

# Comentário do Artigo “Sobre a Dinâmica de Partículas Carregadas em Campos Elétrico e Magnético Estáticos”

Comment on Article “On Dynamic of Charged Particles in Electric and Magnetic Statics Fields”

I. G. Albuquerque<sup>1</sup>, F. M. A. Guimarães<sup>1</sup>, J. L. Castro<sup>1</sup>,  
K. B. S. Xavier<sup>1</sup>, L. R. Leite<sup>\*1</sup>, J. P. M. Braga<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Campus dos Palmares, Acarape, CE, Brasil

Recebido em 25 de Janeiro de 2019. Revisado em 21 de Junho de 2019. Aceito em 04 de Julho de 2019.

Neste trabalho ajustes são realizados em algumas equações do artigo “Sobre a Dinâmica de Partículas Carregadas em Campos Elétrico e Magnético Estáticos”, publicado nesta revista em 2017 [1]. Nossos cálculos mostram que (i) no caso particular 1, a trajetória circular da partícula carregada acontece em um quadrante diferente; (ii) no caso particular 2, a trajetória da partícula deve ser deslocada para o semieixo negativo de  $y$  e (iii) no caso particular 3 mostramos a necessidade da troca dos eixos estudados bem como o sinal de uma das equações, o que modifica a trajetória da partícula carregada. Com estes três ajustes mencionados, agora as equações da trajetória passam a obedecer a regra da mão direita.

**Palavras-chave:** Movimento de Cargas. Campos Elétrico e Magnético. Trajetória.

In this work corrections are performed in some equations from the article “On Dynamic of Charged Particles in Electric and Magnetic Statics Fields”, published on this journal in 2017 [1]. Our calculations shows that (i) in the particular case 1, the circular trajectory of the charged particle happens in a different quadrant; (ii) in the particular case 2, particle’s trajectory should be displaced to the  $y$  negative semi-axis and (iii) in the particular case 3 we shown that there is a necessity to change the axis studied as well as the sign of one of the equations, modifying the trajectory of the charged particle. With these three mentioned corrections, now the equations of the trajectory starts to obey the right-hand rule.

**Keywords:** Charge Motion. Electric and Magnetic Fields. Trajectory.

## 1. Comentário

### 1.1. Solução das Equações de Movimento: Caso Geral

O problema tratado em [1] consiste em uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  em uma região de campo magnético e elétrico, ambos estáticos e homogêneos. A força resultante sobre essa partícula é a força de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1)$$

onde considerou-se como condições iniciais

$$\vec{r}(0) = (0, 0, 0) \text{ e } \vec{v}(0) = (v_1(0), v_2(0), v_3(0)). \quad (2)$$

Além disso, fez-se a suposição de que o campo magnético só tinha componente  $z$ . Dessa forma, de acordo com a Segunda Lei de Newton, as componentes da aceleração da partícula são assim escritas

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = \frac{q}{m} \left( \frac{dx_2(t)}{dt} B + E_1 \right), \quad (3)$$

$$\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = -\frac{q}{m} \left( \frac{dx_1(t)}{dt} B - E_2 \right), \quad (4)$$

\*Endereço de correspondência: levi@unilab.edu.br

$$\frac{d^2x_3(t)}{dt^2} = \frac{q}{m} E_3. \quad (5)$$

A equação (5) está desacoplada das equações (3) e (4). Determinando sua solução, temos

$$x_3(t) = v_3 t + \frac{qE_3}{m} \frac{t^2}{2}. \quad (6)$$

Aplicando a transformada de Laplace nas equações (3) e (4) respectivamente, obtemos

$$\xi^2 \chi_1(\xi) - v_1 = \frac{q}{m} \left( B \xi \chi_2(\xi) + \frac{E_1}{\xi} \right), \quad (7)$$

$$\xi^2 \chi_2(\xi) - v_2 = \frac{q}{m} \left( -B \xi \chi_1(\xi) + \frac{E_2}{\xi} \right). \quad (8)$$

Definindo  $\omega_0 = qB/m$  e  $\gamma_k = qE_k/m$ , aplicamos a Transformada de Laplace Inversa, obtendo

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega_0^2} [A_1 - C_2 \cos(\omega_0 t) + C_1 \sin(\omega_0 t)], \quad (9)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega_0^2} [A_2 + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)], \quad (10)$$

onde

$$A_1 = \gamma_1 + \omega_0(v_2 + \gamma_2 t) , \tag{11}$$

$$A_2 = \gamma_2 - \omega_0(v_1 + \gamma_1 t) , \tag{12}$$

$$C_1 = \omega_0 v_1 - \gamma_2 , \tag{13}$$

$$C_2 = \omega_0 v_2 + \gamma_1 . \tag{14}$$

Nossas soluções, equações (6), (9) e (10), mostram que para  $C_1 = C_2 = 0$  e  $E_3 = 0$  obtemos um movimento retilíneo uniforme com velocidade  $\vec{v}_d = \left( \frac{E_2}{B}, -\frac{E_1}{B}, 0 \right) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ . Essa velocidade é conhecida como velocidade de deriva da partícula carregada e é importante no estudo da física dos plasmas [2,3]. Observe que a mesma é nula se  $\vec{E} = 0$ , além de ser perpendicular tanto ao campo elétrico quanto ao campo magnético e independente da massa e da carga da partícula. Comparando as equações (11)-(14) com as equações (15)-(17) de [1], verifica-se que as constantes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  estão trocadas. Seguindo a proposta de [1], analisaremos três casos particulares. Conforme veremos, os casos particulares 1 e 2, por se tratarem de situações de campo elétrico nulo, não envolvem as constantes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , mesmo assim esses casos apresentam erros de cálculos que precisam ser corrigidos. Por outro lado, o caso particular 3 é afetado por essa troca das constantes.

## 1.2. Casos Particulares

### 1.2.1. Caso Particular I

Consideramos uma partícula em uma região contendo apenas campo magnético de tal forma que  $\vec{v}(0) \perp \vec{B}$  com  $\vec{v}(0) = (v_1, v_2, 0)$ . Aplicando as condições iniciais nas equações (9) e (10) temos

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega_0} [v_2(1 - \cos(\omega_0 t)) + v_1 \sin(\omega_0 t)] , \tag{15}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega_0} [v_1(\cos(\omega_0 t) - 1) + v_2 \sin(\omega_0 t)] , \tag{16}$$

onde observamos na equação (16) que o termo  $(\cos(\omega_0 t) - 1)$  substituí o termo  $(1 + \cos(\omega_0 t))$  na equação (19) de [1]. As equações (15) e (16) podem ser postas na forma

$$\left( x_1 - \frac{v_2}{\omega_0} \right)^2 + \left( x_2 + \frac{v_1}{\omega_0} \right)^2 = \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{\omega_0^2} . \tag{17}$$

Diferente de [1], encontramos a equação de uma circunferência cujo centro encontra-se no quarto quadrante, isto é, com coordenadas  $x > 0$  e  $y < 0$ . Isto pode ser melhor visualizado se considerarmos o caso particular em que  $v_2 = 0$ . Nesse caso, como o campo magnético aponta na direção do semieixo  $z$  positivo, a força magnética no instante  $t = 0$  será dada por  $\vec{F}(0) = qv_1 \hat{x} \times B\hat{z} = -qv_1 B\hat{y}$ , que deflete a trajetória da partícula para o semieixo  $y$  negativo, agora concordando com a regra da mão direita.

### 1.2.2. Caso Particular II

Consideramos agora que a partícula possui velocidade  $\vec{v}_0 = (v_1, 0, v_3)$ , e que os campos elétrico e magnético obedecem, respectivamente, as condições  $\vec{E} = \vec{0}$ , e  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . Aplicando estas condições iniciais nas Eqs. (6), (9) e (10), obtemos

$$x_1(t) = \rho_L \sin(\omega_0 t) , \tag{18}$$

$$x_2(t) = \rho_L (\cos(\omega_0 t) - 1) , \tag{19}$$

$$x_3(t) = v_3 t , \tag{20}$$

onde a equação (19) está diferente da equação (25) de [1], fazendo-se necessária a correção de  $\cos(\omega_0 t) + 1 \rightarrow \cos(\omega_0 t) - 1$ . É possível compreender que  $x_2(t) < 0$ , pois  $-1 < \cos(\omega_0 t) < 1$ . Mais uma vez observa-se que agora o resultado obtido respeita a regra da mão direita, levando justamente a uma trajetória deslocada para o negativo do eixo  $y$ .

Uma nova Fig. 3 foi omitida aqui, pois curiosamente a Fig. 3 mostrada em [1] reflete justamente as equações (18), (19) e (20) deste artigo. No entanto, vale ressaltar que a Fig. 3, de acordo com a equação (25) obtida em [1], deveria mostrar a partícula executando uma trajetória tal que  $x_2(t) > 0$ .

### 1.2.3. Caso Particular III

Agora consideramos que a partícula está em uma região sujeita a um campo elétrico e magnético que estão perpendiculares entre si, tal que  $\vec{E} = (E_1, 0, 0)$  e  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . A velocidade da partícula é considerada tal que  $\vec{v}_0 = (v_1, 0, 0)$ . Assim as equações (11)-(14) podem ser escritas como

$$A_1 = \gamma_1 , \tag{21}$$

$$A_2 = -\omega_0(v_1 + \gamma_1 t) , \tag{22}$$

$$C_1 = \omega_0 v_1 , \tag{23}$$

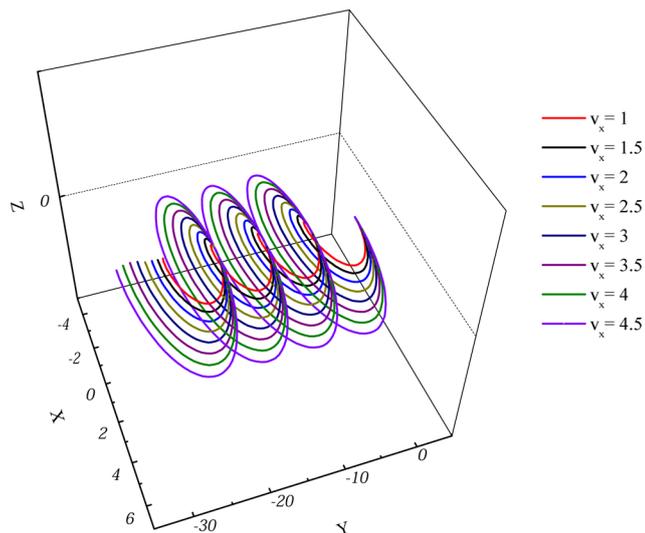
$$C_2 = \gamma_1 . \tag{24}$$

De tal modo que as Eqs.(9) e (10) se tornam

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega_0^2} [\omega_0 v_1 \sin(\omega_0 t) + \gamma_1 (1 - \cos(\omega_0 t))] , \tag{25}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega_0^2} [\omega_0 v_1 (\cos(\omega_0 t) - 1) + \gamma_1 (\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t)] . \tag{26}$$

A Fig. 1 ilustra a trajetória da partícula considerando as equações corrigidas (25) e (26), onde podemos observar a existência da velocidade de deriva dada, nesse caso particular, por  $\vec{v}_d = -\frac{E_1}{B} \hat{x}$ . Esse resultado está de acordo com a expressão geral  $\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$  e se opõe ao que é mostrado na Fig. 4 de [1] que apresenta uma velocidade de deriva na direção do semieixo  $x$  positivo.



**Figura 1:** Trajetória da partícula como resultado da particularização no caso 3. Considera-se que  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \omega_0) = (1, 0, 0, 1)$ .

Finalmente, considerando  $v_1 = 0$ , temos

$$x_1(t) = \frac{qE_1}{m\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t)) , \tag{27}$$

$$x_2(t) = \frac{qE_1}{m\omega_0^2}(\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t) . \tag{28}$$

Podemos observar que as equações (27) e (28) são diferentes das equações (34) e (35) obtidas em [1]. A primeira diferença que mencionamos é que a equação (27), obtida para  $x_1(t)$ , é obtida em [1] para a coordenada  $x_2(t)$ , na equação (35). A segunda diferença que observamos é vista comparando a equação (28), referente a  $x_2(t)$ , com a equação (34) de [1], com relação a  $x_1(t)$ . Observamos que, além do índice da coordenada diferente, o sinal da equação também deve ser modificado. Assim como no Caso Particular II, a correção das equações permitiu que a regra da mão direita fosse obedecida.

## Referências

- [1] M.L. Medeiros e L.C. Santos, Revista Brasileira de Ensino de Física **39**, e1302 (2017).
- [2] J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982).
- [3] O. Chapurin e A. Smolyakov, J. Appl. Phys. **119**, 243306 (2016). evisado