

Velocidade limite c

Speed limit c

Jose Rodolfo Chreim^{*1}, Reinaldo Luiz Cavasso Filho²

¹Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, São Paulo, SP, Brasil

²Universidade Federal do ABC, Centro de Ciências Naturais e Humanas, Santo André, SP, Brasil

Recebido em 07 de Dezembro, 2018. Aceito em 20 de Fevereiro, 2019.

Neste artigo, é proposta uma nova maneira de ensinar estudantes de graduação que a velocidade de luz c é um limite físico para corpos materiais. Dois diferentes ‘*gedankenexperimente*’, conceitualmente equivalentes, baseados em princípios de eletrodinâmica básica são propostos e discutidos, chegando à mesma conclusão de que se um corpo material ultrapassasse a velocidade da luz, fenômenos fisicamente não realísticos como a atração de partículas com o mesmo sinal ocorreriam. Um dos experimentos apresentados é de tamanha simplicidade que permite inclusive a estudantes de ensino médio e ingressantes do ensino superior entenderem o limite superior para velocidade, sem utilizar conceitos da Relatividade Especial.

Palavras-chave: eletromagnetismo, ensino de física, relatividade restrita, velocidade da luz, velocidade limite.

A novel approach to teaching undergraduate students that the speed of light c is a physical limit to material bodies is presented in this article. Two different, however conceptually equivalent, ‘*gedankenexperiments*’ leading to the same conclusions are presented and discussed. The experiments are grounded on concepts from electrodynamics and have led to the same results that, if a material body trespassed the limiting velocity c , unrealistic physical phenomena such as attraction of same charge particle systems would then happen. The experiments presented herein are of such simplicity that they are capable of making high-school and entry-level undergraduate physics students understand the abstract concept of an upper-limit for velocity without even entering Special Relativity Theory.

Keywords: electromagnetism, Physics teaching, Special relativity, speed of light, limiting speed.

1. Introdução

Geralmente, estudantes de graduação aprendem, em cursos introdutórios, que a velocidade da luz c é um valor limite assintótico que corpos materiais podem atingir. Esta conclusão foi revolucionária do ponto de vista da física clássica e apresenta uma série de conclusões contraintuitivas da mecânica como a contração do espaço e a dilatação do tempo [1]. O conceito de velocidade limite é usualmente apresentado através do famoso ‘*gedankenexperiment*’ (um experimento fictício) da caixa de Einstein, proposto em 1906 [2] para demonstrar a relação entre a energia total E de um corpo e sua massa inercial m .

Recordemos brevemente este experimento: Considere um sistema fisicamente isolado composto de uma caixa fechada de massa m_c e comprimento L , as outras duas dimensões irrelevantes. Inicialmente o sistema encontra-se em repouso até que uma quantidade de fótons com energia E_f é emitida pelo interior da caixa, a partir do lado esquerdo no sentido do lado direito da caixa, conforme a Figura 1.

O grupo de fótons, apesar de não possuir massa inercial transporta consigo *momentum* p_f que pode ser expresso

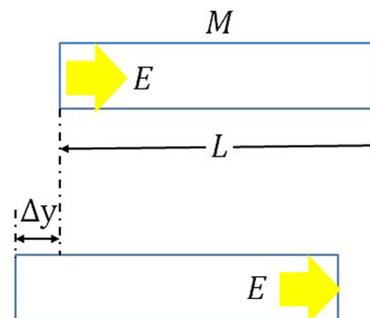


Figura 1: Representação esquemática para o ‘*gedankenexperiment*’ da caixa de Einstein.

matematicamente como:

$$p_f = \frac{E_f}{c} \quad (1)$$

e, dado que o sistema é isolado, a caixa adquire *momentum* p_c igual a:

$$p_c = -\frac{E_f}{c} \quad (2)$$

*Endereço de correspondência: jrchreim@outlook.com.

Da dinâmica newtoniana, o *momentum* p de um corpo pode ser escrito como:

$$p = mv \quad (3)$$

Igualando-se as expressões (2) e (3), a velocidade da caixa pode ser escrita como:

$$m_c v_c = -\frac{E_f}{c} \rightarrow v_c = -\frac{E_f}{m_c c} \quad (4)$$

onde o sinal negativo indica que ela viaja em direção oposta a do grupo de fótons. Porque fótons não possuem massa, é esperado que $v_c \ll c$. Adicionalmente seu tempo de viagem de uma extremidade a outra da caixa é aproximado por:

$$\Delta t \approx \frac{L}{c} \quad (5)$$

Ao atingirem a outra extremidade, os fótons transferem *momentum* para a caixa, igual em valor e de sentido oposto ao que ocorreu quando a irradiação foi emitida. Isto traz a caixa ao estado de repouso novamente. A ocorrência deste fenômeno move a caixa de uma distância Δy em relação à sua posição inicial:

$$\Delta y \approx v_c \Delta t = -\frac{E_f L}{m_c c^2} \quad (6)$$

Como o sistema é isolado, a localização de seu centro de massa não pode ser alterada e a única forma desta condição ser garantida é se a energia transportada por irradiação possuir um equivalente m_f em massa. Então, m_f pode ser obtida através da definição do centro de massa:

$$m_c \Delta y + m_f L = 0 \rightarrow m_f = -\frac{m_c \Delta y}{L} \quad (7)$$

Utilizando-se da expressão obtida para Δy (6), chegamos a:

$$m_f = \frac{E_f}{c^2} \rightarrow E_f = m_f c^2 \quad (8)$$

A equação(8) apesar de simples, possui significado importante: ela relaciona a massa inercial de um corpo com sua energia. A análise permite concluir que um corpo que emite radiação tem sua massa reduzida de uma fração $\frac{E_f}{c^2}$, proporcional à energia irradiada. Ela também permite concluir que um corpo tem sua massa aumentada de $\frac{E_f}{c^2}$ quando recebe radiação. A conclusão pode ainda ser estendida para relacionar a energia total E que um corpo em movimento possui com sua massa inercial m na forma:

$$E = mc^2 \quad (9)$$

Do teorema trabalho-energia cinética, pode-se escrever [2]:

$$dE = \frac{dp}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dp = v dp \quad (10)$$

e combinando as equações (3) e (9) e utilizando-as em (10):

$$E dE = c^2 p dp \quad (11)$$

Integrando-se esta expressão:

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 \quad (12)$$

Com E_0 uma constante de integração, fisicamente denominada de *energia de repouso*. Novamente com o uso da expressão (3), pode-se finalmente escrever:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13)$$

Para pequenos valores de velocidade ($v \ll c$), a expressão (13) pode ser expandida binomialmente:

$$E = E_0 + \frac{1}{2} \frac{E_0}{c^2} v^2 \quad (14)$$

Verifique que o segundo dos termos representa a energia cinética clássica de um corpo, de acordo com a mecânica Newtoniana:

$$K = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (15)$$

O que implica em $m_0 = E_0/c^2$. A esta massa inercial clássica, chamaremos de *massa de repouso*. Finalmente, utilizando-a na expressão (13) se obtém:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (16)$$

E, igualando-se as expressões (9) e (16), se obtém uma relação entre a massa inercial relativística e a massa de repouso:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

De acordo com a expressão (17), a massa inercial relativística altera-se com a velocidade, aumentando com o aumento de v . Este é um conceito contraintuitivo, dado que se espera, pela mecânica clássica, que a massa de um objeto seja invariante.

A relação (16) representa o valor da energia total de um corpo que movimenta-se com velocidade v . Observe que à medida que v aumenta, a energia que deve ser fornecida ao corpo tende ao infinito, no limite $v \rightarrow c$. Como consequência da demanda infinita de energia, a expressão acaba estabelecendo um limite para a velocidade do corpo como sendo c , e velocidades acima da velocidade da luz levariam a valores de energia no domínio dos números complexos, uma situação claramente não-física.

A velocidade da luz como um limite físico é uma das conclusões mais importantes advindas da Teoria da Relatividade Especial. Entretanto, não é uma conclusão

facilmente compreendida por estudantes do ensino médio, ou mesmo por ingressantes de cursos superiores. Este conceito, apesar de matematicamente simples, apresenta dificuldades em sua apresentação, relacionadas tanto com o entendimento do ‘*gedankenexperiment*’ de Einstein como com as ideias abstratas que relacionam a energia e inclusive a massa inercial de um corpo em termos de sua velocidade. Esta nova ‘cara’ da energia é de difícil aceitação, e a introdução de novos conceitos como massa inercial e limite de velocidade acaba por confundir os estudantes, acostumados com a formulação clássica.

Visto esta dificuldade, apresentamos neste artigo uma nova forma de mostrar aos estudantes c como limite físico fundamental, sem a necessidade da utilização de conceitos da Relatividade Especial. A velocidade da luz está de fato ‘escondida’ nas equações básicas do Eletromagnetismo Clássico. Geralmente, ao final de cursos introdutórios as equações de Maxwell são combinadas de modo a dar origem a um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, as chamadas *equações de onda eletromagnéticas* [1]. Estas equações mostram que qualquer perturbação eletromagnética no vácuo se propaga com velocidade $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, mas este resultado se limita a ondas eletromagnéticas, não sendo feita correlação alguma com a velocidade que corpos materiais podem atingir. Mostraremos agora que este limite aparece com a proposta de um *gedankenexperiment* muito simples que utiliza de conceitos básicos do eletromagnetismo. Nas próximas seções, serão apresentadas duas diferentes formulações para o experimento fictício, ambas levando às mesmas conclusões.

2. Primeira formulação: Um par elétron-próton viajando no espaço com velocidade \vec{v}_s

Considere um sistema constituído de um par elétron-próton separados por uma distância d e viajando com velocidade v_s , ao longo da direção \hat{j} , conforme mostra a Figura 2.

Considerando que a única força atuante sobre o elétron é a força de Lorentz devido aos campos elétrico e magnético gerados pelo próton, podemos escrevê-la matematicamente como:

$$\vec{F}_{p+e-} = -e \left(\vec{E} + \vec{v}_s \times \vec{B} \right) = -\vec{F}_{e-p+} \quad (18)$$

sendo a contribuição elétrica $\vec{F}_E = -e\vec{E}$ e a contribuição magnética $\vec{F}_B = -e\vec{v}_s \times \vec{B}$. Na equação (18), \vec{B} é o campo magnético gerado pelo próton na posição ocupada pelo elétron naquele instante de tempo, expresso de acordo com a lei de Biot-Savart [3] como:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{I} \times \vec{d}}{d^3} \quad (19)$$

Particularmente neste caso, o elemento de corrente $d\vec{I} = id\vec{s}$ pode ser escrito como $\frac{dq}{dt}d\vec{s} = e\frac{d\vec{s}}{dt} = e\vec{v}_s$, de modo

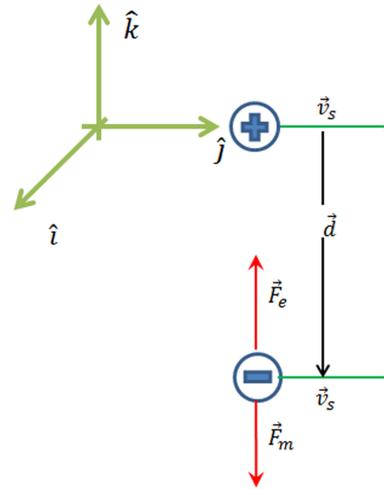


Figura 2: Representação esquemática da primeira formulação apresentada para o ‘*gedankenexperiment*’: Par elétron-próton viajando paralelamente com velocidade \vec{v}_s .

que a expressão final para o campo magnético fica:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{|\vec{v}_s \times \vec{d}|}{d^3} \hat{i} \quad (20)$$

Já o campo elétrico gerado pelo próton também na posição ocupada pelo elétron no mesmo instante de tempo é dado pela lei de Coulomb:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{d^2} \hat{k} \quad (21)$$

Substituindo-se as expressões (20) e (21) na expressão (18), chegamos a:

$$\vec{F}_{p+e-} = \frac{e^2}{4\pi d^2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 v_s^2 \right) \hat{k} \quad (22)$$

Observe que a parcela da força magnética sempre aponta na direção contrária à contribuição elétrica. Adicionalmente, apesar de a contribuição elétrica depender apenas do inverso do quadrado da distância que separa as cargas, a contribuição magnética depende não somente disto, mas também da velocidade a qual o sistema elétron-próton viaja. Para velocidades abaixo da velocidade da luz c , a magnitude desta última força, de caráter repulsivo, é sempre menor do que a magnitude da contribuição elétrica, atrativa. Ambas as parcelas tornam-se iguais em magnitude quando a seguinte condição acontece:

$$\vec{0} = \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 v_s^2 \right) \hat{k} \quad (23)$$

Ou, equivalentemente:

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (24)$$

exatamente a definição teórica para c . Se por um momento fosse assumido que a condição $v_s > c$ pudesse

acontecer, o que se esperaria seria uma força resultante repulsiva agindo no sistema elétron-próton, dado que a contribuição magnética seria maior que a elétrica. Dessa forma, a natureza deve possuir algum mecanismo que impeça que corpos materiais ultrapassem este limite. Do contrário, átomos que constituem um corpo qualquer viajando com velocidade maior do que c sofreriam os efeitos do fenômeno mencionado acima, consequentemente formando duas regiões eletricamente distintas: uma constituída de prótons e nêutrons e outra formada por uma aglutinação de elétrons. Esta consequência pode ser mais bem visualizada ao se pensar no mesmo problema descrito inicialmente, desta vez com um próton no lugar do elétron. Nesta situação, para a condição $v_s > c$, uma força atrativa seria então sentida pelo par próton-próton, fazendo com que estes colapsassem.

Mesmo que o resultado final esteja de acordo com o esperado e mostre que v_s não pode ser maior do que c , um comentário deve ser feito a respeito da formulação proposta: Quando uma partícula move-se no tempo e espaço, ambos os campos magnético e elétrico gerados por ambas as partículas não são dados pelas expressões (20) e (21), mas assumem uma forma mais geral. Na verdade, estes campos para uma velocidade constante v_s são [3]:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_s^2 \sin^2 \theta}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{v}_s \times \vec{d}}{d^3} \tag{25}$$

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{v_s^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_s^2 \sin^2 \theta}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{d}}{d^3}$$

com θ o ângulo formado pelos vetores \vec{d} e \vec{v}_s . Como é de se esperar, para $v_s \ll c$ estas equações se reduzem a (20) e (21). Para o problema em particular, temos que $\theta = \frac{\pi}{2}$, o que faz com que estas equações também se reduzam a (20) e (21). Desta maneira, apesar da expressão mais geral ser omitida, o uso das equações para \vec{B} e \vec{E} na forma mais simples não é incorreto, nem mesmo hipóteses errôneas são feitas a respeito do sistema. A consequência desta simplificação é que não se faz necessário o conhecimento detalhado da dinâmica das partículas para a análise apresentada.

3. Segunda formulação: Um fio infinito, conduzindo corrente elétrica \vec{I} , e um elétron viajando paralelo a este com velocidade \vec{v}_s

Uma segunda formulação é proposta caso o leitor não se sinta confortável com a omissão da forma mais geral das equações para o campo magnético e elétrico de

uma partícula pontual se movendo no espaço com velocidade constante, equações (25). Esta segunda formulação, embora necessite de noções mais avançadas de matemática, como cálculo diferencial e integral, está seguramente restrita ao uso das noções básicas de eletrodinâmica fundamental. Considere um sistema composto de um fio reto infinito carregando uma corrente uniforme \vec{I} e um elétron movendo-se paralelamente ao fio, conforme mostrado na Figura 3.

Este fio não pode se tratar de um condutor neutro, como comumente apresentado nos livros didáticos, mas deve possuir densidade linear de carga λ , de modo que não exista nele carga estacionária oposta e de igual magnitude. Assim, ao se tomar uma seção infinitesimal do fio e calculando o campo magnético $d\vec{B}$ produzido por \vec{I} a uma distância \vec{r} , de acordo com a lei de Biot-Savart, temos:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{I} \times \vec{r}}{r^3} \tag{26}$$

E dadas as variáveis definidas na Figura 3, podemos escrever:

$$\begin{aligned} d\vec{I} &= i d\vec{s} = i ds \hat{j} \\ \vec{r} &= s \hat{j} - d \hat{k} \\ d\vec{I} \times \vec{r} &= -id (ds) \hat{i} \end{aligned} \tag{27}$$

Com o auxílio das relações trigonométricas a seguir:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{s^2 + d^2} \\ s &= d \tan \theta \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \\ ds &= d \sec^2 \theta d\theta \end{aligned} \tag{28}$$

Chega-se à relação para o campo magnético infinitesimal:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi d} \cos \theta d\theta \hat{i} \tag{29}$$

Dado que o fio é infinito, no limite de $r \rightarrow \pm\infty$ temos $\theta \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$. Então, integrando-se a equação (29), sabendo

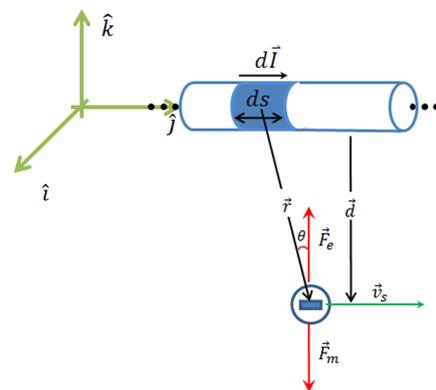


Figura 3: Representação esquemática da segunda formulação apresentada para o ‘gedankenexperiment’: Um fio infinito carregando corrente uniforme e um elétron movendo-se paralelamente a este.

que $i := \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{ds} \frac{ds}{dt} = \lambda v_s$, $\lambda := \frac{dq}{ds}$, e assumindo que os portadores de carga presentes no fio também viajam com velocidade v_s , chegamos ao campo magnético total \vec{B} produzido pelo fio:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \lambda v_s}{2\pi d} \hat{i} \quad (30)$$

Mesmo que o fio de corrente seja um sistema físico cujos portadores de carga movem-se no espaço, na média este sistema pode ser visto como em estado estacionário. Por este motivo, medições de carga (ou, equivalentemente de corrente ou tensão) em qualquer localização ao longo de seu comprimento seriam na média constantes no espaço e tempo. Portanto, as leis da eletrostática permanecem válidas e, dessa maneira, se calcularmos o campo elétrico produzido pela porção infinitesimal do fio, utilizando a lei de Coulomb, chegamos a:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r} \quad (31)$$

Utilizando das mesmas relações trigonométricas em (28), obtemos:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d^2} d\theta (d \sin \theta \hat{j} - d \cos \theta \hat{k}) \quad (32)$$

Mais uma vez, no limite $r \rightarrow \pm\infty$, $\theta \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$ e integrando-se a equação (32), obtemos o campo elétrico total criado pelo fio infinito:

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{k} \quad (33)$$

Um elétron viajando paralelamente ao fio a uma distância d estaria, então, sob a ação de ambos os campos magnético e elétrico ao longo de todo o seu trajeto. A força resultante sobre o elétron pode ser novamente obtida com o auxílio da Lei de Lorentz. Substituindo-se ambas as expressões finais para \vec{B} (30) e \vec{E} (33) na equação (18), chegamos a seguinte expressão para a força líquida agindo sobre o elétron:

$$\vec{F}_{f+e^-} = \frac{e\lambda}{2\pi d} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 v_s^2 \right) \hat{k} \quad (34)$$

Para que, novamente, a força resultante seja nula, a mesma condição dada em (23) deve ocorrer. Isto novamente se traduz na expressão (24). Note que, a partir de (34), se hipoteticamente $v_s > c$, a intensidade da força magnética se tornaria maior que a da força elétrica e o elétron, portanto, seria repelido para longe do fio. Assim, a mesma situação não-realística do experimento anterior ocorreria. Mais ainda, a substituição do elétron por um próton também levaria à mesma conclusão de anteriormente: cargas de mesmo ‘sinal’ se atrairiam. Estes resultados são consistentes e podem ser usados como uma segunda formulação ao nosso ‘*gedankenexperiment*’.

4. Conclusão

No intuito de facilitar a compreensão de alunos ingressantes de cursos de ensino superior no abstrato conceito da velocidade da luz como um limite fundamental a corpos materiais, foram propostas duas formulações similares de um ‘*gedankenexperiment*’ que têm como resultado final este conceito. Os experimentos propostos têm fundamentação embasada puramente em conceitos básicos de eletromagnetismo, e uma das formulações é de tamanha simplicidade que pode inclusive ser apresentada a estudantes do ensino médio, por não fazer uso de ferramentas matemáticas sofisticadas. As conclusões obtidas por ambos os experimentos são exatamente as mesmas e, portanto, eles fornecem uma alternativa bem-sucedida ao experimento da caixa de Einstein, que relaciona a energia relativística de um corpo com sua velocidade, como a forma a qual o conceito de velocidade limite é costumeiramente apresentado.

Referências

- [1] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentals of Physics extended* (John Wiley & Sons, Jefferson City, 2010), 9ª ed.
- [2] A.P. French, *Special Relativity* (CRC Press, New York, 1968).
- [3] D.J. Griffiths e R. College, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall Upper Saddle River, New Jersey, 1999), 3ª ed.