

Artigos Gerais

Os 100 anos do átomo de Bohr

(One hundred years of Bohr's atom)

F.A.G. Parente¹, A.C.F. dos Santos², A.C. Tort²

¹Colégio Pedro II, Unidade Humaitá, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

²Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Recebido em 7/2/2013; Aceito em 10/6/2013; Publicado em 15/10/2013

Há cem anos o físico dinamarquês Niels Bohr publicava um dos mais importantes trabalhos da física do século vinte. Nesse trabalho Bohr apresentava um modelo do átomo construído a partir de fatos experimentais e da hipótese de quantização de energia de Max Planck. Embora o modelo de Bohr e a sua extensão devida a Sommerfeld tenham sido suplantados pelas mecânicas quânticas de Heisenberg e Schrödinger, o modelo de Bohr, para muitos estudantes, ainda é a porta de entrada para o mundo fascinante da estrutura interna da matéria. Neste trabalho, revisamos alguns aspectos do modelo de Bohr e sua relevância pedagógica.

Palavras-chave: Niels Bohr, átomo de Bohr, mecânica quântica.

A hundred years ago the Danish physicist Niels Bohr published one of the most important papers of the 20th century physics. In that paper, Bohr introduced a model for a one-electron atom built on experimental facts and Planck's hypothesis of the quantization of energy. Although Bohr's model was replaced by the new quantum mechanics due to Heisenberg, Schrödinger, and other important physicists of that period, even today it is the usual entrance door to the fascinating world of the internal structure of the matter. We revise the main features of Bohr's model and discuss its pedagogical relevance.

Keywords: Niels Bohr, Bohr atom, quantum mechanics.

1. Introdução

Há cem anos o físico dinamarquês Niels Bohr publicava um dos mais importantes trabalhos da física do século 20, *On the Constitution of Atoms and Molecules* [1], no qual pela primeira vez um modelo do átomo construído a partir de fatos experimentais e da hipótese de quantização de energia de Max Planck era apresentado. Embora o modelo de Bohr e a sua extensão, que se deve principalmente a Sommerfeld, tenham sido suplantados pelas mecânicas quânticas de Heisenberg e Schrödinger, para muitos estudantes ele ainda é a porta de entrada para o mundo fascinante da estrutura interna da matéria. No presente trabalho revisamos alguns aspectos do modelo de Bohr e discutimos sua importância pedagógica. Nos dois apêndices que acompanham o texto principal, detalhes de cálculo sobre o tempo de vida de um átomo clássico e do uso do princípio da correspondência para completar um detalhe importante da abordagem de Bohr são apresentados.

²E-mail: tort@if.ufrj.br.

¹Lâminas de alumínio, ferro e chumbo também foram utilizadas.

2. O experimento de Rutherford, o modelo de Thomson e o problema da estabilidade

Entre 1909 e 1911, Ernest Rutherford e seus colaboradores, Ernest Marsden (1889-1970) e Hans Geiger (1882-1945), realizaram uma série de experimentos envolvendo o espalhamento de partículas α , núcleos de hélio formados por dois prótons e dois nêutrons ou He^{++} , por átomos de ouro, Au_{197}^{79} . Os átomos de ouro formavam uma lâmina¹ muito fina de $8,6 \times 10^{-6}$ cm sobre a qual eram disparadas as partículas α emitidas por uma fonte radioativa (átomos de polônio). As partículas espalhadas provocavam cintilações sobre uma tela coberta por sulfeto de zinco. As cintilações eram observadas por Marsden e Geiger com um microscópio. Todo o experimento era realizado na mais completa escuridão. A análise dos resultados experimentais publicados em 1911 [2] leva à conclusão de que o átomo é constituído por um núcleo duro de carga positiva e um imenso espaço quase vazio no qual os elétrons orbitam presos ao núcleo por forças eletromagnéticas. Os

grandes ângulos de espalhamento observados no experimento de Rutherford descartam o principal modelo atômico da época: o modelo de Thomson introduzido em 1904 [3], ver também em [4] uma descrição sucinta do modelo. Basicamente, o modelo de Thomson consistia em considerar o átomo como uma distribuição esférica uniforme hipotética de raio finito e carga positiva, contendo um grande número de elétrons negativos puntiformes embebidos nela. A esfera de carga positiva não oferece resistência ao movimento dos elétrons, tem uma massa muito pequena, e é inerte tanto do ponto de vista químico quanto do ponto de vista espectroscópico. A sua função é prover a força (elétrica) de atração e manter os elétrons confinados. Os elétrons formavam arranjos geométricos bidimensionais ou tridimensionais que podiam ser estáticos ou dinâmicos. A força eletrostática atrativa que a distribuição contínua exercia sobre os elétrons era equilibrada pela força repulsiva entre os mesmos no caso estático². No caso dinâmico, a diferença entre as forças repulsivas e a força atrativa fornecia a resultante. Se o átomo tivesse um único elétron este poderia localizar-se no centro geométrico da distribuição. No caso de dois elétrons, por exemplo, uma configuração dinamicamente estável é mostrada na Fig. 1. Resolvendo o problema de dois corpos para massas iguais pode-se mostrar que o raio de equilíbrio é dada por

$$r_{1,\text{eq.}} = \frac{a}{2} \left(1 - 4\pi\epsilon_0 \frac{m_e \omega^2 a}{2e^2} \right)^{-1/3}, \quad (1)$$

onde m_e é a massa do elétron, e é a sua carga, a é o raio da distribuição esférica. e ω é o módulo da velocidade angular de rotação em torno do centro de massa. Em um átomo com três elétrons, estes ocupavam os vértices de um triângulo retângulo e caso girassem em torno do centro de massa, o raio de equilíbrio era dado por

$$r_{1,\text{eq.}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \left(1 - 4\pi\epsilon_0 \frac{m_e \omega^2 a}{3e^2} \right)^{-1/3}. \quad (2)$$

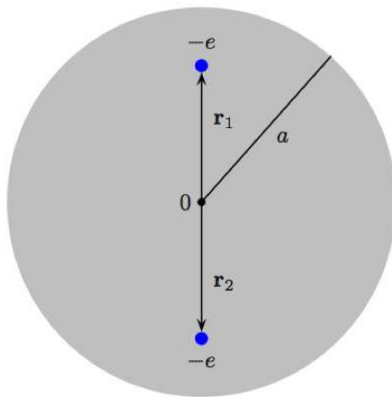


Figura 1 - O modelo do pudim de ameixas no caso de dois elétrons.

Na medida em que mais elétrons vão sendo incorporados ao átomo, o modelo de Thomson fica cada vez mais complexo e torna-se cada vez mais difícil obter as configurações de equilíbrio. Mesmo restringindo o problema ao caso em que os elétrons movem-se sobre um plano que contém o centro da esfera, dependendo da configuração geométrica dos elétrons, o modelo pode tornar-se mecanicamente instável. O modelo ficou conhecido como o *modelo do pudim de ameixas de Thomson*.

O modelo de Thomson tinha como principal rival o modelo planetário, ou saturniano, de Hantaro Nagaoka (1865-1950) que consistia em um núcleo maciço em torno do qual os elétrons descreviam órbitas. Nagaoka justificava seu modelo com o argumento de que cargas elétricas eram impenetráveis, em outras palavras: as ameixas não poderiam estar dentro do pudim. Em analogia com o problema da estabilidade dos anéis de Saturno, a estabilidade mecânica do modelo de Nagaoka era garantida por uma massa enorme atribuída ao núcleo [5].

Entretanto, ambos os modelos padeciam de um grave problema tão importante quanto o problema da estabilidade mecânica: a instabilidade eletromagnética. O eletromagnetismo clássico, por meio de um teorema que se deve ao físico irlandês Joseph Larmor (1857-1942), conhecido como teorema ou fórmula de Larmor, prevê que os arranjos de cargas positivas e negativas dos modelos dinâmicos de Nagaoka e Thomson e o sugerido pelo experimento de Rutherford são instáveis.

A fórmula de Larmor é um resultado importante da teoria eletromagnética clássica. A fórmula nos diz que uma partícula carregada e acelerada irradia uma certa quantidade de energia eletromagnética por unidade de tempo. Na aproximação não-relativística a fórmula se lê [6]

$$P(t) = -\frac{2}{3} \frac{q^2 a^2(t)}{4\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (3)$$

onde, $P(t)$ é a potência emitida pela partícula no instante t , q é a sua carga e $a(t)$, é o módulo da aceleração instantânea da partícula e a constante c é o módulo da velocidade da luz. Observe que a emissão de energia não depende do sinal da carga elétrica. É este resultado que está nos fundamentos da teoria das antenas e suas aplicações. A fórmula de Larmor pode ser obtida considerando os campos elétrico e magnético gerados pela partícula acelerada e calculando o fluxo do vetor de Poynting sobre uma esfera imaginária instantaneamente concêntrica com a partícula. O importante é que de acordo com a teoria eletromagnética clássica o mais simples dos átomos, o átomo de hidrogênio, não poderia existir! E mais ainda, a fórmula de Larmor permite estimar quanto tempo duraria um átomo de hidrogênio clássico. Vejamos como: suponha que o elétron gire em torno do núcleo positivo em uma órbita quase circular (na verdade, a órbita é uma curva espiralada) de tal

²Convém lembrar que configurações puramente eletrostáticas são instáveis (teorema de Earnshaw).

modo que ao completar uma revolução, o raio diminui de uma quantidade dr tal que $dr \ll r(t)$, onde $r(t)$ é o raio instantâneo da órbita. Calculando a taxa com a qual o elétron perde energia, e igualando-a ao resultado de Larmor após uma quadratura simples, obtemos uma expressão para o tempo de vida do átomo de hidrogênio. O resultado é

$$\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 c^3 m^2 r_0^3, \quad (4)$$

onde τ é o tempo de vida do átomo. Se considerarmos r_0 como o raio de Bohr, $0,53 \times 10^{-10}$ m, e levarmos em conta os valores das demais constantes, obteremos $\tau \approx 1,6 \times 10^{-11}$ s. Veja os detalhes do cálculo no Apêndice 1.

3. O átomo de Bohr de acordo com Bohr

A solução proposta por Bohr é ao mesmo tempo abrangente e radical. Abrangente porque diz respeito não somente ao átomo de hidrogênio em particular, mas também a átomos com mais de um elétron, e às moléculas. É uma proposta radical porque representa um rompimento com conceitos clássicos e a incorporação dos novos conceitos, que na época estavam solucionando problemas fundamentais como o problema da radiação do corpo negro, no qual a hipótese da discretização ou quantização das trocas de energia entre um sistema de osciladores em equilíbrio termodâmico com uma fonte de calor havia sido adotada por Max Planck (1858-1947). Os espectroscopistas, às voltas com espectros de absorção e emissão de radiação, davam fortes indícios de que as mudanças dos estados de energia dos átomos estavam relacionados com o comprimento de onda, ou à frequência, associados com as linhas espectrais. O trabalho fundamental de Bohr [1] tem três partes. É à primeira parte, a que se refere ao átomo de hidrogênio, e que para muitos estudantes é o primeiro contato com o átomo moderno da física quântica, que daremos atenção a seguir. As outras duas dizem respeito a átomos mais complexos e à estrutura das moléculas. Como observado em [7], o próprio título do trabalho nos mostra que a intenção do autor é apresentar uma teoria atômica que pudesse ser aplicada tanto aos problemas físicos como químicos.

A obtenção dos níveis de energia dos átomos hidrogenóides, que pode ser encontrada em muitos textos de física moderna, *e.g.*: Ref. [8], não é o modo como Bohr originalmente os obteve [1]. Há diferenças importantes em relação ao tratamento original, talvez a principal seja a questão da quantização do momento angular, que no trabalho original de Bohr de 1913 é uma consequência e não um postulado. A abordagem usual dos textos modernos provavelmente inspira-se em um trabalho posterior de Bohr de 1915 [10]. Uma exceção em

língua portuguesa no nível da física básica é a Ref. [9], e em um nível mais avançado a Ref. [14]. A abordagem que segue, exceto por pequenas modificações que dizem mais respeito à notação e à restrição às órbitas circulares, é a abordagem original de Bohr.

A abordagem de Bohr está fundamentada em dois postulados os quais, em tradução livre, afirmam o seguinte:

- (i) O equilíbrio dinâmico dos sistemas atômicos nos estados estacionários é governado pela leis da mecânica clássica, mas as transições entre os diferentes estados estacionários não podem ser tratadas desta maneira.
- (ii) As transições entre os diferentes estados estacionários são acompanhadas de emissão de radiação eletromagnética de frequência bem definida, para a qual a relação entre a frequência e a energia emitida é aquela dada pela teoria de Planck.

O primeiro postulado reflete a inadequação da teoria eletromagnética clássica, isto é, da fórmula de Larmor, na formulação de uma teoria atômica e o segundo a convicção de que a hipótese de Planck surgida em sua análise da radiação de corpo negro tem validade geral.

A energia mecânica total, energia cinética mais a energia potencial de um sistema constituído por um núcleo fixo de carga igual a Ze em torno do qual um elétron de carga $-e$ descreve uma órbita circular de raio r é dada por

$$E = E_k + E_p = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^{*2}}{2r}, \quad (5)$$

onde, por conveniência notacional, definimos

$$e^{*2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (6)$$

Se quisermos remover completamente o elétron do átomo hidrogenóide devemos fornecer-lhe uma energia (positiva) $W = -E$, ou

$$W = +\frac{Ze^{*2}}{2r}. \quad (7)$$

Esta quantidade de energia remove o elétron de uma distância inicial r do núcleo e o coloca em um ponto muito distante ($r \rightarrow \infty$), onde o elétron terá energia nula. Por outro lado, é fácil verificar que o valor dessa energia é numericamente igual à energia cinética do elétron em sua órbita original

$$W = +\frac{Ze^{*2}}{2r} = \frac{mv^2}{2}, \quad (8)$$

onde m é a massa do elétron. Isto também pode ser visto como consequência de uma forma particular do Teorema Virial que nos diz que se um corpo está submetido a uma força que pode ser obtida a partir de

um potencial central que varia com r^p onde p é um inteiro, e se sua órbita for periódica, então o valor médio no tempo da energia cinética $\langle E_k \rangle$ e o valor médio no tempo da energia potencial $\langle E_p \rangle$ se relacionam por meio de [11]

$$\langle E_k \rangle = \frac{p+1}{2} \langle E_p \rangle. \quad (9)$$

No caso da força de Coulomb, $p = -2$, e logo

$$\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle. \quad (10)$$

No caso de órbitas circulares de período τ , por exemplo

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} E_p dt = E_p = \frac{Ze^{*2}}{r}. \quad (11)$$

Segue imediatamente o resultado da Eq. (8). Se a órbita for circular de período τ , então o módulo da velocidade tangencial v_θ do elétron e o raio r se relacionam por

$$v_\theta = \frac{2\pi r}{\tau} = 2\pi r f, \quad (12)$$

onde $f = 1/\tau$ é a frequência de revolução do elétron. Segue que

$$W = \frac{1}{2} m(2\pi r f)^2 = 2\pi^2 m r^2 f^2. \quad (13)$$

Convém eliminar r . Da energia potencial, Eq. (11), podemos escrever

$$r = \frac{Ze^{*2}}{2W}, \quad (14)$$

e substituir na expressão para W

$$W = 2\pi^2 m \frac{z^2 e^{*4}}{4W^2} f^2. \quad (15)$$

Resolvendo para f

$$f = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{m}} \frac{W^{3/2}}{Ze^{*2}}. \quad (16)$$

Até este ponto a abordagem é clássica. Bohr estava perfeitamente ciente de que um átomo clássico não seria estável do ponto de vista eletrodinâmico, e aposta na hipótese de quantização de Planck na formulação de 1912. Planck resolvera o problema da radiação do corpo negro que quando tratada com métodos clássicos levava à “catástrofe ultravioleta”. Tratando os átomos das paredes de uma cavidade como uma coleção de osciladores harmônicos simples, cada um deles com energia quantizada dada por $\epsilon = nh\nu$, onde n é um inteiro positivo e ν é a frequência linear de oscilação do oscilador, Planck demonstrara que a energia eletromagnética contida na cavidade tinha relação com a frequência mecânica, como muitos físicos da época acreditavam,

e era emitida em “pacotes” ou *quanta* de “tamanho” finito $nh\nu$. A introdução do método de Planck poderia levar à uma solução eletrodinamicamente estável para a constituição dos átomos. Por outro lado, Bohr sabia que o espectro de emissão dos átomos era discreto e conhecia a fórmula empírica de Balmer para as linhas de emissão no visível do átomo de hidrogênio [13]

$$\lambda = A \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right) \quad n = 3, 4, \dots, \quad (17)$$

onde $A = 3647 \times 10^{-10}$ m. Uma forma mais familiar desta fórmula para a frequência da luz emitida é

$$\nu = cR_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, \dots, \quad (18)$$

onde c é o módulo da velocidade da luz e R_H é a constante empírica de Rydberg. Bohr percebeu imediatamente que o resultado de Balmer poderia ser interpretado como proporcional a uma diferença de energias.

Para quantizar W , Bohr supõe que o átomo emite energia como os osciladores de Planck, isto é, em quantidades discretas $nh\nu$. A seguir, Bohr considera um elétron inicialmente a uma grande distância do núcleo e praticamente em repouso em relação a este. O elétron então faz uma transição para uma órbita estacionária em torno do núcleo. Bohr então supõe que no processo de transição para uma órbita estável, há emissão de radiação de frequência ν . A frequência da radiação emitida não é necessariamente igual à frequência linear da revolução do elétron em torno do núcleo, mas entre as duas deve haver uma relação. Bohr então supõe que esta relação é dada por

$$\nu = \frac{f}{2}. \quad (19)$$

No artigo de 1913, a justificativa da relação entre a frequência de emissão e a frequência mecânica do elétron é uma das primeiras aplicações do *princípio da correspondência*, veja o Apêndice 2. Portanto,

$$W = \frac{nhf}{2}. \quad (20)$$

Resolvendo essa equação para f e substituindo o resultado na Eq. (16), obtemos

$$W_n = 2\pi^2 \frac{Z^2 m e^{*4}}{n^2 h^2}. \quad (21)$$

Da Eq. (14) vemos que os raios das órbitas permitidas são dadas por

$$r_n = \frac{Z e^{*2}}{2W_n} = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m Z e^{*2}} \quad (22)$$

O raio de Bohr corresponde a $n = 1$ e $Z = 1$:

$$r_1 = a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^{*2}}. \quad (23)$$

Em termos do raio de Bohr

$$r_n = n^2 \frac{a_0}{Z}. \quad (24)$$

O espectro de emissão (ou absorção) é dado pela relação

$$h\nu = |W_{nf} - W_{ni}| \quad (25)$$

ou seja

$$\nu = 2\pi^2 \frac{Z^2 m e^* 4}{h^3} \left| \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right| = c R_\infty \left| \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right|, \quad (26)$$

onde

$$R_\infty = 2\pi^2 \frac{Z^2 m e^* 4}{c h^3}, \quad (27)$$

é a constante de Rydberg. Este é um dos resultados que mais impressionaram os físicos da época, pois pela primeira vez a constante de Rydberg era expressa em termos dos parâmetros de um modelo atômico e o valor teórico era muito próximo do valor empírico.

Por último, temos a *quantização do momento angular*. Lembrando que classicamente: $L = mv_\theta r$, temos

$$mv_\theta = \frac{1}{2} \frac{mv_\theta^2}{\pi} \frac{2\pi r}{v} = \frac{W}{\pi} \tau = \frac{W}{\pi} \frac{1}{f}, \quad (28)$$

mas, quanticamente, $W = (1/2) nhf$, logo

$$\frac{W}{\pi} \frac{1}{f} = \frac{1}{2} \frac{nhf}{\pi} \times \frac{1}{f} = n \left(\frac{h}{2\pi} \right), \quad (29)$$

ou, finalmente,

$$L = n \left(\frac{h}{2\pi} \right). \quad (30)$$

Vemos que, pelo menos no que diz respeito à quantização do momento angular, a abordagem original de Bohr é apresentada de modo inverso.

4. O princípio da correspondência

O princípio da correspondência exerce um importante papel na formulação inicial da mecânica quântica, também chamada antiga teoria quântica. Embora tenha sido formalmente enunciado por Bohr em 1920, o princípio da correspondência foi empregado por ele no trabalho de 1913 para determinar a relação correta entre a frequência mecânica da rotação do elétron em torno do núcleo, f , e a frequência da radiação eletromagnética emitida, ν [1]. Nas palavras de Bohr

Se n for grande, a razão entre a frequência [orbital] antes e depois da emissão estará muito próxima de 1, e de acordo com a eletrodinâmica ordinária, devemos esperar que a razão entre a frequência de radiação e a frequência de revolução também seja aproximadamente 1.

A versão dos livros-texto de física moderna em que se afirma que no limite de grandes valores para os números quânticos a física quântica deve reproduzir a física clássica pode levar a inconsistências, veja, por exemplo, a Ref. [12].

No caso do átomo de hidrogênio isto significa níveis de energia com número quântico n muito grande e muito próximos uns dos outros, isto é, um quase contínuo de estados. Significa também que a frequência de emissão deve ser igual à frequência mecânica. Para obter a relação correta entre a frequência de emissão ou absorção e a frequência mecânica do elétron, Bohr supõe que a energia de ligação W é quantizada, como sugerem as fórmulas espectroscópicas empíricas de Balmer e Rydberg. A seguir, aplicando o princípio da correspondência, Bohr consegue demonstrar que a relação entre as duas frequências envolvidas no problema é $\nu = f/2$, que, como vimos, é a relação utilizada para obter os resultados que levam às fórmulas corretas para a energia de ligação e para as frequências de emissão ou absorção. No Apêndice 2, o leitor encontrará uma dedução deste resultado originalmente apresentada na Ref. [14].

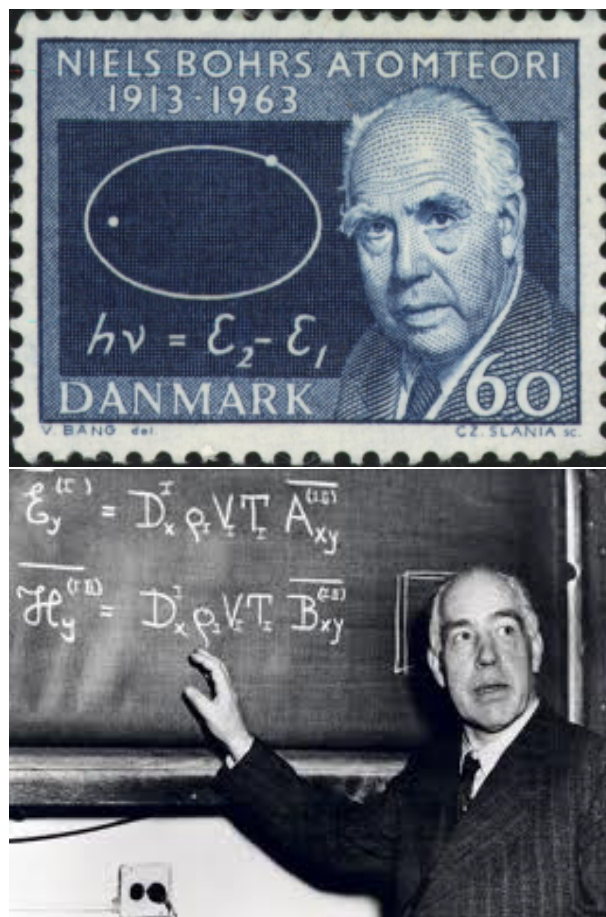


Figura 2 - Niels Bohr. Selo comemorativo dos 50 anos da teoria atômica de Bohr. Observe que a trajetória do elétron em torno do núcleo é elíptica (ilustração e foto Wikipedia).

5. Crítica do modelo de Bohr

O modelo de Bohr foi estendido pelo grande físico teórico alemão Arnold Anton Sommerfeld (1868-1951), que postulou uma regra de quantização que hoje conhecemos por *regra de quantização de Wilson-Sommerfeld*. O modelo de Bohr e sua extensão conseguem explicar com sucesso, entre outros fatos experimentais [13]:

- os níveis atômicos e as frequências de emissão e absorção dos átomos hidrogenóides (e átomos mais pesados que se comportam essencialmente como átomos de um único elétron);
- o efeito Stark (o desdobramento dos níveis de energia em campo elétrico externo);
- o efeito Zeeman normal (desdobramento dos níveis de energia em campo magnético externo);
- o espectro de raios-X.

Embora o modelo de Bohr tenha sido um passo importantíssimo em direção ao modelo correto da estrutura dos átomos, ele não é a resposta final. De fato, o modelo apresenta falhas importantes, por exemplo: não é capaz de explicar o efeito Zeeman anômalo (que envolve o spin do elétron) e o espectro do átomo de hélio (ortoélio e paraélio). O modelo de Bohr tem dificuldades em explicar os espectros de átomos mais complexos, embora passar prever algumas linhas se complementado com regras empíricas adicionais. Do ponto de vista teórico é um híbrido entre a física clássica e a quântica, para muitos um híbrido insatisfatório. O átomo de Bohr vigora no período de 1913 a 1925. Por volta de 1925, e mesmo antes [13], o átomo de Bohr é deixado de lado em favor da nova mecânica quântica de Heisenberg e Schroedinger.

6. Observações finais

Há cem anos o físico dinamarquês Niels Bohr publicava um dos mais importantes trabalhos da física do século 20, no qual apresentava um modelo do átomo construído a partir dos fatos experimentais e da hipótese de quantização de energia de Max Planck. Esse modelo representa uma ruptura com o mundo clássico. Embora o modelo de Bohr e a sua extensão devida a Sommerfeld tenham sido suplantadas pelas mecânicas quânticas de Heisenberg e Schrödinger, o modelo de Bohr, para muitos estudantes ainda é a porta de entrada para o mundo fascinante da estrutura da matéria e como tal merece que lhe dediquemos um espaço importante no ensino da física que se convencionou chamar de moderna, embora seus primórdios datem de mais de cem anos. É no modelo de Bohr que pela primeira vez a física abre mão de descrever detalhadamente um processo físico ao postular os saltos quânticos entre os níveis de energia.

Independentemente do seu valor histórico e epistemológico, o modelo de Bohr pode significar para os alunos do ensino médio e universitário a porta de entrada ao misterioso e fascinante mundo quântico [15, 16]. O modelo de Bohr permite também, sem que haja necessidade de cálculos muito complexos, que se discuta em sala de aula as ordens de magnitude que podemos esperar quando tratamos com sistemas atômicos menos familiares, como o hidrogênio muônico em que trocamos o elétron por um múon, ou o muonium em que trocamos o próton por um antimúon. Podemos também discutir átomos gigantes com número quântico principal muito grande, os átomos de Rydberg, exemplificando-os com o átomo de hidrogênio.

Niels Bohr é um dos gigantes da física do século 20 (ver Fig. 2), e o leitor interessado em conhecer com mais profundidade suas contribuições para o desenvolvimento da física moderna, encontrará na sua biografia científica escrita por A. Pais [17] amplo material sobre ele e seu tempo.

Apêndice 1: o tempo de vida de um átomo de hidrogênio clássico

Aqui seguimos a Ref. [18] Em um dado instante de tempo t , a energia mecânica do sistema $E(t)$ se escreve

$$E(t) = \frac{mv^2(t)}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r(t)}. \quad (31)$$

A força centrípeta é fornecida pela lei de Coulomb para a interação entre cargas puntiformes

$$\frac{mv^2(t)}{r(t)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2(t)}. \quad (32)$$

Eliminando a energia cinética temos

$$E(t) = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r(t)}. \quad (33)$$

Agora podemos calcular a taxa com a qual o elétron perde energia e igualá-la ao resultado de Larmor. Com este fim calculamos dE/dt

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{r(t)} \right] = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2(t)} \frac{dr(t)}{dt}. \quad (34)$$

Por outro lado, a aceleração centrípeta se escreve

$$a(t) = \frac{mv^2(t)}{r(t)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2(t)}. \quad (35)$$

Segue que

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2(t)} \frac{dr(t)}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2(t)} \right]^2, \quad (36)$$

onde igualamos o nosso resultado para dE/dt ao resultado previsto pelo teorema de Larmor. Simplificando,

obtemos a equação diferencial de primeira ordem para $r(t)$

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{1}{m^2 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^2(t)}, \quad (37)$$

que pode ser facilmente integrada

$$\int_{r_0}^0 dr r^2 = -\frac{4}{3} \frac{1}{m^2 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_0^\tau dt, \quad (38)$$

ou ainda

$$\frac{r_0^3}{3} = \frac{4}{3} \frac{1}{m^2 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \tau. \quad (39)$$

Deste resultado segue a Eq. (4).

Apêndice 2: o princípio da correspondência e a relação entre a frequência mecânica e a frequência de emissão

Vejamos como Bohr fez uso deste princípio e do conhecimento das fórmulas empíricas de Balmer e Rydberg para obter a relação correta entre ν e f . A abordagem a seguir é a da Ref. [14].

Comecemos supondo que a energia de ligação seja quantizada e que possa ser escrita na forma

$$W \rightarrow W_n = hfg(n), \quad (40)$$

onde $g(n)$ é uma função de números inteiros a ser determinada. Mantenha sempre em mente que f é a frequência de rotação do elétron em torno do núcleo e que ela não é necessariamente igual à frequência da radiação emitida pelo átomo. Como a energia de ligação é quantizada segue que

$$f \rightarrow f_n = \frac{W_n}{h} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{m}} \frac{W_n^{3/2}}{Ze^{*2}}, \quad (41)$$

onde fizemos uso da Eq. (16). Elevando ao quadrado, simplificando e resolvendo para W_n , obtemos

$$W_n = \frac{\pi^2 m Z^2 e^{*4}}{2h^2 g^2(n)}. \quad (42)$$

Segue imediatamente que

$$f_n = \frac{\pi^2 m Z^2 e^{*4}}{2h^3 g^3(n)}. \quad (43)$$

De acordo com o postulado (ii), a frequência da radiação eletromagnética emitida (ou absorvida) é dada por

$$\nu \rightarrow \nu_{\ell n} = \frac{|W_\ell - W_n|}{h} = \frac{\pi^2 m Z^2 e^{*4}}{2h^2 g^2(n)} \left| \frac{1}{g^2(\ell)} - \frac{1}{g^2(n)} \right|. \quad (44)$$

Consideremos agora a fórmula empírica de Rydberg para o hidrogênio, $Z = 1$

$$\nu_{\ell n} = cR_H \left| \frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{n^2} \right|, \quad (45)$$

onde R_H é a constante empírica de Rydberg. A Eq. (45) implica que $g(n) = bn$, onde b é uma constante a ser determinada. Portanto

$$W_n = \frac{\pi^2 m Z^2 e^{*4}}{2h^2 b^2 n^2}, \quad (46)$$

e também

$$f_n = \frac{\pi^2 m Z^2 e^{*4}}{2h^3 b^3 n^3}. \quad (47)$$

A frequência de emissão ou absorção é dada por

$$\nu \rightarrow \nu_{\ell n} = \frac{|W_\ell - W_n|}{h} = \frac{\pi^2 m Z^2 e^{*4}}{2h^2 b^2} \left| \frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{n^2} \right| = \frac{\pi^2 m Z^2 e^{*4}}{2h^2 b^2 n^2} \left| \frac{n^2}{\ell^2} - 1 \right|.$$

Agora suponha que $n = \ell + 1$ e que $n \gg 1$, e portanto $\ell \gg 1$ também. No limite em que $n \approx \ell \gg 1$ temos

$$\frac{n^2}{\ell^2} = \left(1 + \frac{1}{\ell} \right)^2 = 1 + \frac{2}{\ell} + \frac{1}{\ell^2} \approx 1 + \frac{2}{\ell}, \quad (48)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{\ell n} = \frac{\pi^2 m e^{*4}}{h^3 b^2 n^3}. \quad (49)$$

Como no limite clássico, a frequência de emissão ou absorção deve ser igual à frequência mecânica de rotação do elétron em torno do núcleo, isto é: $\nu_{\ell n} = f_n$, segue que

$$\frac{\pi^2 m e^{*4}}{h^3 b^2 n^3} = \frac{\pi^2 m e^{*4}}{2h^3 b^3 n^3}. \quad (50)$$

Portanto, $b = 1/2$, que é o valor que utilizamos na obtenção da Eq. (20). Como mencionado anteriormente, este é um dos primeiros exemplos de aplicação do princípio da correspondência [13]. Aqui, sua aplicação permite a obtenção da relação correta entre a frequência de emissão ou absorção e a frequência mecânica do elétron.

Agradecimentos

Os autores agradecem a M.V. Cougo Pinto pela leitura crítica do manuscrito original. Agradecem também aos árbitros pelas sugestões pertinentes.

Referências

- [1] N. Bohr, *Philos. Mag.* **26**, 1 (1913); N. Bohr, *Philos. Mag.* **26**, 476 (1913); N. Bohr, *Philos. Mag.* **26**, 857 (1913). Veja também a versão em português que reúne os três artigos: N. Bohr *Sobre A Constituição de Átomos e Moléculas* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1969).
- [2] E. Rutherford, *Philos. Mag.* **21**, 669 (1911).
- [3] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine (Series 6)* **7**, 237 (1904). Ver também: J.J. Thomson *Electricity and Matter* (Constable and Co., Londres, 1904); J.J. Thomson *Corpuscular Theory of Matter* (Constable and Co., Londres, 1907).
- [4] F.L. Friedman and L. Sartori, *The Classical Atom* (Addison-Wesley, Reading, 1965).
- [5] H. Nagaoka, *Philosophical Magazine (Series 6)* **7**, 44 (1904).
- [6] D.J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics* (Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1989), 2nd ed.
- [7] H. Kragh, *Phys. Today* **66**, 36 (2013).
- [8] R.M. Eisberg, *Fundamentals of Modern Physics* (John Wiley, New York, 1961); ver também R.M. Eisberg e R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles* (John Wiley, New York, 1985); A. Beiser, *Concepts of Modern Physics* (McGraw-Hill, New York, 1995) 5th ed.; P.A. Tipler e R.A. Llewellyn, *Física Moderna* (LTC, Rio de Janeiro, 2001), 3ª ed.
- [9] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica, vol. 4* (Edgard Blücher, São Paulo, 1998).
- [10] N. Bohr, *Philos. Mag.* **30**, 394 (1915).
- [11] H. Goldstein, C. Poole and J. Saffo, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 2002), 3rd ed.
- [12] R.L. Liboff, *Phys. Today* **37**, 50 (1984).
- [13] H. Kragh, *Niels Bohr and the Quantum Atom* (OUP, Oxford, 2012).
- [14] F. Caruso e V. Oguri *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos* (Elsevier, Rio de Janeiro, 2006); para uma abordagem ao átomo de Bohr como um oscilador harmônico veja também F. Caruso e V. Oguri *Bohr's atomic model revisited* arXiv: 0806.0652v1 [physics.hist-ph], 3/6/2008.
- [15] B.L. Haendler, *J. Chem. Edu.* **5**, 372 (1982).
- [16] A.B. Arnolds, *Teaching Introductory Physics* (Wiley New York, 1997).
- [17] A. Pais, *Niels Bohr's Times* (Clarendon Press, Oxford, 1991).
- [18] S.B. Cahn and B.E. Nadgorny *A Guide to Physics Problems - Part 1* (Plenum Press, New York, 1994).

Errata

(a) Nas Eqs. (1) e (2) falta o expoente '3' no raio a do átomo de Thomson. As Eqs. (1) e (2) corrigidas se escrevem

$$r_{1\text{eq.}} = \frac{a}{2} \left(1 - 4\pi\epsilon_0 \frac{m_e\omega^2 a^3}{2e^2} \right)^{-1/3}, \quad (51)$$

e

$$r_{1\text{eq.}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \left(1 - 4\pi\epsilon_0 \frac{m_e\omega^2 a^3}{3e^2} \right)^{-1/3}, \quad (52)$$

(b) No texto entre as Eqs. (1) e (2) onde está escrito *triângulo retângulo* leia-se *triângulo equilátero*.

Os autores agradecem aos colegas Renato Brito e Fernando Lang da Silveira que chamaram nossa atenção para estas incorreções.