\ &\equiv \frac{1}{2} ii' \oint \oint \frac{[d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} \times d\mathbf{s})]_{\text{componente } z}}{r^{n+1}}. \end{aligned}$$

#### 4.5. A dependência da distância ( $n = 2$ )

Ampère demonstra que a força entre dois circuitos fechados, finitos, de áreas respectivamente  $\Lambda$  e  $\Lambda'$ , situados no mesmo plano, age ao longo da reta ligando os

centros e é igual a (p. 231)

$$\frac{n(n-1) ii' \Lambda \Lambda'}{2 r^{n+2}}.$$

A dedução é longa (da página 222 à página 231), cheia de resultados intermediários, e nada acrescentaria ao que já foi feito e basta citar sua interpretação (p. 231):

... pode-se obter a ação mútua de dois circuitos finitos, situados em um mesmo plano, considerando que suas áreas estejam divididas em elementos infinitamente pequenos, em todas as direções, e supondo que esses elementos ajam, um sobre o outro, segundo a reta que os liga, em razão direta das áreas e inversa da potência  $n + 2$  de sua distâncias.

A ação mútua das correntes fechadas não sendo função senão da distância, tira-se essa consequência importante, [a saber] que não pode resultar dessa ação um movimento de rotação contínuo.

A expressão acima (p. 231) “conduz à determinação do valor de  $n$ ”, segundo Ampère. Suponha que os circuitos sejam similares, de tal modo que distâncias lineares estejam na proporção  $\lambda$ . Então, as pequenas áreas similares estão na proporção  $\lambda^2$ , enquanto as distâncias entre elas, na proporção  $m$ . Então, as forças nos circuitos infinitesimais homólogos são

$$\frac{n(n-1) ii' \Lambda \Lambda'}{2 r^{n+2}}, \quad \text{e} \quad \frac{n(n-1) ii' \Lambda \Lambda'}{2 r^{n+2}} \frac{\lambda^4}{\lambda^{n+2}}.$$

Ora, pelo experimento 4, as forças são iguais, então

$$\frac{\lambda^4}{\lambda^{n+2}} = 1 \Rightarrow n + 2 - 4 = 0 \Rightarrow n = 2.$$

### 5. A direção da força após integração

Em notação vetorial, a força é

$$\mathcal{F} = \frac{ii'}{2} \oint d\mathbf{s}' \times \oint \frac{\hat{\mathbf{r}} \times d\mathbf{s}}{r^2}.$$

Com escolha apropriada de unidades,  $\mathcal{F}$  se torna  $\mathbf{F}$  (1).

Ampère não escreveu a expressão vetorial. Mas ele fez uma tentativa de achar a direção de  $\mathcal{F}$ . Ampère define a reta “diretriz” (Ref. [2, p. 215])

$$\mathcal{B} = A \hat{\mathbf{i}} + B \hat{\mathbf{j}} + C \hat{\mathbf{k}}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{B} = \oint \frac{\hat{\mathbf{r}} \times d\mathbf{s}}{r^2},$$

a menos de sinais e escolha apropriada de unidades, isso é a indução magnética (2).

A diretriz é perpendicular a  $d\mathcal{F}$ , o que se constata, multiplicando as Eqs. (16), (17) e (18) respectivamente por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e somando (Ref. [2, p. 215])

$$\mathcal{B} \cdot d\mathcal{F} = 0.$$

A força  $d\mathcal{F}$ , de componentes das Eqs. (16), (17) e (18), é, também, perpendicular a  $ds'$ . De modo que  $d\mathcal{F}$  está em um plano perpendicular a ambos,  $ds'$  e  $\mathcal{B}$ , o plano  $O'BA$  (Fig. 19); Ampère chama esse plano de plano diretor.

Finalmente,

$$\mathcal{F} = \frac{ii'}{2} \oint ds' \times \mathcal{B}.$$

## Apêndices

### A Cálculos intermediários para provar a Eq. (11)

Seja (Ref. [2, p. 206])

$$\begin{aligned} \text{coordenadas do centro de } \mathbf{ds} & x, y, z, \\ \text{coordenadas do centro de } \mathbf{ds}' & x', y', z'. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{ds} &= dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{ds}' &= dx' \hat{\mathbf{i}} + dy' \hat{\mathbf{j}} + dz' \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

A distância entre os centros é (Ref. [2, p. 206])

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

O vetor unitário nas direção dos centros é<sup>5</sup>

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{x - x'}{r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y - y'}{r} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z - z'}{r} \hat{\mathbf{k}}.$$

#### A1. Re-escrevendo a Eq. (6)

Os cossenos dos ângulos de  $\mathbf{ds}$  e  $\mathbf{ds}'$  com os eixos,  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}$  são, respectivamente,  $\mathbf{ds} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{dx}{ds}$ ,  $\mathbf{ds} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \frac{dy}{ds}$ ,  $\mathbf{ds} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{dz}{ds}$

e  $\mathbf{ds}' \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{dx'}{ds'}$ ,  $\mathbf{ds}' \cdot \hat{\mathbf{j}} = \frac{dy'}{ds'}$ ,  $\mathbf{ds}' \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{dz'}{ds'}$ . Então

$$\mathbf{ds} \cdot \mathbf{ds}' = ds ds' \left[ \frac{dx dx'}{ds ds'} + \frac{dy dy'}{ds ds'} + \frac{dz dz'}{ds ds'} \right];$$

por outro lado (Eq. (6))

$$\frac{\mathbf{ds}}{ds} \cdot \frac{\mathbf{ds}'}{ds'} \equiv \cos \epsilon = (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega).$$

Logo, a Eq. (6) pode ser escrita em termos dos cossenos diretores

$$\cos \epsilon = \frac{dx dx'}{ds ds'} + \frac{dy dy'}{ds ds'} + \frac{dz dz'}{ds ds'}. \quad (22)$$

<sup>5</sup>Essa definição difere da definição na Eq. (12); Ampère mudou a notação. Mas isso não altera o resultado, pois (11) envolve somente a distância escalar,  $r$ .

<sup>6</sup>As Eqs. (23) e (24) expressam o fato que  $r$  depende implicitamente das variáveis independentes  $s$  e  $s'$  e explicitamente das variáveis  $x, y, z, x', y'$  e  $z'$ ; a dependência funcional de  $r$  é  $r(x(s), y(s), z(s); x'(s'), y'(s'), z'(s'))$ . Portanto, as derivadas parciais de  $r$  em  $s$  e  $s'$  são obtidas derivando parcialmente  $r$ , respectivamente, em relação às variáveis,  $x, y, z$  e  $x', y', z'$  e cada uma dessas totalmente em relação a  $s$  ou  $s'$ . Para enfatizar que as derivadas em  $s$  e  $s'$  são totais, alguns autores introduzem um símbolo diferenciado sobre a notação de derivada parcial, por exemplo,  $\check{\partial}$ ; assim, deveria ser  $\cos \theta = \frac{\check{\partial} r}{\check{\partial} s}$  e  $\cos \theta' = \frac{\check{\partial} r}{\check{\partial} s'}$ . No tempo de Ampère, o símbolo  $\partial$  para derivadas parciais não era usado. Além disso, o preciosismo na notação em nada altera a Eq. (11), que se tornaria  $-ii' r^{1-n-k} \frac{\check{\partial}}{\check{\partial} s'} (r^k \cos \theta) ds ds' = -ii' r^{1-n-k} \frac{\check{\partial}}{\check{\partial} s'} \left( r^k \frac{\check{\partial} r}{\check{\partial} s} \right) ds ds'$ , na qual as derivadas são totais em relação às variáveis  $s$  e  $s'$ .

#### A2. Re-escrevendo a Eq. (22)

Pela definição de cosseno diretor,  $\cos \theta = \frac{dr}{ds}$  e  $\cos \theta' = -\frac{dr}{ds'}$ ; Ampère calcula essas derivadas para obter as Eqs. (23) e (24), abaixo.<sup>6</sup> Mas para o leitor moderno, é melhor proceder como se segue

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{ds} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{ds} \\ &= \frac{x - x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz}{ds} \\ &\equiv \frac{dr}{ds}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{\mathbf{ds}' \cdot \hat{\mathbf{r}}}{ds'} \\ &= \frac{x - x'}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy'}{ds'} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz'}{ds'} \\ &\equiv -\frac{dr}{ds'}. \end{aligned} \quad (24)$$

ou (Ref. [2, p. 206])

$$\begin{aligned} r \frac{dr}{ds} &= (x - x') \frac{dx}{ds} + (y - y') \frac{dy}{ds} + (z - z') \frac{dz}{ds}, \\ r \frac{dr}{ds'} &= -(x - x') \frac{dx'}{ds'} - (y - y') \frac{dy'}{ds'} - (z - z') \frac{dz'}{ds'}. \end{aligned}$$

Derivando  $r \frac{dr}{ds}$  em relação  $s'$  (Ref. [2, p. 207])

$$\begin{aligned} r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} &= \left( \frac{dx}{ds'} - \frac{dx'}{ds'} \right) \frac{dx}{ds} \\ &+ (x - x') \frac{d^2 x}{ds ds'} + \text{etc.} \end{aligned}$$

como as coordenadas cartesianas sem linha independem de  $s'$  e vice-versa, só sobra (Ref. [2, p. 207])

$$\begin{aligned} r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} &= -\frac{dx dx'}{ds ds'} - \frac{dy dy'}{ds ds'} - \frac{dz dz'}{ds ds'} \\ &\equiv -\cos \epsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

## B Demonstração da Eq. (11)

Substituindo a Eq. (25) na Eq. (10) e lembrando que  $h = k - 1$

$$\begin{aligned} d^2 F_r &= \frac{ii' ds ds'}{r^n} \left( -r \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - h \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ &= -\frac{ii' ds ds'}{r^n} \left( r \frac{d^2 r}{ds ds'} + k \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ &\equiv -\frac{ii' ds ds'}{r^n} \times \frac{1}{r^{k-1}} \times \frac{d \left( r^k \frac{dr}{ds} \right)}{ds'}, \end{aligned}$$

ou

$$d^2 F_r = -ii' r^{1-n-k} \frac{d \left( r^k \frac{dr}{ds} \right)}{ds'} ds ds'.$$

Lembrando que  $\cos \theta = \frac{dr}{ds}$ , obtém-se a força em  $\mathbf{ds}$  (Ref. [2, p. 207])

$$\begin{aligned} d^2 F_r &= -ii' r^{1-n-k} \frac{d \left( r^k \cos \theta \right)}{ds'} ds ds' \\ &= -ii' r^{1-n-k} d \left( r^k \cos \theta \right) ds; \end{aligned}$$

trocando  $s$  por  $s'$  e lembrando que  $-\cos \theta' = \frac{dr}{ds'}$ , a força no circuito  $ds'$  é (Ref. [2, p. 208])

$$ii' r^{1-n-k} \frac{d \left( r^k \cos \theta' \right)}{ds} ds ds' = ii' r^{1-n-k} d \left( r^k \cos \theta' \right) ds'.$$

Finalmente, a Eq. (11) é obtida, fazendo  $1 - n = 2k$  (Ref. [2, p. 212]):

a força em  $\mathbf{ds}$  é

$$\begin{aligned} d^2 F_r &= -ii' r^k \frac{d}{ds'} \left( r^k \cos \theta \right) ds ds' \\ &= -ii' r^k d \left( r^k \cos \theta \right) ds; \end{aligned}$$

a força em  $\mathbf{ds}'$  é

$$\begin{aligned} d^2 F_r &= ii' r^k \frac{d}{ds} \left( r^k \cos \theta' \right) ds ds' \\ &= ii' r^k d \left( r^k \cos \theta' \right) ds'. \end{aligned}$$

### B1. Demonstração de $1 - n - 2k = 0$

A força em cada um dos circuitos elementares é na direção  $\hat{\mathbf{f}}$  ligando seus meios; como  $\theta'$  é o ângulo entre  $\hat{\mathbf{f}}$  e  $\mathbf{ds}'$ , a componente da força ao longo de  $\mathbf{ds}'$  é (Ref. [2, p. 208])

$$d^2 F_{s'} = ii' r^{1-n-k} \frac{d \left( r^k \cos \theta' \right)}{ds} \cos \theta' ds ds'.$$

Multiplicando e dividindo por  $r^k$  e agrupando termos

$$\begin{aligned} d^2 F_{s'} &= ii' r^{1-n-2k} \left( r^k \cos \theta' \right) \frac{d \left( r^k \cos \theta' \right)}{ds} ds ds' \\ &\equiv ii' r^{1-n-2k} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( r^k \cos \theta' \right)^2 ds ds'. \end{aligned}$$

Desenvolvendo as derivadas (não apresentado por Ampère)

$$\begin{aligned} d^2 F_{s'} &= ii' r^{1-n-2k} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( r^k \cos \theta' \right)^2 ds ds' \\ &= \frac{ii'}{2} ds' ds \times \left\{ \frac{d}{ds} \left[ r^{1-n-2k} \left( r^k \cos \theta' \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left( r^k \cos \theta' \right)^2 \frac{d}{ds} \left( r^{1-n-2k} \right) \right\} \\ &= \frac{ii'}{2} ds' \left[ \frac{d}{ds} \left( r^{1-n} \cos^2 \theta' \right) \right. \\ &\quad \left. - r^{2k} \cos^2 \theta' (1 - n - 2k) r^{-n-2k} \frac{dr}{ds} \right]. \end{aligned}$$

Integrando em  $ds$ , sobre um circuito fechado, a força em um elemento  $ds'$  é (Ref. [2, p. 209])

$$\begin{aligned} dF_{s'} &= \frac{ii'}{2} ds' \times \left[ \left( r^{1-n} \cos^2 \theta' \right) \Big|_{s=0}^{s=0} \right. \\ &\quad \left. - \int r^{2k} \cos^2 \theta' (1 - n - 2k) r^{-n-2k} dr \right] \\ &= \frac{ii'}{2} ds' \times \left[ \left( r^{1-n} \cos^2 \theta' \right) \Big|_{s=0}^{s=0} \right. \\ &\quad \left. - (1 - n - 2k) \int \cos^2 \theta' r^{-n} dr \right]. \end{aligned}$$

Ampère invoca o experimento 3 (Ref. [2, p. 208]):

Examinemos, entretanto, o que resulta do terceiro caso de equilíbrio [...], o qual demonstra que a componente da ação de um circuito fechado qualquer sobre um elemento, segundo a direção desse elemento é sempre nula, qualquer que seja a forma do circuito.

Então,  $dF_{s'} = 0$ . O primeiro termo é obviamente igual a zero. Ampère produz um exemplo em que o segundo não é zero; logo, a única possibilidade é  $1 - n - 2k = 0$  e  $n = 1 - 2k$ .

Para produzir um exemplo em que o primeiro termo é diferente de zero, Ampère imagina esferas infinitesimalmente próximas, com centro no meio de  $ds'$ . Essas esferas cortam o circuito em pontos simétricos em relação ao centro de  $ds'$ , resultando em  $dr$ 's iguais mas de sinal oposto; quanto aos valores de  $\cos^2 \theta'$  (Ref. [2, p. 209]):

[...] os valores de  $\cos^2 \theta'$  podem ser diferentes e haverá uma infinidade de maneiras de fazê-lo [de escolher os raios das esferas] de modo que os quadrados de todos os cossenos relativos aos pontos situados de um mesmo lado entre os pontos extremos do circuito sejam menores que os relativos aos pontos correspondentes do outro lado;

## C Demonstração das Eqs. (16) a (21)

As contas serão feitas, somente, para a componente  $X$ ; as outras são uma generalização óbvia. Para obter  $X$ , é só multiplicar a força na Eq. (15) (que é na direção  $\hat{\mathbf{r}}$ ) por  $\frac{x}{r}$ , que é o cosseno diretor de  $\mathbf{r}$  na direção  $\hat{\mathbf{i}}$ ; então

$$d^2 X = ii' ds' r^{k-1} x \\ \times d [r^{k-1} (x \cos \lambda' + y \cos \mu' + z \cos \nu')].$$

Desenvolvendo os cálculos, lembrando que a derivada  $d$  não afeta as variáveis com linha

$$\begin{aligned} d^2 X &= ii' ds' \times \left[ x \cos \lambda' r^{k-1} d(r^{k-1} x) \right. \\ &+ \left. x \cos \mu' r^{k-1} d(r^{k-1} y) + x \cos \nu' r^{k-1} d(r^{k-1} z) \right] \\ &\equiv ii' ds' \times \left[ \cos \lambda' (r^{k-1} x) d(r^{k-1} x) \right. \\ &+ \frac{x}{y} \cos \mu' (r^{k-1} y) d(r^{k-1} y) \\ &+ \left. \frac{x}{z} \cos \nu' (r^{k-1} z) d(r^{k-1} z) \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} ii' ds' \times \left[ \cos \lambda' d(r^{2k-2} x^2) \right. \\ &+ \left. \frac{x}{y} \cos \mu' d(r^{2k-2} y^2) + \frac{x}{z} \cos \nu' d(r^{2k-2} z^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} ii' ds' \\ &\times \left\{ d [r^{2k-2} (x^2 \cos \lambda' + xy \cos \mu' + xz \cos \nu')] \right. \\ &- \left. r^{2k-2} \left[ y^2 \cos \mu' d\left(\frac{x}{y}\right) + z^2 \cos \nu' d\left(\frac{x}{z}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Como  $2k - 2 = -n - 1$ , segue-se que

$$\begin{aligned} d^2 X &= \frac{1}{2} ii' ds' \left[ d \left( \frac{x^2 \cos \lambda' + xy \cos \mu' + xz \cos \nu'}{r^{n+1}} \right) \right. \\ &- \left. \frac{y^2 \cos \mu'}{r^{n+1}} d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{z^2 \cos \nu'}{r^{n+1}} d\left(\frac{x}{z}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} ii' ds' d \left[ x \left( \frac{x \cos \lambda' + y \cos \mu' + z \cos \nu'}{r^{n+1}} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} ii' ds' \\ &\times \left[ \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} \cos \mu' + \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \cos \nu' \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} ii' ds' \times \left[ d \left( \frac{x \cos \theta'}{r^n} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} \cos \mu' + \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \cos \nu' \right], \end{aligned}$$

em que a Eq. 14 foi usada para escrever  $\cos \theta'$ . Integrando

$$dX = \frac{1}{2} ii' ds' \times \left\{ \left[ \frac{x \cos \theta'}{r^n} \right]_{\text{circuito fechado}} \right. \\ \left. + \cos \mu' \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} + \cos \nu' \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \right\}.$$

O primeiro termo é zero, pois a integral é de  $s = 0$  a  $s = 0$  (circuito fechado).

## Referências

- [1] João Paulo Martins de Castro Chaib, *Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, 2009.
- [2] André-Marie Ampère, in: *Réimpression du Mémoire Fondamental d'André-Marie Ampère Paru en 1827 dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, Année 1823* (Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1990).
- [3] André-Marie Ampère, *Annales de Chimie et de Physique*, **20**, 398, 419 (1822), disponível em [www.ampere.cnrs.fr](http://www.ampere.cnrs.fr).
- [4] John David Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1967), sexta impressão.
- [5] David Halliday & Robert Resnick & Kenneth Krane *Física 3* (LTC - Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2004), 4 vols.; vol. 3.
- [6] Paul A. Tipler, *Física (Para Cientistas e Engenheiros)* (LTC - Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2000), quarta edição, 2 vols., vol. 2.
- [7] José Goldemberg, *Física Geral e Experimental* (Editora Nacional, São Paulo, 1970), vol. 2.
- [8] Rom Harré, *The Philosophies of Science (An Introductory Survey)* (Oxford University Press, Oxford, 1972).
- [9] Murilo de F. Magalhães, Wilma M.S. Santos, Penha M.C. Dias, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **24**, 489 (2002).
- [10] Olivier Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein*, (Oxford University Press, Oxford, 2000).
- [11] M.P. Souza Filho, J.P.M.C. Chaib, J.J. Caluzi, A.K.T. Assis, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 605 (2007).
- [12] Edmund Whittaker, *A History of the Theories of Æther and Electricity*, (The Philosophical Library, New York, 1951), 2 vols.; v. 1.
- [13] André-Marie Ampère, *Annales de Chimie et de Physique*, **15**, 170 (1820), disponível em [www.ampere.cnrs.fr](http://www.ampere.cnrs.fr).