

Estruturas causais

(Causal structures)

Manuela G. Rodrigues¹

Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, Santo André, SP, Brasil

Recebido em 27/5/2012; Aceito em 14/11/2012; Publicado em 1/3/2013

Quase todas as informações que temos do cosmos chegaram até nós através de ondas eletromagnéticas de uma forma ou de outra. Para interpretar as informações recebidas, precisamos entender o que acontece com a luz neste caminho. Para isto, analisamos as estruturas causais com intuito de dissolver as dúvidas e mal entendidos com respeito aos horizontes cosmológicos.

Palavras-chave: horizontes cosmológicos, universo em expansão, energia escura.

Almost all the information we have of the cosmos came to us through electromagnetic waves in one form or another. To interpret the information received, we must understand what happens to light in this way. For this, we analyzed the causal structures with intent to dissolve the doubts and misunderstandings with respect to the cosmological horizons.

Keywords: cosmological horizons, expanding universe, dark energy.

1. Introdução

O cenário cosmológico modificou-se muitos nos últimos anos. Desde os anos 90, fortes evidências observacionais vêm se acumulando, mostrando que o Universo é espacialmente plano, dominado por uma energia e matéria escuras e passa por uma fase de expansão acelerada. A observação de efeitos de lentes gravitacionais constitui não somente evidência da matéria escura, como também uma confirmação da Teoria da Relatividade Geral sobre o comportamento da luz. Do mesmo modo, a descoberta da expansão acelerada surgiu com a medida da luminosidade aparente das supernovas do tipo Ia [1, 2].

Estas informações vieram até nós como fótons e este caminho pode ser compreendido através das estruturas causais que definem as conexões entre os eventos acontecendo no Universo e nós.

Um evento é um acontecimento no espaço-tempo. Você tomar um café á tarde, quando estudar começa pesar-lhe, é um evento. Em qualquer espaço-tempo, um evento ocorre em uma posição única e em um instante de tempo único. Um evento nada mais é que um ponto no espaço-tempo. Este evento pode evoluir ao longo do tempo, assim podemos descrever uma sequência de pontos, ou melhor, de eventos acontecendo no espaço-tempo. Esta sucessão de pontos descreve um linha a qual denominamos linha do Universo ou linha mundo do processo físico. Em outras palavras, o caminho per-

corrido por uma partícula livre ou um fóton no espaço-tempo é denominado linha mundo [3].

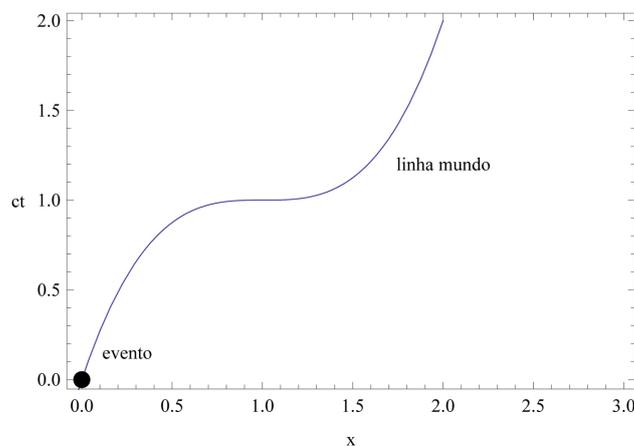


Figura 1 - Evolução de um determinado processo físico ao longo do espaço-tempo - linha mundo.

Vejamos, você tomou uma xícara de café, encontrou seus amigos na cantina, conversou, voltou a estudar e compreendeu a matéria. Esses eventos desenvolvem-se sob uma linha mundo que descreve a evolução temporal dessa parte do seu dia, embora cada um deles, separadamente constitua uma linha mundo diferente.

Esta evolução temporal dos acontecimentos leva a um conceito importante, a noção de causalidade. Sabemos que toda causa tem um efeito, e que a estrutura

¹E-mail: manuela.rodrigues@ufabc.edu.br.

temporal, a evolução do tempo acontece num sentido único; com isto um efeito não pode anteceder sua causa.

Na Relatividade Especial (RE), cada partícula livre ou fóton se move retilineamente e com velocidade constante, num cenário localmente inercial, ou seja, se move em linha reta. Na Relatividade Geral (RG), a gravidade é descrita como uma modificação na geometria, produzindo uma curvatura no espaço-tempo devido a presença de matéria, e os fótons percorrem caminhos curvos e não retilíneos. Dizemos neste caso, que os fótons movem-se em linha reta em cada cenário localmente inercial ao longo do caminho, o que significa que o caminho é retilíneo apenas localmente. Este caminho tão reto quando possível descrito pelos fótons em RG é uma geodésica. A geodésica é o menor caminho ou menor comprimento medido entre dois pontos, o que significa uma linha retilínea quando consideramos um plano. Com isto, existe apenas uma geodésica em cada direção. De modo geral, uma linha mundo se desenvolve ao longo de uma geodésica [3-5].

Para entender a linha mundo é necessário um sistema de coordenadas que a descreva evoluindo e um fator de escala. O fator de escala é a medida da expansão do Universo parametrizada para as distâncias observadas hoje, dado por

$$a(t) = \frac{r(t)}{r(t_0)}, \quad (1)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala, t_0 é o tempo de referência, que pode ser o tempo presente, e $r(t_0) = r_0$ é a distância no tempo de referência [6-8]. Em geral, considera-se no presente, $a(t) = 1$, assim, o fator de escala mede quanto menor eram as distâncias físicas no passado, quando comparadas com a distâncias medidas no presente. Pode-se comparar o fator de escala com o tamanho da uma régua centimetrada, em que o centímetro possui 1 unidade de medida nos tempos atuais, mas no passado, este valor era menor, ou seja, o quanto vale um centímetro muda com o tempo. O fator de escala pode ser medido, também em termos do redshift, z ,

$$a(t) = (1 + z)^{-1}. \quad (2)$$

e depende do modelo cosmológico utilizado.

A outra consideração importante é sobre o sistema de coordenadas. Um sistema de coordenadas comóveis, é aquele que acompanha a expansão do Universo, tal que um observador estacionário que participa desta expansão terá a mesma coordenada em todos os instantes. Neste sistema, as distâncias, $\chi(t)$, relativas a um dado objeto que acompanha a expansão cosmológica, são escalonadas utilizando-se como base as distâncias observadas hoje $\chi(t_0)$, de tal forma que $\chi(t) = a(t)\chi(t_0)$ [3, 6, 9]. Um observador que esteja fora deste sistema de coordenadas, não acompanha a expansão e sim a observa, de modo que, verá as distâncias aumentando. Estas distâncias são denominadas próprias. Embora

as distâncias comóveis não sejam observadas diretamente, a luz que captamos acompanhou a expansão do Universo e por isto, sempre escolhemos utilizar estas distâncias.

As distâncias comóvel e própria são definidas, respectivamente, como $D_0 = r_0\chi$ e $D(r) = r(t)\chi$ [9].

Do mesmo modo, podemos definir formas de medir o tempo. Quando o observador está em repouso em relação a um evento, o tempo medido é o tempo próprio e quando este se move em relação ao evento, o tempo é dito tempo conforme [3], dado por

$$d\tau = \frac{dt}{r(t)}. \quad (3)$$

Embora o espaço-tempo seja independente do observador, precisamos escolher um sistemas de coordenadas conveniente que o descreva. Cada evento é descrito por quatro coordenadas, sendo três delas espaciais e uma temporal. Por simplicidade, vamos considerar o Universo estático, com uma geometria Euclidiana, ou seja, um espaço-tempo plano, descrito pelo elemento de linha de Minkowski,

$$ds^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = cdt^2 - d\mathbf{x}^2. \quad (4)$$

Quando $ds^2 > 0$ temos que $cdt^2 > d\mathbf{x}^2$. A velocidade é definida como $\vec{v} = d\vec{x}/dt$, assim, $c > \mathbf{v}$. Este tipo de linha mundo é chamada de tipo-tempo, pois a parte temporal é maior que a parte espacial. Para $ds^2 < 0$, temos linhas mundo tipo-espaco, pois a parte espacial é maior que a parte temporal, tal que $c < \mathbf{v}$. Em $ds^2 = 0$, temos linhas tipo-luz, e $c = \mathbf{v}$ [3]. Para o Universo plano, homogêneo e isotrópico, quando $ds^2 = 0$,

$$\int_0^{r_0} dr = \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}, \quad (5)$$

temos a distância de luminosidade.

As estruturas causais de um espaço-tempo determinam como os eventos se desenvolvem em relação a causa e efeito. Assim, as linhas mundo nos permitem descrever regiões causalmente conectadas ou não. As estruturas causais são: cone de luz, horizonte de partículas, horizonte de eventos e esfera de Hubble.

2. Estruturas causais

1. Cone de Luz

Cada evento no Universo define um cone de luz. A parte interior do cone é descrita por linhas mundo tipo-tempo, ou seja, uma região do espaço-tempo na qual a velocidade da luz é maior que qualquer outro objeto, e os eventos dentro desta região são causalmente relacionados. A parte exterior ao cone temos uma região com linhas mundo tipo-espaco, na qual a velocidade da luz é menor que a de outros objetos, o que viola um dos princípios

da RG, assim, dois eventos nesta região são separados por um intervalo tipo-espaço e não têm relação causal [3–5,9].

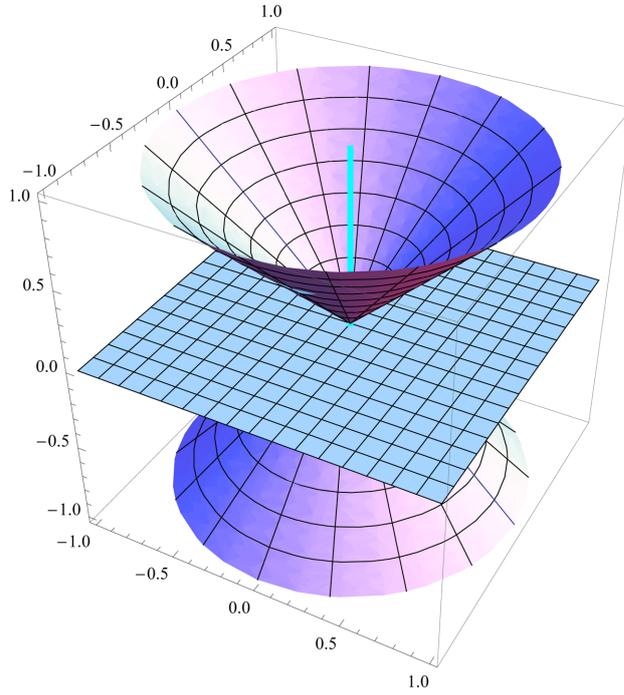


Figura 2 - Cone de luz passado e futuro. A linha amarela sob a superfície do cone é uma linha tipo-luz. Dentro do cone, qualquer linha mundo é tipo-tempo, e fora do cone de luz, toda linha mundo é tipo-espaço.

A linha delimitadora entre as duas regiões é uma linha tipo-luz, onde objetos se movem na velocidade da luz, como por exemplo fótons. As linhas tipo-luz descrevem o cone no espaço-tempo, tanto do passado como do futuro. Todos os eventos que observamos hoje estão dentro do cone de luz.

Para visualizá-lo, escrevemos a Eq. (5) com os limites apropriados,

$$\chi_{CL}(t_{em}) = c \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (6)$$

onde χ é a coordenada comóvel associada a um objeto observado hoje, como por exemplo, uma galáxia, t_0 é o tempo atual e t_{em} é o tempo no qual um sinal luminoso foi emitido.

2. Horizonte de partículas

As linhas mundo são o caminho construído pelos eventos. O horizonte de partículas está relacionado com a observação de linhas mundo. Ele marca o tamanho do nosso Universo observável, a distância até o mais distante objeto que poderemos ver em qualquer tempo. Assim, em cada momento, o horizonte de partículas é descrito por uma esfera em torno de um observador, cujo raio

é igual a distância do objeto mais longe que se pode observar, ou seja, o horizonte de partículas se encontra a uma distância igual ao raio do Universo observável [3–5,9].

O horizonte de partículas pode ser construído resolvendo

$$\chi_{HP}(t) = c \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (7)$$

3. Horizonte de Eventos

O horizonte de eventos está relacionado com a observação dos eventos e estabelece uma divisão entre os eventos que são observáveis em algum instante e os que nunca serão observados, por nunca se encontrarem no interior de algum cone de luz passado do observador. Se algum sinal luminoso for emitido por um objeto, fora do horizonte de eventos, ele nunca será observado, entretanto, este objeto será visto dentro do horizonte de partículas devido aos sinais que emitiu antes de sair do horizonte de eventos.

A distância do horizonte de eventos é definida pela distância que os fótons percorreram desde o início do Universo, durante o tempo de vida do Universo [3–5,9] e pode ser obtido por

$$\chi_{HE}(t) = c \int_t^{t_{final}} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (8)$$

4. Esfera de Hubble

A esfera de Hubble é a distância além da qual a velocidade de recessão das galáxias excede a velocidade da luz. Isto não viola a RE porque o movimento não é em qualquer referencial inercial, considerando a expansão do Universo. Assim, ela não define um horizonte, pois podemos observar galáxias além deste limite. A Eq. (9) permite a visualização da esfera de Hubble [3–5,9].

$$\chi_{HE}(t) = \frac{c}{\dot{a}(t)}. \quad (9)$$

Da lei de Hubble, $v_{rec} = HD$, sendo $H = \dot{a}(t)/a(t)$ o parâmetro de Hubble, a distância comóvel pode ser escrita como $D = c/H$.

3. Discussão

Vamos agora, considerar um modelo cosmológico, de modo a descrever o Universo mais realístico possível. O Modelo Λ CDM (Λ Cold Dark Matter), descreve o Universo espacialmente plano, com matéria escura fria, ou seja, não relativística, e constante cosmológica Λ representando a energia escura, tal que matéria e energia escura são não-interagentes, com equação de estado $\omega = p/\rho$. A densidade é a soma das densidades de matéria, incluindo matéria escura ($\rho_M \propto a^{-3}$), e energia escura ($\rho_\Lambda \propto a^{-3-3(1+\omega)}$), $\rho = \rho_M + \rho_\Lambda$ [6–8].

As equações de Friedmann são as componetes espaciais das equações de Einstein e pode ser escritas em termos das densidades, tal que,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_{M_0} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 + \rho_{\Lambda_0} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3(1+\omega)} \right), \quad (10)$$

onde o subíndice 0 indica o presente. Podemos re-escrever em função dos parâmetros de densidade, $\Omega = \rho/\rho_c$. ρ_c , é a densidade necessária para frear a expansão, denominada densidade crítica. Considerando os componentes do Universo, $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, temos

$$\dot{a}(t) = a_0 H_0 \left[1 + \Omega_M \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Podemos analisar a distância comóvel através do tempo e do tempo conforme, como pode ser visto nas

Figs. (3) e (4) [9]. Fazendo

$$\frac{dt}{r(t)} = \frac{da}{\dot{a}(t) a(t)}, \quad (12)$$

assim,

$$D_0 = c \int \frac{da}{H_0 a} \left[1 + \Omega_M \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

e

$$t = \int \frac{da}{H_0} \left[1 + \Omega_M \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

A distância própria ($D(r) = r(t) \chi$) pode ser analisada na Fig. (5).

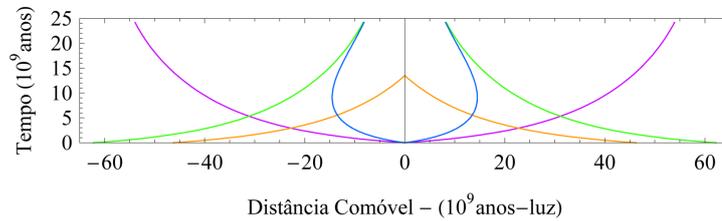


Figura 3 - Distância comóvel através do tempo, com $c = 3,0 \cdot 10^5$ km/s, $H_0 = 70$ km.s⁻¹.Mpc⁻¹, $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $\Omega_M = 0,3$. A linha verde representa o horizonte de eventos; a linha azul, a esfera de Hubble; a linha laranja, o cone de luz passado; e a linha roxa, o horizonte de partículas.

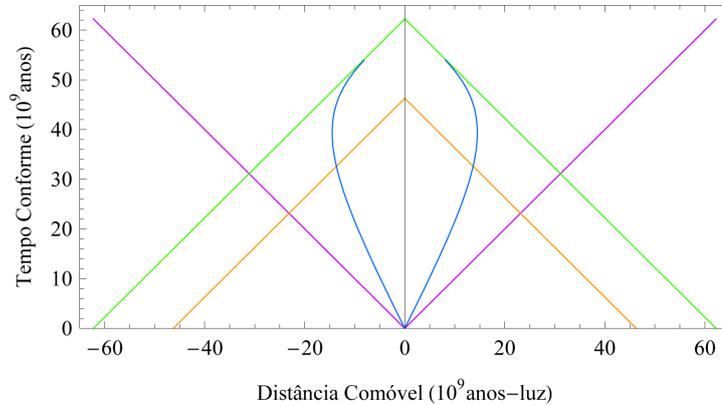


Figura 4 - Distância comóvel através do tempo conforme, com $c = 3,0 \cdot 10^5$ km/s, $H_0 = 70$ km.s⁻¹.Mpc⁻¹, $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $\Omega_M = 0,3$. A linha verde representa o horizonte de eventos; a linha azul, a esfera de Hubble; a linha laranja, o cone de luz passado; e a linha roxa, o horizonte de partículas.

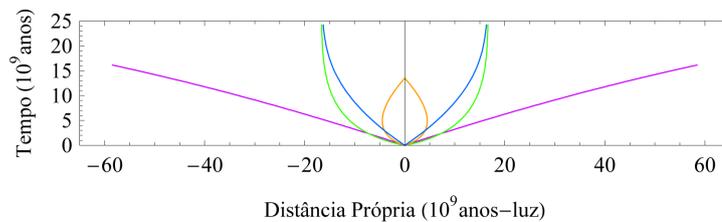


Figura 5 - Distância própria através do tempo, com $c = 3,0 \cdot 10^5$ km/s, $H_0 = 70$ km.s⁻¹.Mpc⁻¹, $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $\Omega_M = 0,3$. A linha verde representa o horizonte de eventos; a linha azul, a esfera de Hubble; a linha laranja, o cone de luz passado; e a linha roxa, o horizonte de partículas.

Vejam os Fig. (3), o horizonte de partículas é maior que o horizonte de eventos. Embora não possamos ver objetos além do horizonte de eventos, podemos ver galáxias além dele devido à luz que elas emitiram tempos atrás. Estas galáxias estavam dentro do horizonte de eventos, num Universo em expansão, hoje elas estão fora, mas estavam dentro do horizonte de eventos quando emitiram luz e por isto podem ser vistas. Elas serão vistas para sempre, entretanto o que vemos é o passado delas. Se o Universo não estivesse em expansão elas nunca sairiam do horizonte de eventos. Notamos também que o horizonte de eventos está diminuindo devido a expansão acelerada.

Todos os sinais observados hoje foram emitidos quando o objeto emissor estava dentro do cone de luz e hoje está obrigatoriamente dentro do horizonte de partículas, caso esteja também dentro do horizonte de eventos seus sinais emitidos hoje serão vistos eventualmente, no entanto, se estiverem fora, os sinais emitidos hoje nunca serão visto, ou seja, os sinais observados desta fonte serão os sinais emitidos até o momento em que saiu do horizonte de eventos e passaremos a observá-los no momento em que este objeto adentrar o horizonte de partículas. Em qualquer instante o cone de luz passado está dentro do horizonte de eventos, e no limite de tempo tendendo ao infinito, os dois coincidem.

Uma confusão que é feita sobre horizonte de partículas é dizer que este é a linha mundo do objeto mais distante ou que é a linha mundo da radiação cósmica de fundo, embora não possamos ver além da superfície do último espalhamento, onde $z \approx 1.100$ [9]. Esta linha mundo pode dizer a distância que este objeto se encontra, mas não o tamanho do Universo observável.

Outra definição erroneamente dada é que, a diferença entre horizonte de eventos e horizonte de partículas é que o primeiro significa uma barreira no espaço e o segundo, uma barreira no espaço-tempo. Ambos os horizontes dizem respeito ao espaço-tempo e não podemos separá-los desse modo [9].

Pelo formato da curva do cone de luz na Fig. (5), vemos que na origem do tempo, todos os pontos no Universo estavam causalmente conectados, o que explica a isotropia da radiação cósmica de fundo, provenientes de regiões não conectadas atualmente devido ao período de expansão acelerada. Comparando o formato do cone de luz na Fig. (5) com o formato na Fig. (3), vemos que todos os pontos comóveis do Universo estavam em um ponto físico somente, o que explica sua conexão causal.

Entendemos também nos gráficos, porque a esfera de Hubble não é um horizonte. Ela se encontra dentro do horizonte de partículas e por isto objetos localizados dentro da esfera são obrigatoriamente observados, mas regiões fora da esfera também podem ser observados. Objetos fora da esfera de Hubble podem emitir fótons

e estes podem ultrapassar a esfera de Hubble, deixando de ser superluminal e eventualmente, adentrar algum cone de luz e nos alcançar. Logo, não é uma região de barreira e não limita o que podemos ou não ver.

Localizando dois objetos, um dentro e outro fora da esfera de Hubble, que emitem ao mesmo tempo um sinal luminoso; como a distância comóvel pode ser escrita como $D = c/H$, e o parâmetro de Hubble, $H = 1/t$, o objeto fora da esfera está a uma distância maior, então deve estar, necessariamente com uma velocidade de recessão maior do que a velocidade da luz.

Na Fig. (4), vemos que no futuro, o horizonte de eventos, cone de luz e esfera de Hubble coincidirão em $D = 0$, isto mostra que devido à expansão acelerada, somente eventos ocorridos a distâncias comóveis cada vez menores nos atingirão, ou seja, o tamanho do Universo com conexão causal está diminuindo, embora, devido à expansão, o horizonte de partículas, ou melhor, o tamanho do nosso Universo observável esteja aumentando. Caso a expansão acelerada cesse, poderemos ver eventos emitidos no futuro de objetos cujos eventos não observamos hoje, exatamente como ocorreu no período inflacionário.

Num Universo estacionário, não faz sentido a distinção entre as estruturas causais. Se ele fosse estacionário desde o princípio, todos os eventos ocorridos em qualquer tempo, sempre seriam vistos, no entanto, se ele se tornasse estacionário hoje, os horizontes coincidiriam com o cone de luz futuro, pois estariam limitados somente pela velocidade da luz.

Referências

- [1] A.G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998), S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999). P.J.E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [2] E.J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
- [3] W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmological* (Oxford, 2006).
- [4] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou, A.N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists* (Cambridge, 2006).
- [5] R.M. Wald, *General Relativity* (Chicago, 1984).
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (1972).
- [7] S.M. Carroll, *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity* (2004).
- [8] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* **380**, 235 (2003).
- [9] T.M. Davis and C.H. Lineweaver, *Astronomical Society of Australia* **21**, 97 (2004), M.G. Rodrigues, *Acreção de Matéria Exótica por Buracos Negros*. Tese de Doutorado, Unicamp, 2009.