

Aplicação do método das escalas múltiplas em física

(Application of the multiple scales method in physics)

Lucas Stori de Lara¹ e Taiza A. Sauer do Carmo

Universidade Federal do ABC, Santo André, SP, Brasil

Recebido em 11/5/2009; Revisado em 30/7/2009; Aceito em 14/9/2009; Publicado em 18/2/2010

Neste trabalho, concentramo-nos em um método específico na teoria de perturbação, o método das escalas múltiplas. Desenvolvido na mecânica clássica para o tratamento de equações diferenciais não-lineares, este método é aplicado como uma ferramenta matemática na descrição de efeitos perturbativos em vários sistemas físicos. Desta forma queremos mostrar a aplicação deste método, tanto no contexto clássico como quântico utilizando a equação de Duffing.

Palavras-chave: métodos assintóticos, método das escalas múltiplas.

In this work, we focus on a specific method of perturbation theory, the method of multiple scales. Developed in classical mechanics for the treatment of non-linear differential equations, this method is applied as a mathematical tool in the description of perturbative effects in several physical systems. Therefore, in order to exemplify this method, we apply it to the Duffing equation both in the classical and quantum contexts.

Keywords: .

1. Introdução

O método das escalas múltiplas (MEM) é um dos métodos assintóticos de grande eficiência. Seus desenvolvimentos principais incluem oscilações não-lineares, problemas de camadas limites, dinâmica dos fluídos, aerodinâmica e a teoria de movimento de astronave [1].

Diretamente, podemos dizer que o MEM tem como idéia central a transformação das equações diferenciais do problema a ser abordado, sendo ela linear ou não, em uma série de equações diferenciais lineares solúveis de forma iterativa.²

É importante ressaltar que este método não se restringe apenas aos domínios da física clássica, mas pode ser aplicado, considerando-se modificações adequadas, em problemas no campo da mecânica quântica, com o propósito de se obter soluções, tanto das equações de Heisenberg como da equação de Schrödinger [2].

Em problemas relacionados à óptica quântica, por exemplo, o MEM permite estudar de forma analítica o efeito da modulação da amplitude em um feixe monocromático, produzido pela excitação de um modelo de átomos acoplados através de dois lasers com frequências diferentes [3] como também em problemas relacionados com a interação e quantização em cavi-

dades quânticas com paredes oscilantes [2].

Em especial, aplicamos o MEM na solução de equações diferenciais lineares diretamente no problema de evolução temporal das soluções dinâmicas do tipo oscilador harmônico, tanto no tratamento clássico como quântico (eq. Duffing) [3, 4].

O MEM é um poderoso método perturbativo, pois analisa quantitativamente os comportamentos físicos característicos em diferentes escalas de tempo associadas a um dado sistema dinâmico.

2. Método das escalas múltiplas

Portanto, nesta seção, vamos considerar uma breve revisão dos aspectos gerais do MEM em problemas de física clássica e quântica. Em geral, para as equações diferenciais de sistemas não lineares, utilizam-se métodos assintóticos para se obter suas soluções aproximadas [5–7]. Um exemplo interessante é o do movimento oscilatório unidimensional sob ação de uma força restauradora (sistema massa-mola). Para este sistema consideramos a equação para a posição u do oscilador, dada na forma geral

$$\ddot{u} + f(u) = 0, \quad (1)$$

¹E-mail: lucas.lara@ufabc.edu.br.

²Iterativa no sentido que as soluções são obtidas de forma recorrente, ou seja, a correção em primeira ordem depende da solução em ordem zero; a correção em segunda ordem, depende das correções de ordem zero e um e assim sucessivamente.

onde $f(u)$ pode ser uma função linear ou não. Da equação acima podemos assumir equações do tipo oscilador harmônico, equação de Duffing etc. Portanto $f(u)$ é um caso geral onde podemos identificar o tipo de linearidade que a equação diferencial pode assumir em um determinado sistema físico.

Consideremos então os dois casos descritos pela equação de Duffing, sua versão clássica e quântica.

2.1. Equação de Duffing clássica

A equação de Duffing apresentou-se como um modelo físico concreto para a aplicação do método das escalas múltiplas. É uma equação importante no problema de oscilações não lineares [8], como por exemplo no estudo do oscilador anarmônico de massa unitária ($p = \dot{x}$), cuja hamiltoniana está dada por

$$H(x, p) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^4, \quad (2)$$

sujeito a condição $\varepsilon \ll 1$. Vamos aplicar o método das escalas múltiplas para um determinado problema de valor inicial. As equações do movimento deste sistema são dadas por

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H(x, p)\} = p, \quad (3)$$

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H(x, p)\} = -x - 4\varepsilon x^3, \quad (4)$$

$$\{K, H\} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial K}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x},$$

onde $\{g(x, p), H(x, p)\}$ são parênteses de Poisson.³ O sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem (3)-(4) pode ser reduzido a uma equação diferencial de segunda ordem, conhecida por equação de Duffing. Temos, então, para o sistema (2) a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + 4\varepsilon x^3 = 0, \quad (5)$$

onde $x(t)$ é a variável clássica para a posição. Para a Eq. (5) consideremos, por exemplo, as condições iniciais

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (6)$$

Nesta primeira análise, utilizamos uma solução usual para a equação de Duffing usando uma série de potências em termos do parâmetro ε [1], ou seja

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t). \quad (7)$$

Substituindo esta série na Eq. (5) obtemos as equações de ordem zero e um para o parâmetro ε

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = -4x_0^3, \quad (9)$$

onde não modificamos a ordem das derivadas, mas classificamos perante sua ordem de perturbação ε . Assim a solução geral para a Eq. (8) é da forma

$$x_0 = A \cos t + B \sin t, \quad (10)$$

e com as condições iniciais obtemos a solução

$$x_0(t) = \cos t. \quad (11)$$

Logo, substituindo a Eq. (11) na Eq. (9) obtemos a equação

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -4 \cos^3 t, \quad (12)$$

onde na Eq. (12) fazemos uso das seguintes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a, \end{aligned}$$

para simplificar o termo não homogêneo da equação diferencial. Dessa forma temos

$$-4 \cos^3 t = -\cos 3t - 3 \cos t,$$

que, substituído na Eq. (12), resulta na equação diferencial não homogênea na forma

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\cos 3t - 3 \cos t. \quad (13)$$

Mediante as condições iniciais (6) obtemos uma solução particular da Eq. (13)

$$x_{1p} = -\frac{1}{8} \cos t + \frac{1}{2} \cos^3 t - \frac{3}{2} t \sin t. \quad (14)$$

Facilmente verificamos que a solução (14) possui um termo secular dado por $t \sin t$. No limite $t \rightarrow \infty$, a solução particular é divergente, contrariando a condição física de que o sistema, expresso pela Eq. (5), tem uma energia finita: o sistema não está acoplado com nenhum potencial externo e portanto pode ser tratado como um sistema isolado com energia constante E_0

$$H(x, p) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \varepsilon x^4 = E_0.$$

Justificada a condição física para eliminarmos termos seculares, podemos considerar a expansão (7) sob o ponto de vista das escalas múltiplas.

A idéia principal é aplicar uma *transformação na equação diferencial* em estudo, sendo ela linear ou não, gerando uma série de *equações diferenciais lineares acopladas*. Para tornar mais explícito esta definição, o método define n variáveis T_n de tempo, dadas por

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad (15)$$

³O parênteses de Poisson de u e v pode ser definido como $\{u, v\} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$ onde x_i e p_i são variáveis dinâmicas conjugadas [9].

onde estas variáveis são interpretadas como *diferentes escalas de tempo* (múltiplas escalas) e tomadas como *independentes*, desde que o parâmetro ε assuma um valor pequeno, $\varepsilon \ll 1$.

Para estas diferentes escalas de tempo, observamos que a derivada total na variável t também deve ser reescrita em termos das derivadas parciais de T_n na forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots$$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (16)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \quad (17)$$

$$D_n = \frac{\partial^n}{\partial T_n^n}. \quad (18)$$

As derivadas são separáveis pela expansão dos termos, de acordo com diferentes ordens de potências de ε . Procurando uma solução aproximada para o problema até correções de primeira ordem no parâmetro ε ,⁴ tomemos $x(t, \varepsilon)$ como uma função das variáveis independentes T_0 e T_1 , onde $T_1 = \varepsilon t$, na forma

$$x(t, \varepsilon) = X_0(T_0, T_1) + \varepsilon X_1(T_0, T_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (19)$$

Substituindo a solução (19) na Eq. (5), tomamos para cada uma das ordens em ε as correspondentes equações diferenciais

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial T_0^2} + X_0 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} + X_1 = -4X_0^3 - 2 \frac{\partial^2 X_0}{\partial T_0 \partial T_1}. \quad (21)$$

Note que utilizamos a mudança de escala também nas ordens das derivadas $\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} = D_0^2$ e $\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} = 2D_0 D_1$, conforme a Eq. (17). Com este reescalonamento a resolução da Eq. (20) é bastante simples e sua solução é dada na forma

$$X_0(T_0, T_1) = A(T_1) \cos T_0 + B(T_1) \sin T_0, \quad (22)$$

substituímos a Eq. (22) na Eq. (21), considerando as amplitudes $A(T_1)$ e $B(T_1)$ como termos dependentes apenas de T_1 (as soluções estão sendo consideradas até primeira ordem). Resolvendo de forma explícita a Eq. (21) temos que

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} + X_1 = -4[A(T_1) \cos T_0 + B(T_1) \sin T_0]^3 - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} [A(T_1) \cos T_0 + B(T_1) \sin T_0],$$

que pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_1}{\partial T_0^2} + X_1 = & [B^3(T_1) - 3A^2(T_1)B(T_1)] \sin 3T_0 \\ & - [A^3(T_1) - 3B^2(T_1)A(T_1)] \cos 3T_0 \\ & - \left[3A(T_1)B^2(T_1) + 3A^3(T_1) + 2 \frac{\partial B(T_1)}{\partial T_1} \right] \cos T_0 \\ & - \left[3B(T_1)A^2(T_1) + 3B^3(T_1) - 2 \frac{\partial A(T_1)}{\partial T_1} \right] \sin T_0. \end{aligned}$$

Para determinarmos as amplitudes $A(T_1)$ e $B(T_1)$, é necessário identificar os termos seculares. No entanto, o que são estes termos seculares? Uma resposta plausível é verificada quando primeiramente estamos buscando soluções que não diverjam para tempos $t > 0$, pois interessa-nos soluções regulares para o nosso problema. Estes termos podem ser identificados e entendidos fazendo-se uma analogia ao problema da ressonância em um oscilador harmônico de frequência ω sujeito a ação de uma força externa $g \cos \varphi t$, cuja frequência da força aplicada φ iguala-se à frequência natural do oscilador. Para este sistema temos a equação do movimento para a posição y dada por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g \cos \varphi t. \quad (23)$$

A solução da equação homogênea é igual a

$$y_h(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t,$$

onde a_1 e a_2 são constantes arbitrárias. A solução particular y_p é uma função do tipo $t \sin \varphi t$ e t , onde a independência linear é respeitada. Então a solução particular da equação diferencial (23) tem a forma

$$y_p = \frac{g}{2\varphi} t \sin \varphi t. \quad (24)$$

Da solução (24) observamos que, no decorrer do tempo t , a amplitude do oscilador aumenta até alcançar uma amplitude limite, na qual o sistema colapsa antes da oscilação se tornar infinita [10]. É justamente este tipo de comportamento que deveremos eliminar na aplicação do método das escalas múltiplas, pois são os termos seculares que levam às soluções não regulares e devem portanto ser iguais a zero. Mediante esta justificativa, fica claro que os termos que envolvem $\sin T_0$ e $\cos T_0$, são parte da solução da equação homogênea associada. Com isto chegamos às seguintes equações seculares para $A(T_1)$ e $B(T_1)$

$$\frac{dB(T_1)}{dT_1} = -\frac{3}{2}A^3(T_1) - \frac{3}{2}A(T_1)B^2(T_1), \quad (25)$$

$$\frac{dA(T_1)}{dT_1} = \frac{3}{2}B^3(T_1) + \frac{3}{2}B(T_1)A^2(T_1). \quad (26)$$

Multiplicando a Eq. (25) por $B(T_1)$ e (26) por $A(T_1)$ estas equações podem ser reescritas na forma

$$\frac{1}{2} \frac{dB^2(T_1)}{dT_1} = -\frac{3}{2} [A^3(T_1)B(T_1) + A(T_1)B^3(T_1)],$$

⁴Pois para correção de ordem zero $\varepsilon = 0$, tem-se $T_0 = t$, ou seja, não está incluído o efeito anarmônico expresso pela equação de Duffing. Para isto deveremos ter pelo menos, $\varepsilon = \frac{dT_1}{dt} \ll 1$, correção em primeira ordem.

$$\frac{1}{2} \frac{dA^2(T_1)}{dT_1} = \frac{3}{2} [B^3(T_1)A(T_1) + B(T_1)A^3(T_1)],$$

e somando-se estas duas equações, encontramos que

$$\frac{1}{2} \frac{dB^2(T_1)}{dT_1} + \frac{1}{2} \frac{dA^2(T_1)}{dT_1} = 0,$$

ou

$$\frac{dC(T_1)}{dT_1} = 0, \quad (27)$$

onde $C(T_1)$ está definido como

$$C(T_1) = \frac{1}{2} [A^2(T_1) + B^2(T_1)]. \quad (28)$$

Portanto $C(T_1)$ é uma constante de movimento, de forma que atua como um invariante do sistema em relação a escala de tempo T_1 . Assim, reescrevemos as Eqs. (25) e (26) em termos de $C(T_1)$ de tal modo que

$$\frac{dB(T_1)}{dT_1} = -3C(0)A(T_1) \quad (29)$$

$$\frac{dA(T_1)}{dT_1} = 3C(0)B(T_1), \quad (30)$$

onde $C(0) = \frac{1}{2}$ é obtido a partir das condições (6) juntamente com as Eqs. (22) e (28). Consequentemente, as amplitudes $A(T_1)$ e $B(T_1)$ são dadas por $A(T_1) = \cos(\frac{3}{2}T_1)$ e $B(T_1) = -\sin(\frac{3}{2}T_1)$ que substituídas na equação diferencial descrita em termos de X_1 fornecem a solução particular, sem o termo secular,

$$X_1(T_0, T_1)_p = \frac{1}{9} \cos[(3T_0 + \frac{9}{2}T_1)], \quad (31)$$

como também a solução geral para $X_0(T_0, T_1)$,

$$X_0(T_0, T_1) = \cos[(T_0 + \frac{3}{2}T_1)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (32)$$

Portanto, o efeito anarmônico atua na correção de ordem um, ou seja, há uma mudança pequena na amplitude identificada pelos coeficientes $A(T_1)$ e $B(T_1)$, que substituídas na Eq. (22) temos a solução (32). Finalmente, com as soluções das Eqs. (22) e (31) temos para correção final em primeira ordem a seguinte solução geral

$$x(t, \varepsilon) = \cos[(t + \frac{3}{2}\varepsilon t)] + \frac{\varepsilon}{9} \cos[(3t + \frac{9}{2}\varepsilon t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)]. \quad (33)$$

Podemos verificar que a solução (32) é coerente com a solução direta na Eq. (14) a menos do um fator secular. Vamos prosseguir então a nossa análise para a equação de Duffing, agora para o caso quântico onde as coordenadas escalares dão lugar aos operadores posição \hat{x} e momenta \hat{p} , conforme os princípios da quantização canônica.

2.2. Equação de Duffing quântica

O análogo quântico do sistema clássico abordado na seção anterior está definido pela equação de Duffing quântica na forma

$$\frac{d^2 \hat{x}}{dt} + \hat{x} + 4\varepsilon \hat{x}^3 = 0, \quad (34)$$

e do mesmo modo que no caso clássico, é necessário estabelecer as condições iniciais para o problema. A Eq. (34) pode ser deduzida a partir do operador Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \hat{x}^2 + \varepsilon \hat{x}^4, \quad (35)$$

na representação de Heisenberg e eliminando o operador momento \hat{p} de modo similar ao procedimento realizado no caso clássico. Além disso, temos que $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ e $\hat{p}(0) = \hat{p}_0$ com a relação de comutação canônica

$$[\hat{x}_0, \hat{p}_0] = i\hbar. \quad (36)$$

Aplicamos o método das escalas múltiplas como solução geral do operador posição $\hat{x}(T_0, T_1)$, ou seja,

$$\hat{x}(T_0, T_1) = \hat{X}_0(T_0, T_1) + \varepsilon \hat{X}_1(T_0, T_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (37)$$

de forma que o operador posição do oscilador agora depende explicitamente de duas escalas de tempo *independentes*. Substituindo a Eq. (37) na Eq. (34) e separando os termos das diferentes ordens de ε , resulta

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_0}{\partial T_0^2} + \hat{X}_0 = 0, \quad (38)$$

e

$$\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial T_0^2} + \hat{X}_1 = -4\hat{X}_0^3 - 2\frac{\partial^2 \hat{X}_0}{\partial T_0 \partial T_1}. \quad (39)$$

A solução da Eq. (38) é bastante simples e de modo similar ao caso clássico é dada na forma

$$\hat{X}_0(T_0, T_1) = \hat{A}(T_1) \cos T_0 + \hat{B}(T_1) \sin T_0, \quad (40)$$

e de acordo com a Eq. (40) escrevemos também o operador momento em função de T_0 e T_1 como

$$\hat{P}_0(T_0, T_1) = \hat{B}(T_1) \cos T_0 - \hat{A}(T_1) \sin T_0. \quad (41)$$

A diferença fundamental entre o sistema clássico e quântico é que os termos independentes de T_0 são agora operadores e satisfazem a relação de comutação canônica

$$[\hat{A}(T_1), \hat{B}(T_1)] = i\hbar. \quad (42)$$

De acordo com as Eqs. (40) e (41) devemos ter para os operadores $\hat{A}(T_1)$ e $\hat{B}(T_1)$ as condições iniciais

$$\hat{A}(0) = \hat{x}_0, \quad \hat{B}(0) = \hat{p}_0.$$

Substituindo a solução (40) na Eq. (39) temos para o operador \hat{X}_1 , a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial T_0^2} + \hat{X}_1 = & -4[\hat{A}(T_1) \cos T_0 + \hat{B}(T_1) \sin T_0]^3 \\ & - 2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} [\hat{A}(T_1) \cos T_0 + \hat{B}(T_1) \sin T_0], \end{aligned}$$

que com a ajuda da relação de comutação (42) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial T_0^2} + \hat{X}_1 &= \left[\hat{B}^3(T_1) - \hat{F}(T_1) \right] \text{sen } 3T_0 \\ &\quad - \left[\hat{A}^3(T_1) - \hat{G}(T_1) \right] \text{cos } 3T_0 \\ &\quad - \left[\hat{G}(T_1) + 3\hat{A}^3(T_1) + 2\frac{\partial \hat{B}(T_1)}{\partial T_1} \right] \text{cos } T_0 \\ &\quad - \left[\hat{F}(T_1) + 3\hat{B}^3(T_1) - 2\frac{\partial \hat{A}(T_1)}{\partial T_1} \right] \text{sen } T_0. \end{aligned}$$

onde $\hat{F}(T_1) = \hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) + \hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)$ e $\hat{G}(T_1) = \hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) + \hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)$. Para determinarmos os operadores amplitudes $\hat{A}(T_1)$ e $\hat{B}(T_1)$, é necessário identificar os termos seculares. O que é trivial, pois como no caso clássico também recaímos nos termos que envolvem $\text{sen } T_0$ e $\text{cos } T_0$. Com isto chegamos a uma relação do tipo

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{B}(T_1)}{dT_1} &= \frac{1}{2}[-3\hat{A}^3(T_1) - \hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) \\ &\quad - \hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) - \hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{B}(T_1)], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}(T_1)}{dT_1} &= \frac{1}{2}[3\hat{B}^3(T_1) + \hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1) \\ &\quad + \hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{B}(T_1) + \hat{B}(T_1)\hat{A}(T_1)\hat{A}(T_1)]. \end{aligned} \quad (44)$$

Estas equações podem ser reescritas definindo um operador $\hat{C}(T_1)$ como,

$$\hat{C}(T_1) = \frac{1}{2}(\hat{A}^2(T_1) + \hat{B}^2(T_1)), \quad (45)$$

pois, aplicando $\hat{B}(T_1)$ na Eq. (43) e $\hat{A}(T_1)$ na Eq. (44) e somando-as mutuamente, obtemos uma equação para o operador $\hat{C}(T_1)$ na forma

$$\frac{d\hat{C}(T_1)}{dT_1} = 0. \quad (46)$$

Assim, utilizando as relações de comutação canônica expostas pelas condições iniciais e pela equação de comutação em (42), podemos reescrever as Eqs. (43) e (44) de um modo mais simplificado, utilizando a forma da Eq. (45) para o operador $\hat{C}(T_1)$. Ainda observamos que ele é uma constante, tal qual $\hat{C}(T_1) = \hat{\alpha}$. Logo

$$\frac{d\hat{B}(T_1)}{dT_1} = -\frac{3}{2}[\hat{\alpha}, \hat{A}(T_1)]_+ \quad (47)$$

e

$$\frac{d\hat{A}(T_1)}{dT_1} = -\frac{3}{2}[\hat{\alpha}, \hat{B}(T_1)]_+ \quad (48)$$

onde $[\hat{\alpha}, \hat{A}(T_1)]_+$ e $[\hat{\alpha}, \hat{B}(T_1)]_+$ são conhecidos como anticomutadores [4]. As soluções para estas equações diferenciais são dadas por

$$\hat{A}(T_1) = \hat{A}(0) \text{cos } 3\hat{\alpha}T_1 + \hat{B}(0) \text{sen } 3\hat{\alpha}T_1, \quad (49)$$

$$\hat{B}(T_1) = \hat{B}(0) \text{cos } 3\hat{\alpha}T_1 - \hat{A}(0) \text{sen } 3\hat{\alpha}T_1, \quad (50)$$

e de acordo com as condições iniciais, a solução para $\hat{X}_0(T_1, T_0)$ é tal que

$$\begin{aligned} \hat{X}_0(T_1, T_0) &= [\hat{A}(0) \text{cos } 3\hat{\alpha}T_1 + \hat{B}(0) \text{sen } 3\hat{\alpha}T_1] \text{cos } T_0 \\ &\quad + [\hat{B}(0) \text{cos } 3\hat{\alpha}T_1 - \hat{A}(0) \text{sen } 3\hat{\alpha}T_1] \text{sen } T_0. \end{aligned}$$

Uma vez que $T_1 = \varepsilon T_0$, podemos reescrever a solução utilizando o ordenamento de Wely [11] (ver apêndice A) na forma

$$\begin{aligned} \hat{X}_0(T_1, T_0) &= \frac{\hat{x}_0 \text{cos}(T_0 + 3\varepsilon\hat{\alpha}T_0) + \text{cos}(T_0 + 3\varepsilon\hat{\alpha}T_0)\hat{x}_0}{2 \text{cos}(3\varepsilon T_0 \frac{\hbar}{2})} \\ &\quad + \frac{\hat{p}_0 \text{sen}(T_0 + 3\varepsilon\hat{\alpha}T_0) + \text{sen}(T_0 + 3\varepsilon\hat{\alpha}T_0)\hat{p}_0}{2 \text{cos}(3\varepsilon T_0 \frac{\hbar}{2})} \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (51)$$

O método pode ser aplicado a qualquer sistema dinâmico e fornece uma solução aproximada para descrever o comportamento do mesmo, ao menos nos primeiros instantes do movimento.

3. Conclusão

Em síntese, mostramos que o método das escalas múltiplas transforma as equações diferenciais do problema a ser abordado, sendo ela linear ou não, em uma série de equações diferenciais *lineares* solúveis de forma *iterativa*. Como vimos, a identificação das ordens de perturbações do problema fornecem os elementos necessários para a correta determinação das equações diferenciais. Para a equação de Duffing, apresentamos um valor muito pequeno para a perturbação ($\varepsilon \ll 1$), cujos efeitos estão inteiramente determinados por suas amplitudes $A(T_1)$ e $B(T_1)$.

A Ordenamento de Wely

De acordo com as soluções (49) e (50) vamos utilizar o ordenamento de Wely para o produto de operadores

$$\hat{A}(T_1) = \hat{A}(0) \text{cos } 3\hat{\alpha}T_1 + \hat{B}(0) \text{sen } 3\hat{\alpha}T_1, \quad (52)$$

$$\hat{B}(T_1) = \hat{B}(0) \text{cos } 3\hat{\alpha}T_1 - \hat{A}(0) \text{sen } 3\hat{\alpha}T_1, \quad (53)$$

onde utilizaremos uma nova notação: $\mathcal{W}[\hat{x}_0 f(\hat{\alpha}T_1)]$, onde $\hat{A}(0) = \hat{x}_0$ e $f(\hat{\alpha}T_1)$ uma função. Nosso objetivo agora é a simplificação formal da solução e para voltar a reescreve-la em uma forma fechada. Os senos e cosenos

são combinações lineares das funções exponenciais, assim, primeiramente vamos considerar o ordenamento de Wely como uma expansão de operadores como

$$\mathcal{W}(\hat{x}_0 e^{\hat{\alpha} T_1}) = \mathcal{W} \left[\hat{x}_0 \left(1 + \hat{\alpha} T_1 + \frac{1}{2!} (\hat{\alpha} T_1)^2 + \dots \right) \right], \quad (54)$$

Para cada potência de T_1 nos ordenamos os operadores para comutar com \hat{x}_0 simetricamente. Assim podemos identificar os seguintes produtos de operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\hat{x}_0) &= \hat{x}_0 = \frac{1}{2}(\hat{x}_0 + \hat{x}_0) \\ \mathcal{W}(\hat{x}_0 \hat{\alpha}) &= \frac{1}{2}(\hat{x}_0 \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \hat{x}_0) = \frac{\hbar}{2} \left(\hat{x}_0 \frac{\hat{\alpha}}{\hbar} + \frac{\hat{\alpha}}{\hbar} \hat{x}_0 \right) \\ \mathcal{W}(\hat{x}_0 \hat{\alpha}^2) &= \frac{\hbar^2}{2} \left[\hat{x}_0 \left(\frac{\hat{\alpha}^2}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{\hat{\alpha}^2}{\hbar^2} - \frac{1}{4} \right) \hat{x}_0 \right] \end{aligned}$$

e seguem as demais ordens. Generalizando, nós identificamos alguns polinômios de Euler [12], assim o ordenamento de Wely pode ser escrito na forma compacta como

$$\mathcal{W}(\hat{x}_0 e^{\hat{\alpha} T_1}) = \frac{\hat{x}_0 e^{\hat{\alpha} T_1} + e^{\hat{\alpha} T_1} \hat{x}_0}{2 \cosh(T_1 \hbar / 2)} \quad (55)$$

logo utilizando a transformação da exponencial em senos e cosenos obtemos

$$\mathcal{W}(\hat{x}_0 \cos 3\hat{\alpha} T_1) = \frac{\hat{x}_0 \cos 3\hat{\alpha} T_1 + \cos 3\hat{\alpha} T_1 \hat{x}_0}{2 \cos(3T_1 \hbar / 2)} \quad (56)$$

$$\mathcal{W}(\hat{x}_0 \sin 3\hat{\alpha} T_1) = \frac{\hat{x}_0 \sin 3\hat{\alpha} T_1 + \sin 3\hat{\alpha} T_1 \hat{x}_0}{2 \cos(3T_1 \hbar / 2)} \quad (57)$$

Agradecimentos

Os autores agradecem a UFABC pelo apoio financeiro. E LSL, agradece ao prof. Dr. Antonio Sérgio M. de Castro, pela orientação e discussões acadêmicas.

Referências

- [1] A.H. Nayfeh, *Perturbation Methods* (John Wiley e Sons, Nova York, 1973).
- [2] M. Janowicz, Phys. Reports **375**, 327 (2003).
- [3] L.S. Lara, *Excitação Paramétrica Quântica em Modos Acoplados*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2007.
- [4] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Nova York, 1994); C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloce, *Quantum Mechanics, v. I* (John Wiley e Sons, Nova York, 1977); J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, Nova York, 1965).
- [5] C.M. Bender and L.M.A. Bettencourt, Phys. Rev. Lett **77**, 20 (1996).
- [6] C.M. Bender and L.M.A. Bettencourt, Phys. Rev. D **54**, 12 (1996).
- [7] A.H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques* (John Wiley & Sons, Nova York, 1981).
- [8] J. Kevorkian and J.D. Cole *Perturbation Methods in Applied Mathematics, v. 34* (Springer-Verlag, Nova York, 1981).
- [9] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1980).
- [10] K.D. Machado, *Equações Diferenciais Aplicadas À Física* (Editora UEPG, Ponta Grossa, 2000).
- [11] Hong-Yi Fan, Commun. Theor. Phys. **48**, 823 (2007).
- [12] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I.A. Stegun (Dover, Nova York, 1970), chap. 23.