

Modelo numérico-computacional para a análise modal e transiente de *shear building* utilizando o programa Scilab

Numerical-computational model for modal and transient analysis of shear building using the Scilab program

Luiz Antonio Farani de Souza^{*1,2}

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, PR, Brasil.

²Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Maringá, PR, Brasil.

Recebido em 17 de janeiro de 2024. Revisado em 16 de abril de 2024. Aceito em 24 de maio de 2024.

A vibração está em toda parte em nossa vida cotidiana. Nos dias atuais, com o avanço de métodos computacionais e da ciência dos materiais, estruturas civis estão cada vez mais flexíveis e esbeltas. Uma elevada flexibilidade estrutural leva a grandes amplitudes de vibração que podem ser transmitidas às pessoas nos edifícios, causando desconforto, perda de eficiência no trabalho devido ao cansaço e até graves alterações de saúde. Nesse contexto, uma abordagem numérico-computacional é apresentada para a análise modal e transiente de estruturas do tipo *shear building* utilizando o programa livre Scilab. O efeito do amortecimento na estrutura é descrito pelo modelo de amortecimento de Rayleigh. Um estudo com o sistema de controle passivo AMS instalado no topo da estrutura é apresentado. O AMS é um sistema massa – mola que serve para reduzir a amplitude de vibração do sistema estrutural principal. A abordagem numérica apresentada vem a auxiliar os estudantes de física e das engenharias no que concerne à análise de vibração de sistemas estruturais. A metodologia descrita para análise dinâmica é relativamente de fácil implementação computacional e os resultados numéricos tiveram boa precisão e ficaram de acordo com os resultados disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Método de Jacobi, AMS, amortecimento, análise dinâmica linear, *shear building*.

Vibration is everywhere in our everyday lives. Nowadays, with the advancement of computational methods and materials science, civil structures are increasingly flexible and slender. High structural flexibility leads to large vibration amplitudes that can be transmitted to people in buildings, causing discomfort, loss of work efficiency due to fatigue and even serious health changes. In this context, a numerical-computational approach is presented for the modal and transient analysis of Shear Building-type structures using the open-source program Scilab. The effect of damping on the structure is described by the Rayleigh damping model. A study with the TMD passive control system installed on top of the structure is presented. The TMD is a mass-spring system that serves to reduce the vibration amplitude of the main structural system. The numerical approach presented helps physics, and engineering students regarding vibration analysis of structural systems. The methodology described for dynamic analysis is relatively easy to implement computationally and the numerical results had good precision and agreed with the results available in the literature.

Keywords: Jacobi method, TMD, damping, linear dynamic analysis, shear building.

1. Introdução

Com o crescente progresso de técnicas de análise e dimensionamento estrutural e o surgimento de novos materiais, estruturas cada vez mais esbeltas e flexíveis estão sendo projetadas e construídas. Essas estruturas tornam-se mais vulneráveis à ocorrência de vibrações excessivas causadas por carregamentos dinâmicos, como terremotos, ventos, ondas, tráfego intenso e ocupação humana. Essas vibrações são indesejáveis, não só do aspecto de segurança, como também do conforto ambiental [1]. Frequentemente, no que diz respeito ao projeto estrutural, entender o comportamento dinâmico de estruturas é de suma importância. Nesse âmbito, embora aplicações da dinâmica estrutural sejam diferentes nas

engenharias aeroespacial, civil e mecânica, os princípios e métodos de solução são basicamente os mesmos [2].

O crescimento rápido da urbanização resultou em aumento no número de estruturas e edifícios altos. A vibração induzida por forças externas dinâmicas pode levar a danos estruturais e ao desempenho insatisfatório dessas estruturas, podendo causar inconvenientes significativos, inclusive acidentes com vítimas. Portanto, para aumentar a segurança e a funcionalidade da estrutura, projetistas têm considerado o controle de vibração no dimensionamento de sistemas estruturais, o que serve como grande competitividade tecnológica [3].

Tecnologias de controle de vibração foram adotadas para diminuir os danos e alterar o desempenho estrutural, incluindo amortecimento, isolamento de vibração, controle de forças de excitação e absorvedor de vibração. Cada sistema tem suas próprias limitações e vantagens.

*Endereço de correspondência: lasouza@utfpr.edu.br

A escolha de um sistema de controle específico é geralmente decidida pela consideração de uma série de fatores, por exemplo, eficácia, conveniência e custo do ciclo de vida. Há vários absorvedores de vibração que foram estudados e instalados em edifícios altos para o controle de seu comportamento mecânico sob excitações dinâmicas, com destaque ao Amortecedor de Massa Sintonizado, Amortecedor de Massa Ativo, Amortecedor de Massa Semiativo e Amortecedor de Massa Híbrido [3, 4].

Um sistema de controle passivo resume-se à instalação de um ou mais dispositivos incorporados à estrutura principal. Esses dispositivos absorvem ou consomem uma parte da energia transmitida pelo carregamento dinâmico reduzindo, assim, a dissipação dessa energia nos membros estruturais. O Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS) é um sistema altamente eficaz utilizado para o controle passivo de vibrações em estruturas. O AMS consiste de um elemento inercial conectado por meio de um elemento restaurador e um dissipador ao sistema para alterar suas características dinâmicas. Seu princípio de operação está fundamentado na ideia de que o amortecedor entre em ressonância com excitações cujas frequências são coincidentes com algum modo de vibração da estrutura, vindo a dissipar a energia que, caso contrário, atuaria desimpedido sobre a edificação [5].

Este artigo tem por escopo apresentar uma abordagem numérico-computacional para a análise linear de vibração mecânica de estruturas do tipo *shear building* sujeitas a cargas dinâmicas. Tal abordagem está voltada para a aplicação no campo educacional, mais especificamente no ensino da física e das engenharias. Um código computacional é desenvolvido com o programa livre Scilab, versão 2024.0.0 [6].

Nos últimos anos, houve uma expansão no uso de recursos tecnológicos acessíveis e gratuitos no processo de ensino-aprendizagem em diversas áreas da ciência, vindo a potencializar a qualidade de ensino na sala de aula. Vários trabalhos já abordaram o uso do programa Scilab como ferramenta tecnológica no ensino da física [7–9]. O Scilab é um instrumento científico para computação numérica distribuído gratuitamente via internet (disponível para *download* em <http://www.scilab.org>). Essa ferramenta fornece um poderoso ambiente computacional aberto para aplicações científicas, podendo ser usada como um terminal matemático interativo [7, 10].

A estrutura de um edifício tem vários graus de liberdade devido às suas conexões. Um modelo estrutural simples para discretização de edifícios de múltiplos andares é o modelo de *shear building*. Nesse modelo, as massas das lajes, vigas e pilares de cada pavimento são concentradas no nível do piso de cada andar. A rigidez das lajes é assumida consideravelmente maior do que a rigidez dos pilares de suporte [11]. Esse modelo pode ser idealizado como um único pilar com as massas concentradas nos níveis dos pisos, em que os graus de liberdade são os deslocamentos horizontais dessas massas. Outra

alternativa de idealização é a consideração do sistema de massa – mola para representá-lo [12].

Recentemente, várias pesquisas tratando da análise dinâmica de estruturas do tipo *shear building* têm sido conduzidas. Varanis, Silva e Mereles [13] apresentaram a modelagem de uma estrutura *shear building*, em que foram obtidas as equações de movimento e as frequências naturais de oscilação. Os valores numéricos obtidos foram validados pela comparação com os resultados experimentais de Varanis, Silva e Mereles [14]. Liu, Lu e Yu [15] fizeram uma abordagem paramétrica baseada em sensibilidade, a qual foi concebida para identificar simultaneamente o dano estrutural e os defeitos de amortecimento de um *shear building*. Shmerling e Levy [16] desenvolveram uma nova metodologia de projeto estrutural sísmico fundamentada na teoria de controle ótimo para *shear building* com comportamento inelástico. A metodologia visou minimizar as acelerações absolutas máximas, alterando apenas a massa e a rigidez horizontal dos pisos.

Roy [17] empregou diretamente a forma modal para estimar a quantidade de dano. A solução de forma fechada compreendendo a correlação entre uma inclinação modal e a intensidade do dano foi estabelecida. Uma experimentação numérica envolvendo um *shear building* de 16 andares foi realizada para demonstrar a aplicabilidade da proposição na quantificação de danos. Yanik e Ulus [18] implementaram analiticamente o isolamento de base com interação solo – estrutura do *shear building*. Além disso, desenvolveram uma solução simples com a adição dos efeitos dessa interação nas matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez da estrutura.

O programa desenvolvido em ambiente Scilab neste trabalho é validado a partir de análises dinâmicas de três problemas de *shear building* encontrados na literatura. Para considerar o efeito do amortecimento nas estruturas, utiliza-se o modelo de amortecimento de Rayleigh [19]. Esse modelo é uma aproximação comumente utilizada para formular a matriz de amortecimento, a qual é expressa como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez da estrutura [20].

No que tange à obtenção de características dinâmicas dessas estruturas, duas análises podem ser empregadas, quais sejam: a modal; e a transiente. A primeira consiste em determinar as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da estrutura. Já a segunda tem por objetivo avaliar a resposta de uma estrutura submetida à ação de um carregamento qualquer variável ao longo do tempo.

O método de Jacobi na sua forma generalizada [21] é implementado para a análise modal, cuja sub-rotina é apresentada. Com relação à análise transiente, a solução aproximada da equação do movimento é obtida por meio do método de integração direta implícito proposto por Liu, Li e Zhao [22], o qual tem estabilidade incondicional e convergência quadrática. Esse método, pertencente à família de métodos de Newmark, soluciona um conjunto

de equações implícitas nos tempos discretos de interesse utilizando uma matriz de rigidez efetiva simétrica e um vetor de força efetiva. Ademais, exige o mesmo esforço computacional que a regra trapezoidal na obtenção da solução, sem a adição de variáveis e parâmetros artificiais.

Com o intuito de avaliar os deslocamentos horizontais de um pórtico associado a um sistema AMS instalado no seu topo, uma rotina é criada para simular os efeitos dinâmicos de um modelo de *shear building* com dois andares submetido a uma carga dinâmica. Esse sistema é sintonizado com base na frequência fundamental da estrutura principal, para que parte da energia gerada seja absorvida pelo AMS quando ocorrer a vibração do sistema estrutural.

No contexto educacional, os estudos de caso apresentados neste artigo podem ser utilizados por estudantes e educadores em sala de aula, visto que o modelo proposto pode ser aplicado para resolver problemas específicos de dinâmica de estruturas e/ou na solução numérica de equações diferenciais ordinárias acopladas. Também, tal abordagem pode ser aplicada em conjunto com estudos experimentais, como o apresentado em [14].

2. Materiais e Métodos

Nesta seção, a metodologia empregada para as simulações numéricas de problemas dinâmicos envolvendo o sistema estrutural *shear building* é apresentada.

2.1. Formulação do *shear building* sem amortecimento

O sistema estrutural *shear building* é um modelo simples com múltiplos graus de liberdade destinado à análise de edifícios sob a ação de cargas dinâmicas. Nesse modelo, as lajes e as vigas são idealizadas como indeformáveis, de modo que os pilares fiquem inextensíveis. Supõe-se que as massas desses elementos estruturais estejam concentradas nos níveis das diversas lajes. Com essa concepção, os graus de liberdade da estrutura correspondem a deslocamentos horizontais u_i de suas lajes [21]. A Figura 1 mostra o modelo estrutural do *shear building* com n andares e o sistema massa – mola equivalente. Nessa figura, m_i e k_i são, respectivamente, a massa e a rigidez do i -ésimo andar.

A energia cinética desse sistema estrutural (E_C) pode ser expressa por [2, 13]:

$$E_C = \frac{1}{2}m_1\dot{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{u}_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n\dot{u}_n^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i\dot{u}_i^2, \quad (1)$$

na qual $\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt}$ é a velocidade do i -ésimo andar. A energia potencial elástica (E_P) do sistema é dada por:

$$E_P = \frac{1}{2}k_1u_1^2 + \frac{1}{2}k_2(u_2 - u_1)^2 + \dots + \frac{1}{2}k_n(u_n - u_{n-1})^2, \\ E_P = \frac{1}{2}k_1u_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2}k_i(u_i - u_{i-1})^2. \quad (2)$$

Desprezando o efeito de dissipações de energia, a energia total do sistema (E_T) é determinada pela soma das energias cinética e potencial [2]

$$E_T = E_C + E_P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i\dot{u}_i^2 + \frac{1}{2}k_1u_1^2 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2}k_i(u_i - u_{i-1})^2. \quad (3)$$

De acordo com a lei da conservação da energia mecânica, quando nenhuma força dissipativa atua sobre um corpo, toda a sua energia relativa ao movimento é mantida constante. Isso equivale a dizer que a energia cinética e a energia potencial do corpo nunca se alteram. Assim, a energia total E_T de um sistema isolado permanece constante ao longo tempo e diferenciando a equação (3) com relação ao tempo t , chega-se a [2]:

$$\frac{dE_T}{dt} = 0, \\ \frac{dE_T}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i\dot{u}_i\ddot{u}_i + k_1u_1\dot{u}_1 + \sum_{i=2}^n k_i(u_i - u_{i-1})(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) = 0, \quad (4)$$

sendo a aceleração $\ddot{u}_i = \frac{d^2u_i}{dt^2}$. Pode-se fatorar a equação (4) em função das velocidades $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n$ da seguinte forma:

$$\dot{u}_1[m_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 + k_2(u_1 - u_2)] + \dot{u}_2[m_2\ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1)] + \dots + \dot{u}_{n-1}[m_{n-1}\ddot{u}_{n-1} + k_{n-1}(u_{n-2} - u_{n-1})] + \dot{u}_n[m_n\ddot{u}_n + k_n(u_n - u_{n-1})] = 0. \quad (5)$$

Reescrevendo a equação (5) na forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & -k_n \\ 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

em que \mathbf{M} é a matriz de massa diagonal e \mathbf{K} é a matriz de rigidez tridiagonal do sistema estrutural, as quais são matrizes definidas positivas. A equação (7) representa o sistema de equações de equilíbrio do *shear building* com n andares. Para a utilização desse modelo, os pilares são considerados engastados em suas extremidades e,

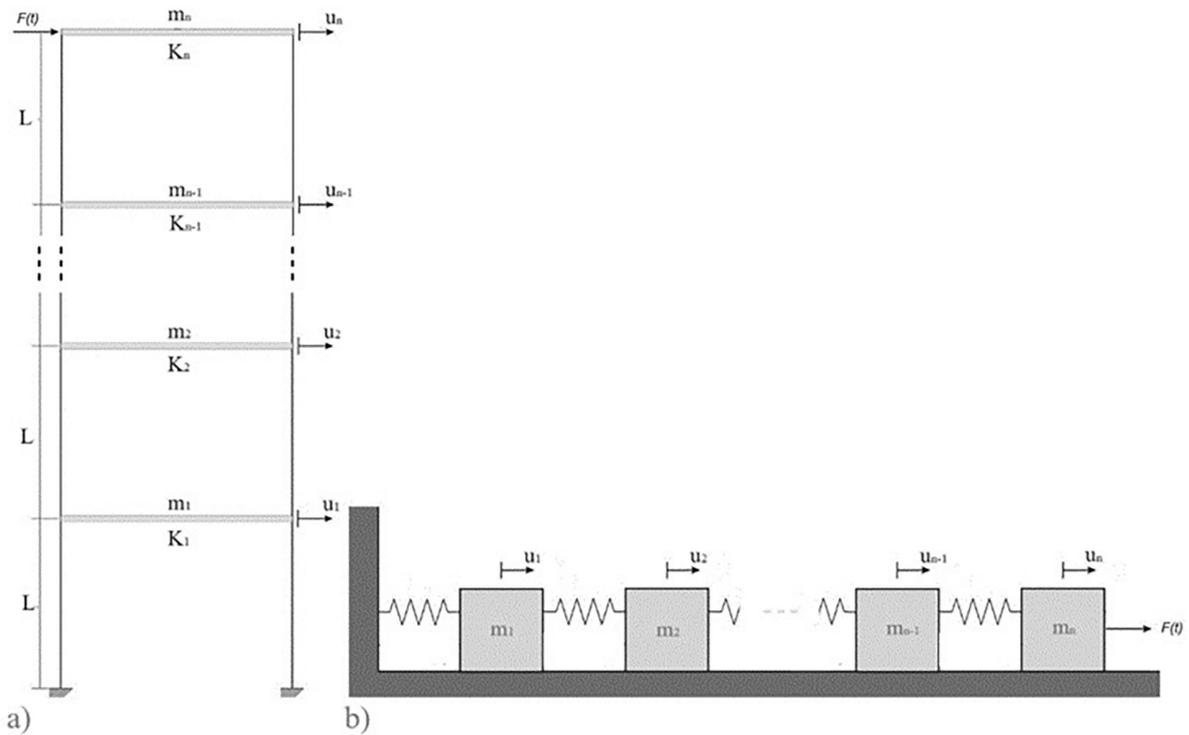


Figura 1: a) *Shear building* com n graus de liberdade; e b) sistema massa – mola equivalente. Fonte: adaptada de [13].

portanto, o coeficiente de rigidez de cada pilar k_{pilar} é determinado pela expressão [12]:

$$k_{\text{pilar}} = \frac{12EI}{L^3}, \tag{8}$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal, I o momento de inércia da seção transversal do pilar e L é a distância entre os pavimentos. O parâmetro k_i na matriz em equação (7) representa a rigidez de cada andar e é determinado por:

$$k_i = n_{\text{pilar}} k_{\text{pilar}}, \tag{9}$$

em que n_{pilar} é o número de pilares do andar. A massa de cada andar m_i é obtida por meio da soma das massas dos pilares, das vigas e das lajes existentes naquele andar conforme a equação:

$$m_i = m_{\text{pilares}} + m_{\text{vigas}} + m_{\text{lajes}}. \tag{10}$$

2.2. Formulação do *shear building* com sistema AMS instalado no seu topo

O Amortecedor de Massa Sintonizada (AMS) é composto por massa, amortecimento e rigidez de mola. Esse dispositivo é fixado à estrutura principal e é utilizado para transferir a energia vibratória dessa estrutura para ele mesmo. A frequência natural do AMS é sintonizada em ressonância com a frequência

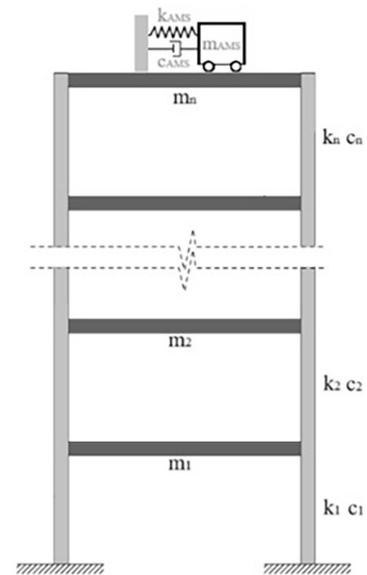


Figura 2: Modelo esquemático de um *shear building* com n andares associado ao sistema AMS.

fundamental da estrutura principal [3, 23]. Considere o *shear building* com n graus de liberdade associado com um AMS instalado no último andar, conforme mostrado na Figura 2.

As matrizes de rigidez (\mathbf{K}_{AMS}), de amortecimento (\mathbf{C}_{AMS}) e de massa (\mathbf{M}_{AMS}) para o modelo estrutural

da Figura 2 são obtidas de acordo com as equações, respectivamente [23]:

$$\mathbf{K}_{AMS} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_n + k_{AMS} & -k_{AMS} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{AMS} & k_{AMS} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathbf{C}_{AMS} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n + c_{AMS} & -c_{AMS} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{AMS} & c_{AMS} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathbf{M}_{AMS} = \text{diag}[m_1 m_2 \cdots m_n m_{AMS}], \tag{13}$$

em que m_{AMS} , k_{AMS} e c_{AMS} são os parâmetros de massa, de rigidez e de amortecimento do AMS, respectivamente. O símbolo $\text{diag}[]$ na equação (13) representa uma matriz diagonal com os coeficientes diagonais mostrados. A consideração de projeto mais apropriada para a definição desses parâmetros é importante para a sua eficiência quanto ao controle de vibração da estrutura. O modo de vibração do AMS é definido de acordo com a frequência crítica do sistema estrutural (ω_{crit}). A frequência ótima ($\alpha_{ótima}$) é determinada em função da razão das massas do AMS e da estrutura (μ), a qual é descrita pela seguinte equação [24, 25]:

$$\alpha_{ótima} = \frac{1}{1 + \mu}, \tag{14}$$

$$\mu = \frac{m_{AMS}}{m_{est}}, \tag{15}$$

em que m_{est} é a massa total do sistema estrutural. A razão de amortecimento ótimo ($\xi_{ótimo}$) é avaliada por:

$$\xi_{ótimo} = \sqrt{\frac{3\mu}{8 + 8\mu}}. \tag{16}$$

Com a massa do AMS (m_{AMS}) previamente definida, a frequência (ω_{AMS}), a rigidez (k_{AMS}) e o amortecimento (c_{AMS}) do mesmo são avaliados segundo as equações, respectivamente:

$$\omega_{AMS} = \alpha_{ótima} \omega_{crit}, \tag{17}$$

$$k_{AMS} = \omega_{AMS}^2 m_{AMS}, \tag{18}$$

$$c_{AMS} = 2m_{AMS} \xi_{ótimo} \omega_{AMS}. \tag{19}$$

2.3. Amortecimento de Rayleigh

O amortecimento de Rayleigh pode ser aplicado a uma estrutura convencional por meio da matriz de amortecimento \mathbf{C} , a qual é expressa por meio da combinação

linear das matrizes de rigidez e de massa [19]:

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}. \tag{20}$$

Os coeficientes a_0 e a_1 são selecionados para especificar a razão de amortecimento modal em dois modos. Atribuindo a mesma taxa de amortecimento ζ aos modos com frequências ω_i e ω_j , esses coeficientes são computados por meio do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{2\zeta}{\omega_i + \omega_j} \begin{bmatrix} \omega_i \omega_j \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

As frequências ω_i e ω_j são normalmente atribuídas como o primeiro modo e alguma frequência de modo mais alto, respectivamente, de maneira que o amortecimento seja limitado na faixa de frequência que inclui a maior parte da participação modal. Variações simples do amortecimento de Rayleigh são o amortecimento proporcional à rigidez (com $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$) e o amortecimento proporcional à massa (com $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$), o que possibilita que a taxa de amortecimento seja especificada em apenas um modo.

2.4. Equação do movimento e método de solução

A equação diferencial ordinária de segunda ordem que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural com amortecimento em termos dos deslocamentos nodais é dada por [26, 27]:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{F}_{ext}(t) = \mathbf{0}, \tag{22}$$

sendo \mathbf{F}_{ext} o vetor forças externas aplicadas em função do tempo t . A solução do sistema dado em equação (22), cujas incógnitas são os vetores $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, é obtida por um esquema de integração numérica direta no tempo. Os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração no tempo corrente t_n são atualizados para o

instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, em que Δt é adotado constante e denota o incremento de tempo. Para solucionar o sistema em equação (22), as seguintes condições iniciais devem ser satisfeitas:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}. \quad (23)$$

O vetor aceleração em $t = 0$ é obtido diretamente por:

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F}_{ext}(0) - \mathbf{K}\mathbf{u}(0) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(0)]. \quad (24)$$

O método de Newmark [28] emprega as seguintes relações para o deslocamento e a velocidade, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right], \quad (25)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t(1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t\gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}, \quad (26)$$

em que β e γ são constantes. O sobrescrito à direita t dos termos das equações (25) e (26) indica o passo de tempo passado e, por sua vez, $(t + \Delta t)$ indica o passo de tempo atual.

Há diversas particularizações da família de métodos de Newmark no que diz respeito aos valores das constantes β e γ . Um método dessa família foi proposto por Liu, Li e Zhao [22] tomando $\gamma = \beta = 1/2$, o qual é um procedimento numérico passo a passo com estabilidade incondicional e precisão de segunda ordem. O vetor deslocamentos \mathbf{u} no passo de tempo $(t + \Delta t)$ é obtido por:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = \left[{}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}} \right]^{-1} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}_{ext}. \quad (27)$$

A matriz de rigidez efetiva $\hat{\mathbf{K}}$ e o vetor de carga efetiva $\hat{\mathbf{F}}_{ext}$ são determinados, respectivamente, por:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}} = {}^t\mathbf{K} + \frac{2}{\Delta t^2} {}^t\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} {}^t\mathbf{C}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}_{ext} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} + \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^t\mathbf{u} \\ &\quad + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} {}^t\dot{\mathbf{u}} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} {}^t\ddot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Na Figura 3 é apresentado o algoritmo do método de Liu, Li e Zhao [22] para as análises lineares transientes. Esse algoritmo é usado recursivamente para calcular as soluções em todos os tempos discretos de interesse.

Pode-se obter melhor eficiência numérica do método apresentado por meio de algoritmos que armazenem os coeficientes não nulos presentes na matriz e efetuam operações entre matrizes e vetores com esses coeficientes. Dessa maneira, cálculos redundantes com elementos nulos são evitados. Na Figura 4, aparecem as linhas de código para a resolução do sistema de equações lineares dado na equação (27) utilizando o método direto Fatoração LU. A função *sparse* é utilizada para construir uma matriz esparsa, em que apenas as entradas não nulas são armazenadas.

```

1. Cálculos iniciais
1.1  $\ddot{\mathbf{u}}^{(0)} \leftarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{ext}^{(0)} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \mathbf{K}\mathbf{u}^{(0)})$ 
1.2 Selecionar  $\Delta t$ 
1.3  $\mathbf{a}_1 \leftarrow \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}$     $\mathbf{a}_2 \leftarrow \frac{2}{\Delta t}\mathbf{M}$     $\mathbf{a}_3 \leftarrow -\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}$ 
1.4  $\hat{\mathbf{K}} \leftarrow \mathbf{K} + \mathbf{a}_1$ 
2. Cálculos para cada passo de tempo, com  $j = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t \dots$ 
2.1  ${}^{j+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}_{ext} \leftarrow {}^j\hat{\mathbf{F}}_{ext} + \mathbf{a}_1 {}^j\mathbf{u} + \mathbf{a}_2 {}^j\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_3 {}^j\ddot{\mathbf{u}}$ 
2.2  ${}^{j+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} \leftarrow \hat{\mathbf{K}}^{-1} {}^{j+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}_{ext}$ 
2.3  ${}^{j+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} \leftarrow \frac{1}{\Delta t} \left( {}^{j+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} - {}^j\hat{\mathbf{u}} \right) + \frac{\Delta t}{2} {}^j\ddot{\mathbf{u}}$ 
2.4  ${}^{j+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow \frac{2}{\Delta t^2} \left( {}^{j+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} - {}^j\hat{\mathbf{u}} \right) - \frac{2}{\Delta t} {}^j\dot{\mathbf{u}}$ 
3. Repetir para o próximo passo de tempo. Relocar  $j$  por  $(j + \Delta t)$  e implementar as linhas 2.1 a 2.4 para o próximo passo de tempo.

```

Figura 3: Algoritmo do método de Liu, Li e Zhao [22].

```

K = sparse(K);           //gera a matriz K esparsa somente com os elementos não nulos
[h,rk] = lufact(K);      //realiza a fatoração LU da matriz esparsa K
u = lusolve(h,Fext);     //resolve o sistema de equações lineares Ku = Fext

```

Figura 4: Linhas de código para a resolução de sistemas esparsos por Fatoração LU utilizando funções do Scilab.

2.5. Determinação das frequências naturais e modos de vibração

As frequências naturais são propriedades inerentes ao sistema estrutural e dependem da sua distribuição de massa e rigidez. Desprezando o efeito do amortecimento ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$), a equação de movimento do sistema estrutural em vibração livre ($\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$) é escrita conforme a equação (6). Uma solução para essa equação é da forma $\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$, que resulta no problema clássico de autovalor e autovetor dado pela seguinte expressão [29]:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} e^{i\omega t} + \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} i^2 \omega^2 e^{i\omega t} = \mathbf{0}, \quad (30)$$

em que $i = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{\phi}$ é o autovetor correspondente ao modo de vibração e ω é o autovalor que representa uma frequência natural de vibração do sistema estrutural dada em rad/s. Se a inversa da matriz \mathbf{M} existe (tal que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$), tomando $i^2 = -1$ e multiplicando ambos os lados da equação (30) por \mathbf{M}^{-1} , a mesma é reescrita por:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} - \omega^2 \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} - \omega^2 \mathbf{I}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{\phi}, \quad (32)$$

na qual $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ e $\lambda = \omega^2$.

Na literatura, podem ser encontrados algoritmos computacionais capazes de resolver o problema dado em equação (32) e de fornecer, de uma só vez, todas as frequências naturais e os respectivos modos de vibração. O número de modos de vibração é igual ao número de graus de liberdade do sistema estrutural.

Neste trabalho, utilizam-se a função do Scilab $[R, \text{diagevals}] = \text{spec}(A)$, em que R é a matriz de autovetores e *diagevals* é a matriz com os autovalores, e o algoritmo do método de Jacobi na sua forma generalizada [21]. O método de Jacobi é um dos métodos mais antigos de resolução completa do problema de

```

function [erro, cont, autovalor,
autovetor]=jacobi(M, K, NTGL)
//Cálculo de autovalores e autovetores (Método de
Jacobi)
T=eye(NTGL,NTGL);
tol=10^-12;
erro=1;
erro2=0;
cont=0;
while erro>tol
cont=cont+1;
for j=2:NTGL
for i=1:j-1
if K(i,i)<>0 || M(i,i)<>0
a=K(i,i)*M(i,j)-K(i,j)*M(i,i);
b=K(j,j)*M(i,j)-K(i,j)*M(j,j);
c=(K(i,i)*M(j,j)-K(j,j)*M(i,i))/2;
if sign(c)~=0
d=c+sign(c)*sqrt(c^2+a*b);
else
d=c+sqrt(c^2+a*b);
end
gama=-a/d;
alfa=b/d;
for l=1:NTGL
aux1=K(l,i);
K(l,i)=aux1+K(l,j)*gama;
K(l,j)=K(l,j)+aux1*alfa;
aux2=M(l,i);
M(l,i)=aux2+M(l,j)*gama;
M(l,j)=M(l,j)+aux2*alfa;
end
end
erro1=diag(K);
erro=(norm(erro1)-
norm(erro2))/norm(erro1);
erro2=erro1;
end
autovalor=K*M^-1;
autovetor=T*M^(-1/2);
endfunction
    
```

Figura 5: Sub-rotina do método de Jacobi na sua forma generalizada.

autovalor e autovetor na forma reduzida com matriz real e simétrica [21]. Na Figura 5 é apresentada a sub-rotina implementada com o programa Scilab desse método.

3. Resultados e Discussão

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos obtidos com o código computacional desenvolvido com o programa Scilab, versão 2024.0.0 [6], para as análises modal e transiente de estruturas do tipo *shear building*. Salienta-se que as unidades de medida dos problemas foram mantidas conforme as referências bibliográficas originais.

3.1. Shear Building com seis graus de liberdade – análise modal

Considere o modelo estrutural do *shear building* com seis graus de liberdade ilustrado na Figura 6. Esse problema foi estudado por [21]. Os valores das frequências naturais dessa estrutura são apresentados na Tabela 1, os quais são obtidos com a função *spec* do Scilab e com o método de Jacobi (sub-rotina na Figura 5).

A matriz de massa *M* e a matriz de rigidez *K* da estrutura são dadas, respectivamente, por:

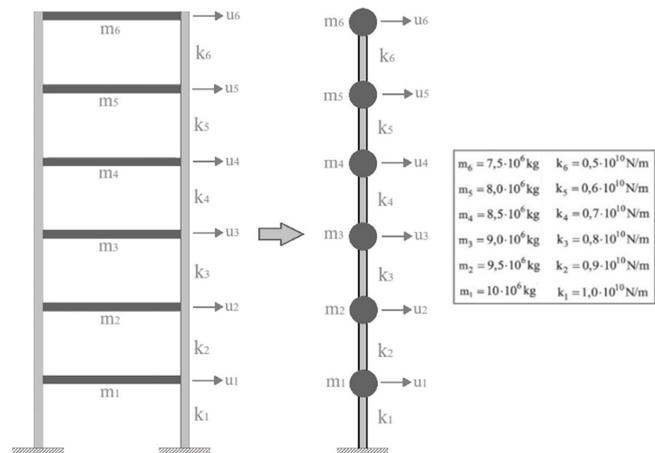


Figura 6: a) *Shear building* com seis graus de liberdade; e b) sua correspondente idealização.

Tabela 1: Frequências naturais em rad/s.

Frequência	Função <i>spec</i> (Scilab)	Método de Jacobi
1	7,6905997	7,6905997
2	20,227771	20,227771
3	32,025952	32,025952
4	42,037775	42,037775
5	49,853776	49,853776
6	56,397479	56,397479

$$M = 10^7 \text{diag}[1 \ 0,95 \ 0,9 \ 0,85 \ 0,8 \ 0,75], \tag{33}$$

$$K = 10^{10} \begin{bmatrix} 1,9 & -0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,9 & 1,7 & -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & 1,5 & -0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,7 & 1,3 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 1,1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

A solução com o método de Jacobi é obtida com cinco iterações e erro = $8,372 \times 10^{-14}$. A matriz de autovetores ϕ é mostrada na equação (35). Os modos naturais de vibração (representados pelas colunas da matriz ϕ) são linearmente independentes entre si e em número igual aos graus de liberdade do modelo discreto. Os modos de vibração correspondentes as duas primeiras frequências são apresentados na Figura 7, havendo boa concordância com os resultados obtidos por [21].

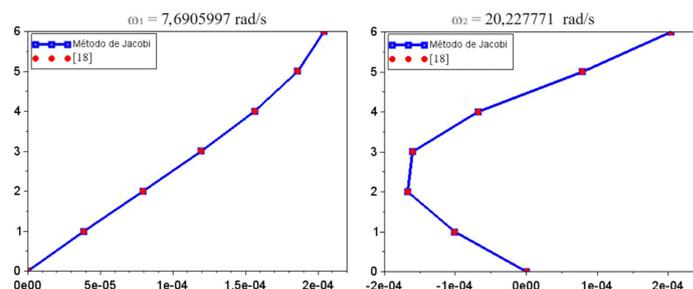


Figura 7: Os modos de vibração correspondentes as duas primeiras frequências naturais.

$$\phi = 10^{-4}$$

$$\begin{bmatrix} 1,43298 & 0,38825 & -1,49095 & -1,43622 & 1,57831 & -1,00947 \\ -2,03910 & 0,79413 & 0,96978 & -1,39527 & 0,23293 & -1,67218 \\ 1,75659 & 1,19497 & 0,87588 & 0,35020 & -1,76943 & -1,60524 \\ -1,08895 & 1,56220 & -2,03033 & 1,88321 & -0,03755 & -0,68428 \\ 0,49801 & 1,85974 & 1,72784 & 0,93538 & 2,07698 & 0,78681 \\ -0,13206 & 2,04079 & -0,63335 & -1,73703 & -1,25819 & 2,03704 \end{bmatrix} \cdot \quad (35)$$

3.2. Shear building com três graus de liberdade – análise transiente

Seja o modelo de *shear building* com três graus de liberdade ilustrado na Figura 8. As propriedades dinâmicas adimensionais da estrutura são selecionadas como $m_1 = m_2 = m_3 = k_1 = k_2 = k_3 = 1,0$ e $c_1 = c_2 = c_3 = 0,1$. A estrutura está sujeita às cargas harmônicas $P_1(t) = \cos(t)$, $P_2(t) = \cos(2t)$ e $P_3(t) = \cos(3t)$, com todas as unidades compatíveis.

As matrizes de massa M , de rigidez K e de amortecimento C da estrutura são dadas por, respectivamente:

$$M = \text{diag}[1, 0 \ 1, 0 \ 1, 0], \quad (36)$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 0,2 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Na Figura 9 aparece o histórico de deslocamento u_1 no primeiro nível do *shear building*, considerando diferentes valores para o incremento de tempo ($\Delta t = 0,1, 0,01$ ou $1,0 \times 10^{-4}$) e tempo máximo $t_{m\grave{a}x} = 7,0$. Nota-se boa concordância entre os resultados obtidos com o programa implementado considerando $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$ e os pontos de equilíbrio obtidos por [2].

Constata-se, na Figura 9, que a definição do incremento Δt é fundamental na análise transiente, uma

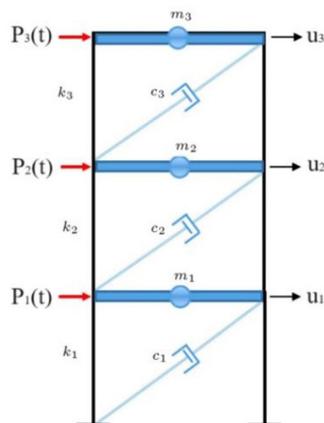


Figura 8: *Shear building* com três graus de liberdade. Fonte: adaptada de [2].

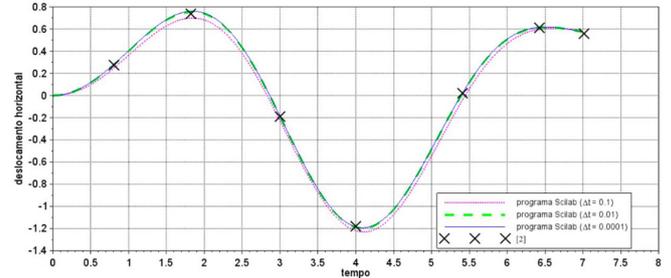


Figura 9: Curvas deslocamento horizontal u_1 – tempo para o primeiro andar.

vez que está relacionado com os critérios de precisão e de esforço computacional. O incremento deve ser grande o suficiente para resguardar o custo (tempo de processamento), mas pequeno o suficiente para obter a solução precisa. Posto isso, é importante selecionar um incremento apropriado e que seja capaz de satisfazer esses dois critérios contraditórios.

3.3. Shear building com o sistema AMS

Considere o *shear building* com dois graus de liberdade sem e com AMS, conforme a Figura 10. Esse problema foi adaptado de [30]. O dispositivo passivo AMS é instalado na parte superior da estrutura, o qual é constituído de uma massa ligada por meio de uma mola e um amortecedor. Uma força variável no tempo $F(t)$ é aplicada no último andar sendo descrita pela seguinte função:

$$F(t) = \begin{cases} 10^5 \cos(t), & \text{para } t \leq 0,01s \\ 0, & \text{para } t > 0,01s, \end{cases} \quad (39)$$

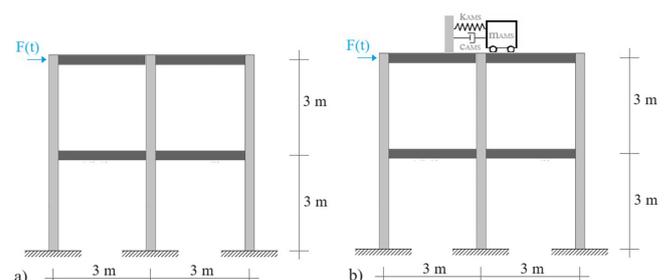


Figura 10: *Shear Building* com dois graus de liberdade: a) sem AMS; e b) com AMS.

Os pilares têm perfil $W200 \times 35,9$ ($I = 3437,0 \text{ cm}^4$ e massa linear $35,9 \text{ kg/m}$) e as vigas, perfil $W200 \times 31,3$ ($I = 3168,0 \text{ cm}^4$ e massa linear $31,3 \text{ kg/m}$). O módulo de elasticidade longitudinal do material é $E = 200 \text{ GPa}$. A massa de cada pavimento m_i é determinada considerando somente as massas dos pilares (três pilares com comprimento igual a 3 m cada) e das vigas (duas vigas com comprimento igual a 3 m cada):

$$\begin{aligned} m_i &= m_{\text{pilares}} + m_{\text{vigas}} \\ &= 3 \times 35,9 \times 3 + 2 \times 31,3 \times 3 = 510,9 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (40)$$

A matriz de massa \mathbf{M} para a estrutura sem o AMS é dada por:

$$\mathbf{M} = \text{diag}[510,9 \ 510,9]. \quad (41)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K} do sistema estrutural sem o AMS é determinada como se segue:

$$\mathbf{K} = n_{\text{pilar}} \begin{bmatrix} \frac{24EI}{L^3} & \frac{-12EI}{L^3} \\ \frac{-12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18330666 & -9165333 \\ -9165333 & 9165333 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

na qual a rigidez à flexão é $EI = 6,874 \times 10^6 \text{ Nm}^2$, o comprimento do pilar é $L = 3 \text{ m}$ e a quantidade de pilares por pavimento é $n_{\text{pilar}} = 3$. As frequências naturais em rad/s da estrutura aparecem na Tabela 2, que são determinadas com a função *spec* (Scilab) e o algoritmo do método de Jacobi.

Para a determinação da matriz de amortecimento de Rayleigh sem o AMS, consideram-se a taxa de amortecimento $\zeta = 0,01$ e as frequências naturais $\omega_i = 82,7786 \text{ rad/s}$ e $\omega_j = 216,7174 \text{ rad/s}$. A matriz de amortecimento \mathbf{C} é determinada pela combinação linear das matrizes \mathbf{M} (equação (41)) e \mathbf{K} (equação (42)) resultando em:

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1836,1508 & -612,0502 \\ -612,0502 & 1224,1005 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

sendo os coeficientes $a_0 = 1,1979844$ e $a_1 = 6,68 \times 10^{-5}$. Supondo a massa do AMS igual a 10% da massa de um pavimento (isto é, $m_{\text{AMS}} = 51,09 \text{ kg}$), os parâmetros de rigidez k_{AMS} e de amortecimento c_{AMS} para esse sistema são calculados conforme as equações (18) e (19), respectivamente. A Tabela 3 apresenta os valores dos parâmetros ótimos para o dimensionamento do AMS.

A equação do movimento para o *shear building* com o AMS acoplado no seu topo pode ser reescrita por [31]:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t), \quad (44)$$

Tabela 2: Frequências naturais em rad/s.

Frequência	Função <i>spec</i> (Scilab)	Método Jacobi*
1	82,7786	82,7786
2	216,7174	216,7174

*A solução foi obtida com 2 iterações e erro = 0.

Tabela 3: Parâmetros do sistema AMS.

μ	α	$\xi_{\text{ótimo}}$	ω_{crit}	ω_{AMS}	k_{AMS}	c_{AMS}
0,05	0,9523	0,1336	82,7786	78,8368	317537,05	1076,4680

em que

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{AMS}}, \quad (45)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{\text{AMS}}, \quad (46)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{C}_{\text{AMS}}, \quad (47)$$

sendo \mathbf{K}_{AMS} , \mathbf{M}_{AMS} e \mathbf{C}_{AMS} as matrizes de rigidez, massa e amortecimento do sistema AMS, respectivamente. As matrizes $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{K}}$ e $\bar{\mathbf{C}}$ são determinadas como segue, respectivamente:

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}[510,9 \ 510,9 \ 0] + \text{diag}[0 \ 0 \ 51,09], \quad (48)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag}[510,9 \ 510,9 \ 51,09],$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} 18330667 & -9165333 & 0 \\ -9165333 & 9165333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 317537,05 & -317537,05 \\ 0 & -317537,05 & 317537,05 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 18330667 & -9165333 & 0 \\ -9165333 & 9482870 & -317537 \\ 0 & -317537 & 317537 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} 1836,1508 & -612,0502 & 0 \\ -612,0502 & 1224,1005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1076,4680 & -1076,4680 \\ 0 & -1076,4680 & 1076,4680 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1836,1508 & -612,0502 & 0 \\ -612,0502 & 2300,5685 & -1076,4680 \\ 0 & -1076,4680 & -1076,4680 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 11, aparecem as curvas tempo *versus* deslocamento horizontal u_2 (no topo da estrutura) sem

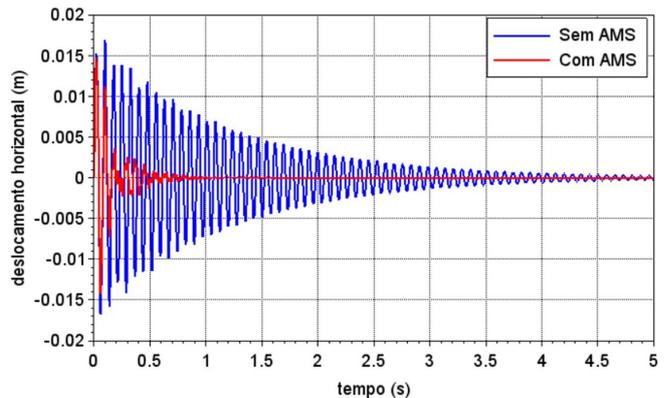


Figura 11: Curvas tempo *versus* deslocamento horizontal para a estrutura sem e com AMS.

e com o sistema AMS, utilizando o método implícito de Liu, Li e Zhao [22] com o incremento de tempo $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$ s e o tempo máximo $t_{m\acute{a}x} = 5$ s.

Com relação à resposta dinâmica da estrutura sem o AMS (Figura 11), a amplitude máxima obtida é $u_2 = 0,01702$ m. Com a adição do AMS ao sistema estrutural, a amplitude máxima na estrutura é $u_2 = 0,01481$ m, o que corresponde a uma redução cerca de 12,99% em comparação com o modelo sem o AMS.

O sistema AMS absorve uma parcela da energia transmitida pela carga dinâmica, ocorrendo a diminuição da amplitude de vibração da estrutura. A frequência do AMS é sintonizada para coincidir com a frequência natural do primeiro modo de vibração da estrutura, que é geralmente utilizada para o projeto desse sistema de controle. Ressalta-se, contudo, que não é interessante que a razão de massas μ (equação (15)) tenha um valor muito alto, visto que isso pode sobrecarregar a estrutura principal ocasionando o encarecimento da edificação, além de dificultar a implantação do sistema AMS.

As cargas dinâmicas podem provocar o colapso da estrutura, porque seus efeitos aumentam as magnitudes dos esforços internos nos membros estruturais, as quais são superiores às obtidas em uma análise estática. Amplitudes de vibração podem exceder aos valores admissíveis estabelecidos por norma, podendo causar danos irreversíveis à estrutura quando a frequência da carga dinâmica se aproxima de uma frequência natural da mesma.

4. Conclusão

Este artigo apresentou a formulação matemática e os algoritmos para as análises dinâmicas transiente e modal de estruturas do tipo *shear building*. Esse tipo de estrutura pode ser modelado como um sistema massa – mola, sendo cada massa correspondente a um pavimento da estrutura. Um código computacional foi desenvolvido com o *software* livre Scilab. Os resultados numéricos das simulações efetuadas tiveram boa precisão e ficaram de acordo com os disponíveis na literatura.

Métodos de integração direta são procedimento eficazes e muito empregados em análises dinâmicas estruturais. A equação do movimento foi solucionada em um conjunto de pontos discretos de tempo. O método de integração direta implementado é um método implícito passo a passo com estabilidade incondicional e precisão de segunda ordem.

Para a definição do método de integração a ser utilizado pelo analista/projetista em simulações dinâmicas estruturais, dois aspectos devem ser levados em consideração, quais sejam: a precisão; e a estabilidade. Aquele aspecto diz respeito à acurácia da resposta numérica. Este aspecto tem relação com o comportamento do algoritmo e o acúmulo de erros ao longo de incrementos de tempo.

O amortecimento estrutural é uma medida de dissipação de energia que conduz a estrutura de um estado vibratório para um estado em repouso. Em geral, os sistemas estruturais estão sujeitos a certo grau de amortecimento decorrente da perda de energia pelo atrito, ar e outras resistências. O amortecimento de Rayleigh foi incorporado ao modelo estrutural, cuja matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez da estrutura.

Uma grande preocupação na dinâmica das estruturas refere-se à ocorrência de vibrações excessivas. Essas vibrações indesejáveis sob o prisma estrutural podem causar danos na estrutura, além do desconforto aos usuários. Verificações no estado limite de utilização devem ser realizadas por meio de análises dinâmicas considerando uma modelagem adequada para as ações solicitantes. Nesse sentido, destaca-se a importância da determinação das frequências naturais. Quando a frequência de uma carga dinâmica se iguala a uma das frequências naturais da estrutura, inicia-se o fenômeno de ressonância amplificando as deformações da mesma. As frequências naturais foram determinadas com o método de Jacobi e com a função *spec* do programa Scilab, havendo excelente concordância entre as respostas obtidas.

No último exemplo numérico foi realizada a análise dinâmica de um *shear building* de dois andares com a instalação do sistema de controle passivo AMS no seu topo. Os resultados numéricos mostraram a redução significativa dos deslocamentos da estrutura após a instalação desse sistema. O dispositivo AMS, composto por uma massa, uma mola e um amortecedor, utiliza a própria movimentação da estrutura para dissipar a energia devida à ação da carga dinâmica.

O modelo numérico-computacional e os estudos de caso descritos neste artigo apresentam aplicabilidade no campo educacional, uma vez que une conceitos da dinâmica estrutural a uma ferramenta computacional acessível e gratuita. O programa Scilab pode ser facilmente instalado em equipamentos disponíveis nos laboratórios de informática de instituições de ensino. Esse programa é considerado um ambiente de cálculo e permite a manipulação de dados e a automação de cálculos numéricos com a utilização de *scripts*.

A metodologia proposta apresenta interface com disciplinas da graduação e da pós-graduação nas áreas da física e das engenharias, particularmente nas disciplinas da dinâmica dos corpos rígidos, vibrações mecânicas, dinâmica das estruturas, entre outras. Os algoritmos descritos para as análises transiente e modal são relativamente simples de implementar computacionalmente.

A modelagem de estruturas do tipo *shear building* apresentada aqui pode auxiliar os estudantes dessas áreas na compreensão de sistemas mecânicos com amortecimento sujeitos a cargas dinâmicas, bem como no funcionamento de dispositivos de controle passivo de vibrações (por exemplo, o AMS) junto ao sistema estrutural principal. Os resultados quantitativos obtidos a

partir do estudos de caso podem ser validados por um procedimento experimental, que comprova a adequação do modelo numérico-computacional em representar o sistema real.

Por fim, os seguintes temas para pesquisa futura são sugeridos: a simulação e análise de outros sistemas para controle de vibração da estrutura, como os sistemas ativos, semiativos e híbridos; a análise inelástica do *shear building* utilizando as teorias da Mecânica do Dano e da Elastoplasticidade; e o efeito da interação solo-estrutura na fundação da estrutura.

Referências

- [1] L.V. Rossato, L.F.F. Miguel e L.F.F. Miguel, Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia **2**, 13 (2016).
- [2] M.J.S. Abad, M. Mahmoudi e E. Dowell, Scientia Iranica **27**, 3 (2020).
- [3] F. Rahimi, R. Aghayari e B. Samali, Civil Engineering Journal **6**, 1622 (2020).
- [4] J.H. Koo, A. Shukla e M. Ahmadian, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **13**, 9 (2008).
- [5] G.M. Almeida e C.E.N. Mazzilli, Revista IBRACON de Estruturas e Materiais **11**, 1 (2018).
- [6] DASSAULT SYSTÈMES, *Scilab, versão 2024.0.0*, disponível em <https://www.scilab.org/download/previous-versions>.
- [7] G.S. Dellacqua, R.S.S. Mothé, W.B. Silva e J.C.S. Dutra, Blucher Physics Proceedings **3**, 1 (2016).
- [8] E. Buksman, A.L. Oliveira, L. Barbieri e C. Ferreira, Revista Brasileira de Ensino de Física **41**, e20180356 (2019).
- [9] C. Medina e S. Velazco, Revista Brasileira de Ensino de Física **42**, e20200001 (2020).
- [10] E.J. Maia-Afonso e L.V. Dias, Journal of Exact Sciences **25**, 1 (2020).
- [11] E.E. Ashari, Research Journal of Recent Sciences **3**, 83 (2014).
- [12] M. Paz e W. Leigh, *Structural Dynamics: Theory and Computation* (Springer Science, New York, 2004), 5 ed.
- [13] M. Varanis, A.L. Silva e A.G. Mereles, Revista Brasileira de Ensino de Física **4**, e20180296 (2018).
- [14] M. Varanis, A.L. Silva e A.G. Mereles, Revista Brasileira de Ensino de Física **40**, e1304 (2018).
- [15] J. Liu, Z. Lu e M. Yu, Journal of Sound and Vibration **438**, 33 (2019).
- [16] A. Shmerling e R. Levy, Engineering Structures **187**, 428 (2019).
- [17] K. Roy, Structural Health Monitoring **22**, 4 (2023).
- [18] A. Yanik e Y. Ulus, Buildings **13**, 4 (2023).
- [19] K.L. Ryan e J. Polanco, Journal of structural engineering **134**, 11 (2008).
- [20] D. Pan, G. Chen e Z. Wang, Earthquake engineering and engineering vibration **13**, 4 (2014).
- [21] H.L. Soriano, *Introdução à dinâmica das estruturas* (Elsevier, Rio de Janeiro, 2014), 1 ed.
- [22] T. Liu, Q. Li e C. Zhao, Science China Physics, Mechanics and Astronomy **56**, 798 (2013).
- [23] M. Khatibinia, H. Gholami e R. Kamgar, International Journal of Dynamics and Control **6**, 1094 (2018).
- [24] J.P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations* (Dover Publications, New York, 1985).
- [25] A. Ocak, G. Bekdas e S.M. Nigdeli, em: *EUROGEN 2021* (Athens, 2021).
- [26] W. Kim e J.N. Reddy, International Journal of Computational Methods **18**, 08 (2021).
- [27] L.A.F. Souza e L.L. Verdade, Revista de Gestão Social e Ambiental **18**, 1 (2024).
- [28] N.M. Newmark, Journal of the Engineering Mechanics Division **85**, 3 (1959).
- [29] J. Chung e H.H. Yoo, Journal of Sound and vibration **249**, 1 (2002).
- [30] L.S. Santos, *Análise da influência de diferentes configurações de instalação de amortecedores de massa sobre um pórtico de estrutura metálica submetido a cargas dinâmicas*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa (2019).
- [31] M.C. Constantinou, T.T. Soong e G.F. Dargush, *Passive energy dissipation systems for structural design and retrofit* (Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research, New York, 1998).