

Estudo de filtros RC para baixas e altas frequências por meio de um circuito para superposição de sinais (*Study of low-pass and high-pass RC filters by means of a circuit for signal superposition*)

N. Carlin, E.M. Szanto, R. Ichiwaki¹, F.O. Jorge, W.A. Seale e F.A. Souza

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 16/2/2009; Revisado em 24/8/2009; Aceito em 31/8/2009; Publicado em 26/3/2010

Apresentamos nesse trabalho, um experimento realizado nos Laboratórios didáticos do Instituto de Física da USP, relacionado ao estudo do funcionamento de filtros RC para baixas e altas frequências. Para tal, foi especialmente projetado um circuito que efetua a superposição de um sinal gerado internamente, a uma onda senoidal externa. Várias situações experimentais podem ser geradas, por meio da variação da frequência, tanto do sinal interno quanto da onda senoidal externa. Um estudo das componentes de frequência de Fourier é também realizado para se estabelecer os parâmetros de funcionamento dos filtros. O funcionamento dos circuitos como integradores e diferenciadores também é explorado. Os estudantes são, portanto, levados a compreender a eficácia desses filtros mais simples, dependendo das frequências dos sinais de entrada e correspondentes componentes de Fourier, e das frequências de corte estabelecidas.

Palavras-chave: filtros RC, frequência de corte, análise de Fourier.

In this work we present an experiment performed in the undergraduate laboratories at the University of São Paulo Physics Institute. It is related to the study of low-pass and high-pass RC filters. For this purpose, we designed and constructed a circuit for the superposition of an internally generated signal and an external sinusoidal signal. An investigation of the Fourier frequency components is also performed in order to establish working parameters for the RC filters. The operation of the circuits as integrators and differentiators is also explored. The students are therefore led to understand how efficient these circuits can be depending on the frequency and Fourier components of the entrance signals, as well as the cutoff frequencies previously defined.

Keywords: RC filters, cutoff frequency, Fourier analysis.

1. Introdução

O experimento a ser apresentado faz parte de uma filosofia adotada nas disciplinas experimentais de eletricidade, magnetismo e óptica no Instituto de Física da USP, a qual consiste de experimentos cuja finalidade é a de explorar de forma mais profunda os conceitos físicos e procedimentos experimentais, assim como aplicações desses conceitos. O experimento é realizado pelos alunos durante 3 aulas, cada uma com aproximadamente 4 horas de duração.

Na primeira aula, os conceitos do formalismo de números complexos para o tratamento das defasagens entre os sinais no resistor e capacitor são apresentados e um estudo do ganho de um circuito passa-baixa é realizado, em função da frequência de uma onda senoidal como sinal de entrada. Na segunda aula, são introduzidos os conceitos de filtros RC integradores e dife-

renciadores e as condições para que essas operações sejam efetuadas, além da importância do conhecimento de séries de Fourier para o entendimento desses modos de operação. Ainda nessa aula, é realizada uma análise das componentes de Fourier de uma onda quadrada e a integração da mesma, seguida de cálculos que comprovem a efetiva integração, usando os sinais de entrada e de saída. Finalmente, na terceira aula, como uma aplicação, é utilizado um circuito que efetua a superposição de um sinal gerado internamente a uma onda senoidal externa. Realiza-se um estudo das frequências de Fourier dos sinais interno e externo e do sinal final correspondente à superposição. Conhecendo-se o resultado da análise de Fourier preliminar, pode-se projetar filtros passa-altas ou passa-baixas com a finalidade de eliminar o sinal “espúrio” que pode ser ou o sinal interno ou a onda senoidal. Como ferramenta de apoio, é utilizado um programa que realiza as transformadas

¹E-mail: carlin@dfn.if.usp.br.

de Fourier para várias formas de onda.

2. Fundamentos teóricos

Nesta seção apresentamos um apanhado do formalismo de números complexos [1,2], o qual permite que se considere de forma mais simples as defasagens entre os sinais no resistor, no capacitor e na entrada do circuito, além de permitir que se trabalhe com as amplitudes das ondas senoidais. Dentro desse contexto, serão definidos os parâmetros necessários para o tratamento experimental dos filtros RC. Apresentamos também alguns fundamentos referentes a séries de Fourier [3].

2.1. Formalismo de números complexos

O circuito RC mostrado na Fig. 1 corresponde ao que será utilizado na maior parte do experimento. A tensão de saída do circuito, $V_s(t)$, corresponde ao sinal no capacitor. A tensão de entrada $V_e(t)$ é a fornecida por um gerador de funções padrão.

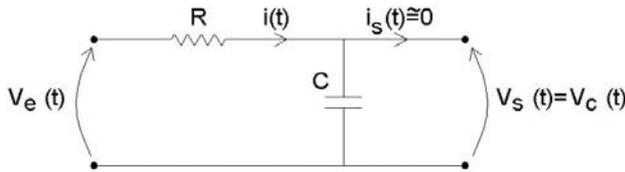


Figura 1 - Modelo de um circuito RC com tensão de saída medida no capacitor.

Para facilitar a análise, sem que haja alterações nas características de operação do circuito de interesse, vamos supor que a impedância, Z_{ext} , do circuito externo que vai ser ligado à saída desse circuito RC seja muito maior que a impedância de saída do próprio circuito, Z_s , ou seja

$$Z_s \ll Z_{ext}. \quad (1)$$

Neste caso, a corrente de saída pode ser considerada desprezível, se comparada à corrente de entrada. Assim, a corrente que passa pelo capacitor é praticamente igual à corrente que passa pelo resistor.

O ganho complexo desse circuito G , definido como a razão das tensões complexas de saída e entrada, pode ser escrito como

$$\hat{G} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}. \quad (2)$$

O fator $1/RC$ tem dimensão de frequência angular e será definido como ω_c , que é a chamada frequência de corte do circuito.

O ganho real é o módulo do ganho complexo acima

$$G = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}. \quad (3)$$

Pode-se notar aqui, que o valor do ganho para uma frequência igual à frequência de corte é $1/\sqrt{2} \cong 0,71$.

Considerando o caso particular de frequências altas se comparadas à frequência de corte, ou seja, $\omega RC \gg 1$, a tensão de saída passa a ser a integral da tensão complexa de entrada dividida por RC

$$\hat{V}_s(t) = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e(t) dt \quad \text{para } \omega \gg \frac{1}{RC}. \quad (4)$$

É interessante notar que nesse caso, consegue-se uma integração, mas a amplitude do sinal de saída é baixa, devido aos baixos valores de ganho para as frequências que o compõem.

Para o caso em que se utiliza a saída do circuito como sendo a tensão no resistor, o desenvolvimento é muito semelhante, e obtém-se para o ganho complexo

$$\hat{G} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}. \quad (5)$$

Portanto, nesse caso, o ganho real é escrito como

$$G = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}. \quad (6)$$

No caso particular de frequências bem menores que a frequência de corte, ou seja, $\omega RC \ll 1$, temos que a tensão de saída é a derivada da tensão complexa de entrada multiplicada por RC

$$\hat{V}_s(t) = RC \frac{d}{dt} \hat{V}_e(t). \quad (7)$$

Como no caso anterior, a amplitude do sinal derivado é baixa.

2.2. Série de Fourier

Do ponto de vista matemático, a definição geral de uma série que represente uma função periódica no tempo genérica, é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \text{senn}x). \quad (8)$$

Considerando o caso do circuito integrador, por uma questão de simplicidade e didática, vamos estudar experimentalmente, a integração de uma onda quadrada. Portanto, estamos interessados no conjunto de tensões harmônicas de diferentes amplitudes e frequências que compõem a tensão representada por uma onda quadrada. A série de Fourier para uma onda quadrada é dada por

$$V(t) = \frac{4V_P}{\pi} \text{sen}\omega t + \frac{4V_P}{3\pi} \text{sen}3\omega t + \frac{4V_P}{5\pi} \text{sen}5\omega t + \dots \quad (9)$$

onde V_P é a tensão de pico da onda $V(t)$, ω é a sua frequência angular e o número de termos se estende ao infinito. Vemos que para compor uma onda quadrada foi necessário somar ondas de amplitudes e frequências diferentes (notar que as frequências das componentes são múltiplos ímpares da frequência da primeira componente). Na prática, pode-se obter uma aproximação razoável para uma onda quadrada considerando apenas alguns termos da expressão acima.

Para uma onda triangular, por exemplo, a série que a representa é

$$V(t) = \frac{8V_P}{\pi^2} \text{sen}\omega t - \frac{8V_P}{(3\pi)^2} \text{sen}3\omega t + \frac{8V_P}{(5\pi)^2} \text{sen}5\omega t - \dots \quad (10)$$

Para muitas aplicações é útil conhecer as principais ondas harmônicas que compõem uma tensão alternada periódica, por exemplo, quando se deseja projetar um filtro integrador ou diferenciador para uma tensão alternada periódica. Nesse caso, temos que conhecer as principais harmônicas que compõem o sinal de interesse para poder escolher os componentes do circuito.

3. Arranjo experimental

O arranjo experimental utilizado é relativamente simples. Consiste de resistores de diversos valores e um capacitor de $1 \mu\text{F}$, gerador de funções (onda senoidal, quadrada e triangular), osciloscópio digital, o circuito especialmente projetado para superposição de sinais (CSS) e uma fonte de tensão contínua para alimentação do circuito. Cada grupo de dois ou três estudantes dispõe em sua bancada, de um computador e uma interface para aquisição de dados da PASCO. Por meio dessa interface, pode ser realizada a análise de Fourier dos sinais.

3.1. Circuito para superposição de sinais

Na Fig. 2 é mostrado um esquema do CSS. Por simplicidade e para que os estudantes possam observar o circuito, o mesmo é acondicionado em um pote plástico transparente também mostrado na Fig. 2, em cujas paredes são colocados conectores para os sinais e alimentação. O circuito gera um sinal interno (SI) com frequência que pode ser variada por meio de um potenciômetro, e a este sinal pode ser superposto um sinal externo, normalmente uma onda senoidal (OS), para gerar o sinal composto a ser trabalhado pelos estudantes. O SI é gerado por meio de um circuito oscilador de relaxação [4], usando um transistor unijunção 2N2646.

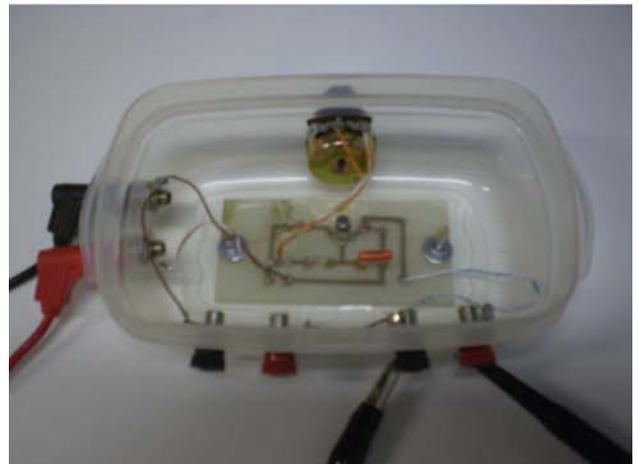
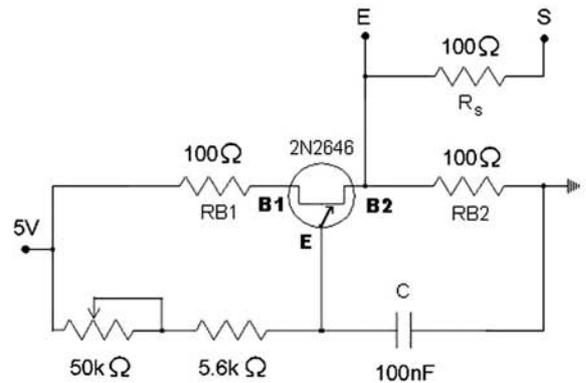


Figura 2 - Esquema do CSS (acima), foto do pote plástico que aloja os conectores para que possa ser realizada a superposição de sinais (centro) e detalhe do circuito no interior do pote plástico (abaixo). A entrada E recebe a onda senoidal e a saída S fornece o resultado da superposição. Na parte traseira está colocado o potenciômetro para variação da frequência do sinal gerado internamente e na lateral, à esquerda, os conectores para a fonte de alimentação.

A associação em série do potenciômetro de $50 \text{ k}\Omega$ com o resistor de $5,6 \text{ k}\Omega$ e com o capacitor C de 100 nF , forma um circuito RC que determina o tempo de subida do SI. O transistor unijunção (2N2646) entra em funcionamento quando o capacitor atinge um determinado valor de carga armazenada, e conseqüen-

temente de tensão, para a qual o diodo E-B2 começa a conduzir. Esse valor de tensão é denominado valor de pico, e está relacionado à tensão V_{RB2} no resistor R_{B2} por $V_P = 0,7 + V_{RB2}$. Ao se iniciar a condução, o capacitor de 100 nF se descarrega através do resistor $R_{B2} = 100 \Omega$, ligado ao terra do circuito. Estes formam um circuito RC que determina o tempo de descarga do capacitor, e conseqüentemente, o tempo de descida da tensão e a largura do SI. O transistor deixará de conduzir quando a tensão do capacitor cair abaixo da tensão de limiar inferior de condução deste. A partir daí inicia-se novamente a carga do capacitor e ciclo se repete. A freqüência do SI é determinada pelo valor da resistência do potenciômetro, a qual determina a constante de tempo do circuito de carga do capacitor. Com os componentes utilizados, a freqüência pode ser variada aproximadamente de 20 Hz até 1000 Hz.

Na Fig. 3 temos um detalhe do SI numa escala de tempo expandida, mostrando a parte exponencial do sinal, correspondente à descarga do capacitor.

A tensão sobre o resistor R_{B2} de 100 Ω , em paralelo com a saída do circuito, é determinada pela corrente que circula pelo transistor quando este entra em condução. A amplitude do sinal de saída é ajustada pela tensão de alimentação do circuito, no caso 5 V, e pelo circuito em série formado pelos resistores R_{B1} e R_{B2} de 100 Ω .

A soma do SI gerado pelo circuito com a OS produzida por um gerador de áudio conectado à entrada (E), é realizada através do resistor R_S de 100 Ω . O sinal resultante pode ser então observado na saída (S). Na ausência de um sinal externo, o próprio sinal gerado internamente é observado na saída (S).

Na Fig. 4 é mostrada uma imagem da tela do osciloscópio com o SI gerado pelo CSS, para uma freqüência $f = 927$ Hz.

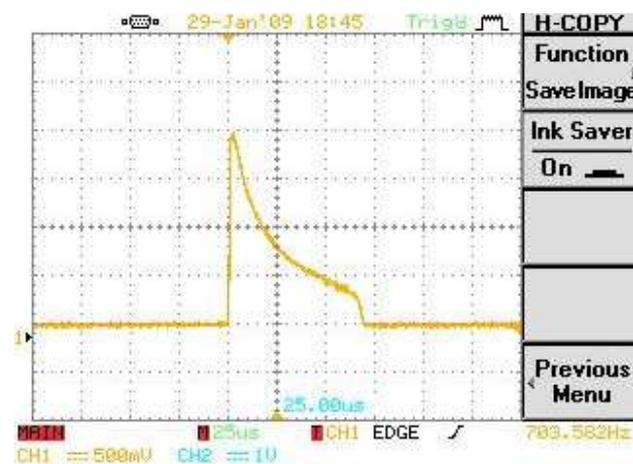


Figura 3 - Detalhe do SI com escala de tempo expandida, mostrando a parte do sinal correspondente à descarga do capacitor.

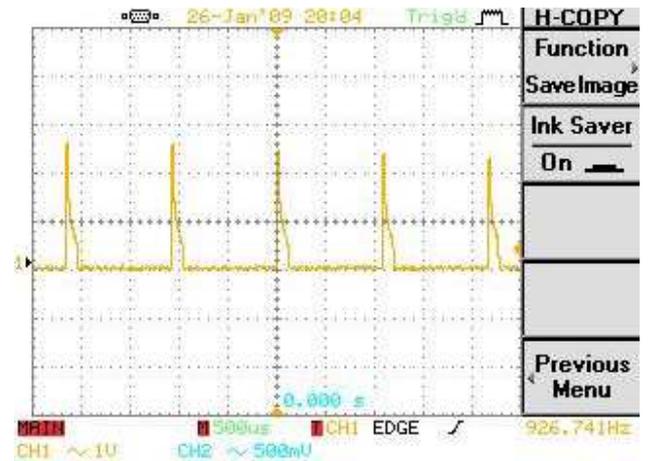


Figura 4 - Sinal interno gerado pelo CSS com $f = 927$ Hz.

4. Procedimento experimental

O experimento é realizado em três partes, envolvendo os conceitos de ganho, integração e diferenciação de sinais e componentes de freqüências de Fourier dos sinais. Esse último conceito é importante para que os estudantes possam entender que deve se raciocinar em termos dessas componentes quando se deseja projetar um filtro de freqüências passa-baixas ou passa-altas. Finalmente, é realizada uma aplicação dos conceitos estudados, que consiste do projeto e utilização de filtros simples de freqüência para processar sinais gerados pelo CSS. Procura-se deixar claro para os estudantes, que esses filtros são simples e nem sempre podem funcionar de forma adequada, pois devem obedecer à condição mostrada na Eq. (1). No caso desse experimento a condição é satisfeita, pois se utiliza como carga o osciloscópio com alta impedância de entrada. É mencionado também que esse problema de casamento de impedância poderia ser eliminado se utilizássemos amplificadores operacionais para projetar os filtros. Esse tipo de filtros não é explorado nesse experimento.

4.1. Ganho em função da freqüência angular

Na primeira parte do experimento é montado um circuito RC na forma de passa-baixas (tensão de saída no capacitor), com freqüência de corte (f_c) próxima a 500 Hz. Mais especificamente, utilizando um resistor de 330 Ω e um capacitor de 1 μF , temos uma freqüência de corte de 482,3 Hz ($\omega_c = 3030$ rad/s). Utilizando-se uma onda senoidal na entrada, é realizado um estudo do ganho em função da freqüência angular, sendo o resultado experimental comparado ao resultado esperado de acordo com a Eq. (3). O ganho é determinado experimentalmente medindo-se as amplitudes das tensões no capacitor e na entrada (mantida fixa) para várias freqüências de ondas senoidais fornecidas por um gerador de áudio. Na Fig. 5, é mostrado o resultado desse estudo, bem como o resultado teórico esperado.

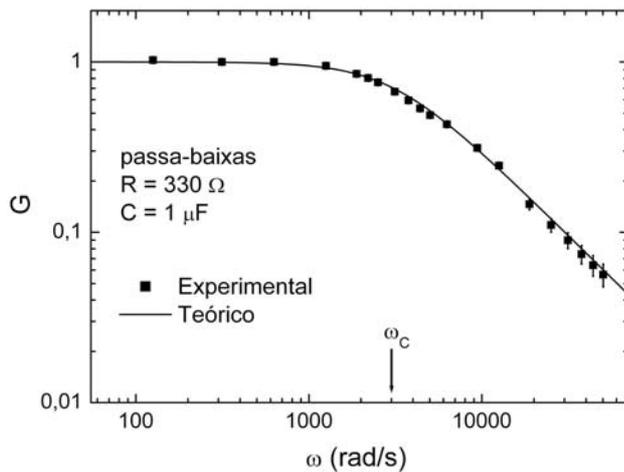


Figura 5 - Ganho em função da frequência angular para um filtro passa-baixas com $R = 330 \Omega$ e $C = 1 \mu\text{F}$. A linha sólida representa a função correspondente ao ganho dado pela Eq. (3).

4.2. Componentes de frequência dos sinais e integração

Na segunda parte, mantendo o mesmo valor de FC, explora-se o conceito de séries de Fourier, estudando-se o filtro RC passa-baixas com uma onda quadrada na entrada. Inicialmente, deixa-se claro que o estudo realizado com ondas senoidais na primeira parte, era um caso particular de uma dada componente de Fourier de sinais mais complicados. A condição de integração para um circuito RC passa-baixas (frequências muito maiores que FC) é também estudada experimentalmente, efetuando-se a integração de uma onda quadrada. Enfatiza-se nesse ponto que ao se falar de integração para frequências da onda quadrada muito maiores que FC, deve-se pensar que, nessa situação, todas as componentes de Fourier da onda quadrada possuem frequências maiores que FC e que, portanto, são todas afetadas pelo filtro, obedecendo à forma do ganho em função da frequência angular observada na Fig. 5. Com o objetivo de fixar esse conceito que nem sempre é óbvio para os estudantes, a integração é realizada em passos, variando-se a frequência da onda quadrada desde alguns poucos Hz, bem abaixo de FC, até as frequências em que a condição de integração esteja plenamente satisfeita. Os estudantes têm a oportunidade de observar que para a onda quadrada com frequência bem menor que FC, o sinal de saída do circuito é praticamente igual ao de entrada, pois nesse caso, praticamente todas as componentes de Fourier do sinal de entrada com amplitude significativa, são menores que FC, não sendo afetadas pelo filtro, conforme se depreende também da forma da função ganho da Fig. 5.

Na Fig. 6 é mostrada uma saída do programa associado à interface de aquisição de dados, mostrando o resultado da análise de Fourier de uma onda quadrada com frequência $f = 500 \text{ Hz}$ onde nota-se, além do harmônico fundamental com $f = 500 \text{ Hz}$ (com am-

plitude normalizada para 1), a presença somente dos harmônicos ímpares ($f = 1500 \text{ Hz}, 2500 \text{ Hz} \dots$). As amplitudes podem ser comparadas com o que é dado na Eq. (9).

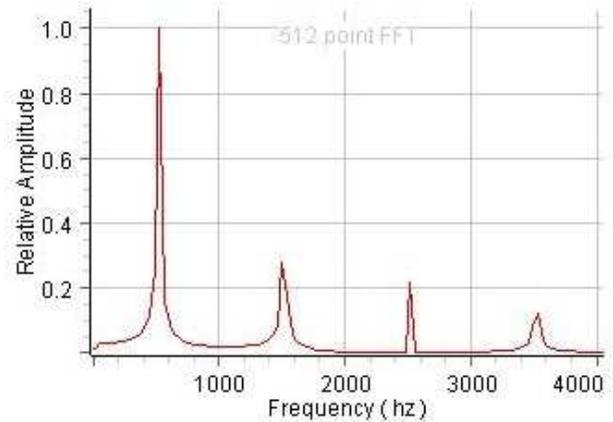


Figura 6 - Componentes de frequência de Fourier para uma onda quadrada com $f = 500 \text{ Hz}$. A amplitude do harmônico fundamental é normalizada para 1.

Na Fig. 7, apresentamos a tela do osciloscópio com a onda quadrada de entrada e a onda de saída para frequência da onda quadrada de entrada $f = 20 \text{ Hz}$, bem menor que FC, (sinal de saída pouco alterado em relação ao de entrada) e $f = 15 \text{ kHz}$, bem maior que FC, (onda triangular na saída, resultante da integração). A partir das amplitudes na entrada e na saída, observadas no caso da integração e fazendo uso da Eq. (4), os estudantes realizam cálculos para verificar se a integração foi efetivamente realizada.

4.3. Processamento de sinais com a utilização do CSS

Na terceira e última parte do experimento, é realizada uma aplicação dos conceitos vistos nas duas primeiras aulas, por meio da utilização do CSS descrito na seção 3. Procura-se nesse ponto, enfatizar as aplicações práticas do uso de filtros simples de frequência, como por exemplo, eliminação de ruídos em sistemas de som, etc. Conforme já mencionado, a frequência do sinal interno pode ser variada e pode se realizar a superposição com uma onda senoidal (OS) externa obtida com o gerador de funções, de amplitude um pouco menor que o SI. O sinal resultante da superposição (SRS) para SI com $f = 927 \text{ Hz}$ e OS com $f = 60 \text{ Hz}$ é mostrado na Fig. 8.

Os estudantes inicialmente se familiarizam com o CSS, estudando as componentes de Fourier do SI e da OS. Na Fig. 9 mostramos o resultado da análise de Fourier do SI com $f = 927 \text{ Hz}$. A análise de Fourier da OS com $f = 60 \text{ Hz}$ é mostrada também na Fig. 9.

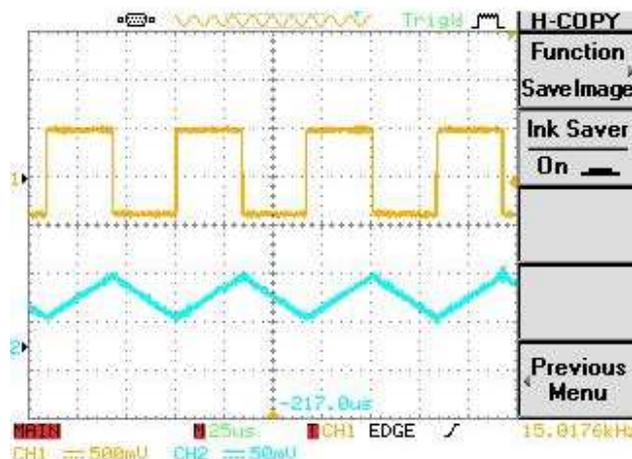
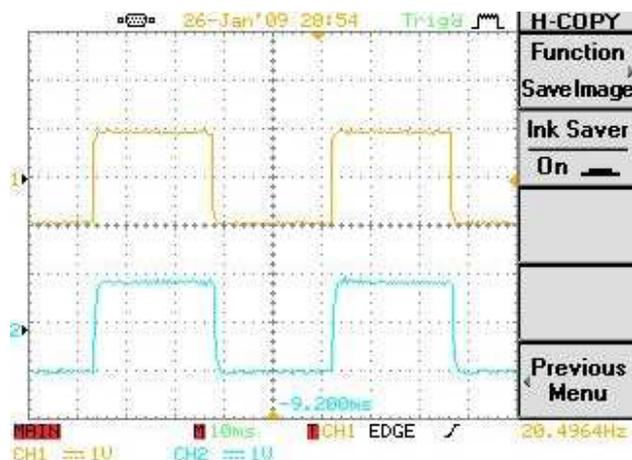


Figura 7 - Saída do filtro RC passa-baixas com onda quadrada de 20 Hz na entrada (acima). Saída do filtro RC passa-baixas com onda quadrada de 15 kHz na entrada (abaixo).

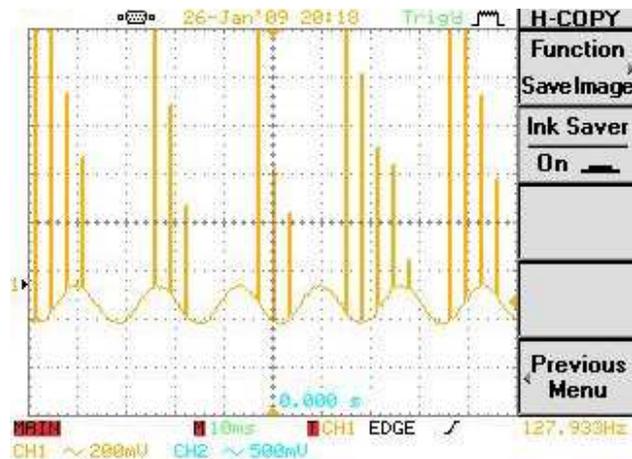


Figura 8 - Saída do CSS, mostrando a superposição do SI com $f = 927$ Hz e da OS com $f = 60$ Hz.

Nesse ponto, os estudantes são colocados diante de dois desafios experimentais. Considerando como sinal de entrada o SRS formado de acordo com o mostrado na Fig. 8, tem-se o seguinte: I) postula-se que no SRS, a OS seja um sinal espúrio que se deseja remover com utilização de um filtro RC de frequências. II) postula-se

que no SRS, o SI é um sinal espúrio que deve ser eliminado. Solicita-se que os estudantes projetem os dois circuitos para realizar as tarefas solicitadas. Os estudantes devem inicialmente perceber que, de acordo com a análise de Fourier do SI, este possui componentes de frequência maiores ou iguais a 927 Hz. A OS possui $f = 60$ Hz. Portanto, na situação I), como desejamos eliminar a OS, deve-se projetar um filtro RC passa-altas (saída no resistor) com FC ligeiramente menor que 927 Hz. Assim, as frequências que compõem o SI não serão atenuadas e a frequência de 60 Hz da OS será bem atenuada. Na situação II), deve ser projetado um filtro RC passa-baixas (saída no capacitor), com FC um pouco maior que 60 Hz, de forma que a OS não seja atenuada e as componentes do SI sejam significativamente atenuadas.

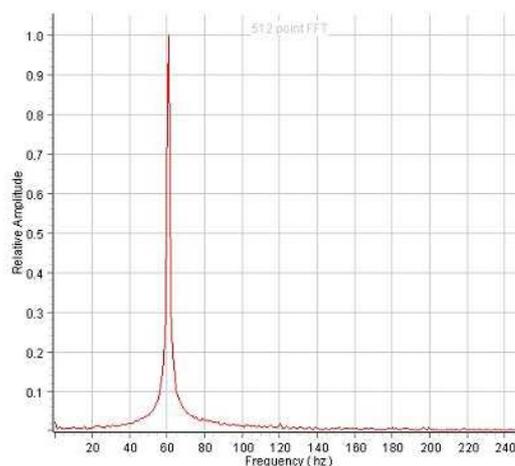
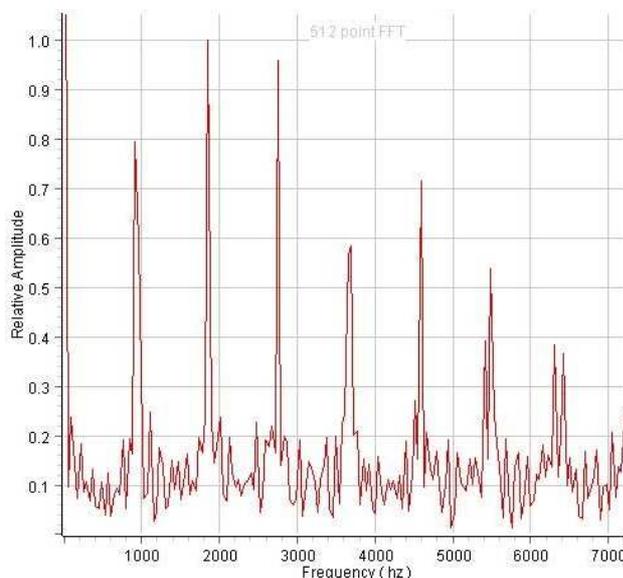


Figura 9 - Análise de Fourier para o SI com $f = 927$ Hz e para a OS com $f = 60$ Hz.

Conforme o descrito acima, usou-se na situação I) $R = 220 \Omega$ e $C = 1 \mu F$, correspondendo a uma frequência de corte $f_c = 723$ Hz e para a situação II) usou-se $R = 2200 \Omega$ e $C = 1 \mu F$, correspondendo a

uma frequência de corte $f_c = 72$ Hz. Na Fig. 10, são mostradas as ondas de entrada e saída correspondentes às duas situações propostas. Nota-se que os resultados são bem satisfatórios.

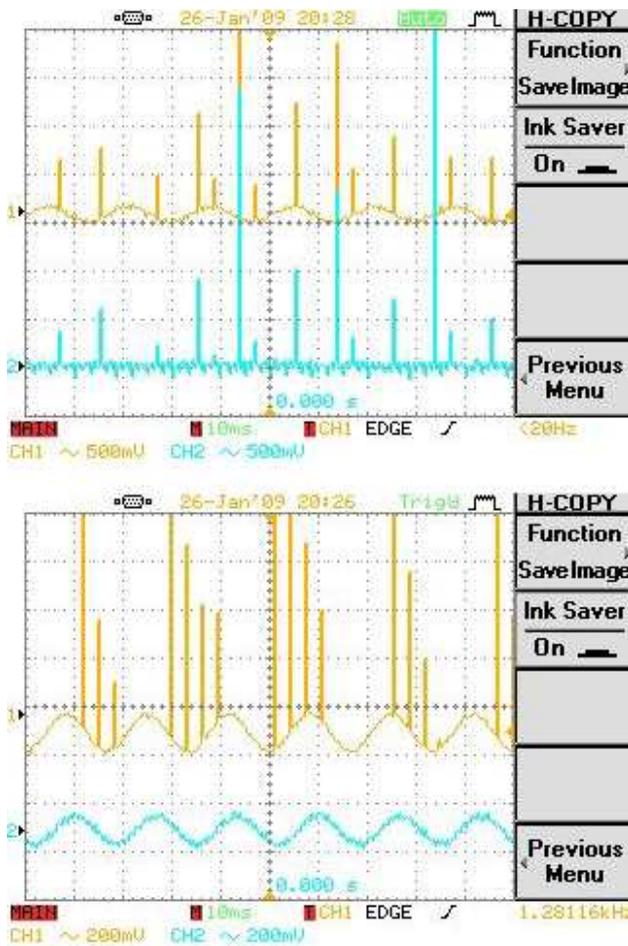


Figura 10 - Acima, entrada e saída do filtro RC para a situação I) (eliminação da OS). Abaixo, entrada e saída do filtro RC para a situação II) (eliminação do SI).

É importante mencionar, que nessa situação bem didática, as amplitudes dos sinais que formam o SRS, assim como as frequências do SI e da OS são inicialmente escolhidos de forma bem conveniente para tornar a análise bem simples. Após esse estudo inicial, uma vez

que os estudantes tenham fixado os conceitos envolvidos, esses parâmetros podem ser variados, podendo-se verificar que para outras situações os circuitos podem não funcionar apropriadamente.

5. Considerações finais

Nesse trabalho foi apresentado um experimento realizado dentro da filosofia implementada nas disciplinas experimentais de eletricidade, magnetismo e óptica no Instituto de Física da USP. O experimento consiste do estudo de filtros RC passa-baixas e passa-altas, os quais, em determinadas condições podem funcionar também como integradores e diferenciadores. É introduzido o conceito experimental da análise das componentes de Fourier dos sinais e como aplicação, utiliza-se um circuito que realiza a superposição de sinais, baseado em um oscilador de relaxação com o transistor 2N2646. O experimento é realizado em 3 aulas de quatro horas cada, explorando-se os conceitos de ganho, integração, séries e componentes de Fourier e projeto de filtros. No final, observa-se que os estudantes obtêm uma boa compreensão dos conceitos envolvidos, sendo capazes de projetar filtros RC simples.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem a contribuição do Prof. J.H. Vuolo nas discussões e na fase inicial de implementação do experimento.

Referências

- [1] A.J. Diefenderfer, *Principles of Electronic Instrumentation* (W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1979).
- [2] P. Horowitz and W. Hill, *The Art of Electronics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [3] E. Butkov, *Física matemática* (Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro, 1983).
- [4] Unijunction Transistor 2N2646, disponível em <http://www.datasheetcatalog.org/datasheet/philips/2N2646.pdf>.